Übungsaufgaben zur Topologie

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2024/25

Blatt 2 Abgabetermin: Freitag, 1. November 2024, 15:45h in H5

(1) (T_1, T_3 und T_4) (2 + 2 + 2 Punkte)
Ein topologischer Raum X erfüllt das Trennungsaxiom T_1, falls von je zwei verschiedenen Punkten aus X jeder eine Umgebung besitzt, die den anderen Punkt nicht enthält.

a) Zeigen Sie, dass für eine Menge X die koendliche Topologie die gröbste Topologie ist, für die X ein T_1-Raum ist.

b) Beweisen Sie, dass X genau dann ein T_1-Raum ist, wenn jede einpunktige Menge abgeschlossen ist.

c) Beweisen Sie die Rückrichtungen in Satz 6.5.

(2) (Trennungseigenschaften metrischer Räume) (2 + 2 Punkte)
Untersuchen Sie metrische Räume daraufhin, ob sie hausdorffsch und regulär sind.

(3) (Torusknoten) (3 + 1 Punkte)
Als Torus bezeichnet man den topologischen Raum $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

a) Zeigen Sie, dass T homöomorph ist zur Rotationsfläche, die entsteht, wenn man die Kreislinie $\{(x, z) \mid (x-2)^2 + z^2 = 1\}$ in der (x, z)-Ebene um die z-Achse rotieren lässt.

b) Es seien $p, q \geqslant 2$ ganze teilerfremde Zahlen. Betrachten Sie die Kurve $t \mapsto (\exp(2\pi i p t), \exp(2\pi i q t))$ auf T. Zeichnen Sie das Bild der Kurve für $p = 3, q = 2$ auf der Rotationsfläche.

(4) (Urysohnscher Einbettungssatz) (1 + 2 Punkte)
Zeigen Sie, dass jeder metrische Raum X mit abzählbarer Basis in den Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{R})$ der quadratsummierbaren reellen Folgen eingebettet werden kann. Überlegen Sie sich dazu die folgenden Schritte:

a) Eine Funktion $f\colon X \to Y$ ist genau dann eine Einbettung, wenn sie stetig und injektiv ist, und wenn für jedes offene B in X $f(B)$ von der Form $O \cap f(X)$ ist für ein offenes O in Y.

b) Erinnern Sie sich daran, dass X eine abzählbare dichte Teilmenge $D = \{P_1, P_2, \ldots\}$ besitzt und untersuchen Sie die Abbildung $f(x) := (\ldots, 2^{-n} d(x, P_n), \ldots)$.