Übungsaufgaben zur Topologie

Prof. Dr. Birgit Richter

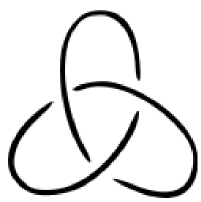
Wintersemester 2023/24

Blatt 9 Abgabetermin: 22.12.2023, 16:00h

(1) (Endlich erzeugte abelsche Gruppen) (3 Punkte)
Konstruieren Sie zu jeder endlich erzeugten abelschen Gruppe A einen expliziten topologischen Raum X_A mit einem Grundpunkt x_0, so dass $\pi_1(X_A, x_0) \cong A$. (Falls Sie den Struktursatz für diese Gruppen nicht kennen, dann schlagen Sie ihn nach.)

(2) (Verklebte Volltori) (3 Punkte)
Es sei $X = (\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1) \cup_f (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2)$, wobei $f\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $f(z, w) = (z^a w^b, z^c w^d)$ für ganze Zahlen a, b, c und d . Berechnen Sie $\pi_1(X, ((1, 0), (1, 0)))$ in Abhängigkeit von a, b, c, d.

(3) (Knotengruppen) (2 + 3 Punkte)
a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{S}^1$ zu $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ homotopieäquivalent ist. Insbesondere ist $\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{S}^1, 0) \cong \mathbb{Z}$.
b) Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe des Komplements der Kleeblattschlinge im $\mathbb{R}^3$ nicht isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.


[Quelle: wiki commons]

(4) (Kompakt-offene Topologie auf Abbildungsräumen) (2 + 1 + 2 + 2 Punkte)
Auf der Menge $C(X, Y)$ aller stetigen Abbildung eines Raumes X in einen Raum Y ist die kompakt-offenen Topologie diejenige, die als Subbasis die Mengen $U(K, O)$ aller stetigen Abbildungen $f \in C(X, Y)$ hat, die eine kompakte Menge $K \subset X$ in eine offene Menge $O \subset Y$ abbilden:

$$U(K, O) = \{f \in C(X, Y),\ f(K) \subset O\}.$$

a) Zeigen Sie: Ist Y hausdorffsch, so auch $C(X, Y)$.
b) Beweisen Sie, dass für jeden diskreten topologischen Raum X gilt: $C(X, Y) \cong \prod_X Y$.
c) Ist die Auswertungsabbildung $\varepsilon : C(X, Y) \times X \longrightarrow Y$, $(f, x) \mapsto f(x)$ stetig, falls X lokal-kompakt und hausdorffsch ist?
d) Es seien X, Y hausdorffsch und lokal-kompakt. Beweisen Sie das Exponentialgesetz:

$$C(X \times Y, Z) \cong C(X, C(Y, Z)) \cong C(Y, C(X, Z)).$$