Übungsaufgaben zur Topologie

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2024/25

Blatt 10 Abgabetermin: 10.01.2025, 15:45h in H5

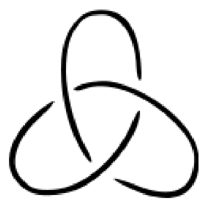
(1) (Knotengruppen) (2 + 4 + 1 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{S}^1$ zu $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ homotopieäquivalent ist. Insbesondere ist $\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{S}^1, 0) \cong \mathbb{Z}$.

b) Zeigen Sie mit dem Satz von Seifert-van Kampen, dass für die Fundamentalgruppe des Komplements der Kleeblattschlinge K im $\mathbb{R}^3$ gilt

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, x_0) \cong \langle a, b \mid a^2 = b^3 \rangle.$$

Hinweis: Betten Sie die Kleeblattschlinge so in den $\mathbb{R}^3$ ein, dass in Standardkoordinaten die z-Koordinate nur an den Überkreuzungen auf $z = 0$ heruntergeht und sonst auf $(z = 1)$-Niveau liegt. Für die Anschauung ist es günstig, den Grundpunkt oberhalb des Knotens anzusiedeln.



[Quelle: wiki commons]

c) Ist die Gruppe $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, x_0)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$?

(2) (Flächen) (3 Punkte)

Zeigen Sie induktiv, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(F_g, x_0)$ einer kompakten, orientierbaren Fläche vom Geschlecht $g \geqslant 1$, F_g, isomorph ist zu

$$\langle a_1, b_1, \dots a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \rangle.$$

(3) (Endlich erzeugte abelsche Gruppen) (3 Punkte)

Konstruieren Sie zu jeder endlich erzeugten abelschen Gruppe A einen expliziten topologischen Raum X_A mit einem Grundpunkt x_0, so dass $\pi_1(X_A, x_0) \cong A$. (Falls Sie den Struktursatz für diese Gruppen nicht kennen, dann schlagen Sie ihn nach.)

(4) (Verklebte Volltori) (4 Punkte)

Es sei $X = (\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1) \cup_f (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2)$, wobei $f \colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $f(z, w) = (z^a w^b, z^c w^d)$ für ganze Zahlen a, b, c und d . Berechnen Sie $\pi_1(X, ((1, 0), (1, 0)))$ in Abhängigkeit von a, b, c, d.