Übungsaufgaben zur Topologie

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2024/25

Blatt 4 Abgabetermin: Freitag, 15.11.2024, 15:45h in H5

(1) (Zusammenhang und Wegzusammenhang von Produkten) (2 + 1 Punkte)
Es sei $(X_i, i \in I)$ eine Familie nichtleerer topologischer Räume und $X = \prod_{i \in I} X_i$ sei ihr Produkt. Ist X genau dann (weg)zusammenhängend, wenn jedes X_i (weg)zusammenhängend ist? Beweisen Sie jeweils Ihre Behauptung.

(2) (Zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend) (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass

$$X = \{(0,0)\} \cup \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

(3) (Wichtige Matrizengruppen) (2 + 2 + 2 Punkte)
Für Matrizengruppen nehmen wir die Unterraumtopologie des umgebenden Matrizenrings, also $M_n(K) = K^{n^2}$.

a) Zeigen Sie die Homöomorphismen $SO(2) \cong U(1) \cong \mathbb{S}^1$ und $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$.

b) Weisen Sie nach, dass $O(n)$ für kein n zusammenhängend ist, während $SO(n)$ für alle $n \geqslant 1$ wegzusammenhängend ist.

c) Was gilt für $U(n)$ und $SU(n)$?

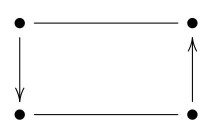
(4) (Sphäre in disguise) (2 Punkte)
Beweisen Sie durch Angabe expliziter Abbildungen, dass $\mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1}$ und $\mathbb{S}^n$ zueinander homöomorph sind.

(5) (Reell-projektive Ebene) (2 + 2 Punkte)
Beweisen Sie, dass die folgenden Räume homöomorph zum $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{S}^2/(x \sim -x)$ sind:

a) $\mathbb{D}^2/\sim$, wobei $x \sim -x$ für $x \in \mathbb{S}^1$.

b) $M/\partial M$; hierbei ist M das Möbiusband und ∂M sein Rand.

Das Möbiusband als Quotient eines Rechtecks:



Sie verkleben die rechte und die linke Kante des Rechtecks, drehen aber eine der Kanten vor dem Kleben um 180 Grad.