Übungsaufgaben zur Topologie

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2024/25

Blatt 3 Abgabetermin: Freitag, 8.11.2024, 15:45h in H5

(1) (Einbettungen) (2 + 2 Punkte)

Für eine reelle Zahl x sei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Es sei $0 < \theta < 1$ eine irrationale Zahl. Betrachten Sie

$$f\colon \mathbb{Z} \to [0,1), \quad f(n) := n\theta - \lfloor n\theta \rfloor.$$

Auf $\mathbb{Z}$ sei die diskrete Topologie gewählt.

a) Liegt $f(\mathbb{Z})$ dicht in $[0,1)$?

b) Ist f eine Einbettung?

(2) (Produkte I) (2 + 2 + 1 Punkte)

Es sei $((X_i, \mathcal{T}_i), i \in I)$ eine Familie topologischer Räume mit $X_i \neq \varnothing$ für alle $i \in I$ und $X = \prod_{i \in I} X_i$ sei ihr Produkt. Zeigen Sie:

a) X ist genau dann hausdorffsch oder regulär, wenn jedes X_i hausdorffsch bzw. regulär ist.

b) Beweisen Sie, dass die Projektionsabbildungen $\pi_j\colon \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ offen sind.

c) Tragen alle X_i die diskrete Topologie, ist dann $\prod_{i \in I} X_i$ immer diskret? Beweisen Sie Ihre Antwort.

(3) (Produkte II) (1 + 2 + 2 Punkte)

Nehmen Sie an, dass die Topologien $\mathcal{T}_i$ auf X_i nicht nur aus $\varnothing$ und X_i bestehen. Betrachten Sie auf $X = \prod_{i \in I} X_i$ die Topologie mit Basis

$$\mathcal{B} = \{\prod_{i \in I} O_i, O_i \in \mathcal{T}_i\}.$$

Diese Topologie ist die *Box-Topologie*.

a) Zeigen Sie, dass diese Topologie feiner ist als die Produkttopologie. (Beide stimmen natürlich genau dann überein, wenn I endlich ist.)

b) Sind die Projektionsabbildungen stetig? Konstruieren Sie ein Beispiel, welches zeigt, dass $\prod_{i \in I} X_i$ mit der Box-Topologie *nicht* die universelle Eigenschaft des Produktraumes erfüllt, falls I unendlich ist.

c) Konstuieren Sie eine Folge, die in der Produkttopologie konvergiert, aber nicht in der Box-Topologie.

(4) (Normalität) (3 Punkte)

Betrachten Sie die Topologie auf $\mathbb{R}$, die von den halboffenen Intervallen $[a, b)$ erzeugt wird. Zeigen Sie, dass die reellen Zahlen mit dieser Topologie normal sind. Beweisen Sie, dass das Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Topologie, die durch Produkte $[a, b) \times [c, d)$ erzeugt ist, dagegen nicht normal ist. Geben Sie dazu entweder einen direkten Beweis, oder beweisen Sie folgendes Lemma und suchen Sie sich geeignete Mengen S und D in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

Lemma: Enthält X eine dichte Teilmenge D und einen abgeschlossenen diskreten Unterraum S, dessen Kardinalität die Kardinalität der Potenzmenge von D nicht unterschreitet, dann ist X nicht normal.

(Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}))$ gilt.)