Übungsaufgaben zur Topologie

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2024/25

Blatt 5 Abgabetermin: 22.11.2024, 15:45h in H5

(1) (Sie kennen diesen Raum!) (2 Punkte)
Es sei $X = \mathbb{D}^2$, $A = \mathbb{S}^1 \subset X$ und $Y = \mathbb{S}^1$ und $f\colon A \to Y$ sei die Abbildung $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $f(z) = z^2$. Identifizieren Sie $X \cup_f Y$.

(2) (Urbildfilter) (2 + 1 + 3 Punkte)
Es sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und F sei ein Filter auf Y. Bilden die Urbilder der Mengen von F eine Filterbasis, so heißt der Filter zu dieser Basis das *Urbild von* F. Es bezeichne $f^{-1}(F)$ diesen Urbildfilter, sofern er existiert. Zeigen Sie:

a) Es sei $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf Y. Der Filter $F_{\mathcal{B}}$ hat bzgl. f genau dann ein Urbild, wenn keine Menge aus $\mathcal{B}$ ein leeres Urbild hat. Ist f surjektiv, so besitzt also jeder Filter F auf Y ein Urbild.

b) Ist F schon das Bild eines Filters F' auf X, so besitzt F ein Urbild.

c)
- Ist F' ein Filter auf X, so ist $f^{-1}(f(F'))$ gröber als F'.
- Es gilt $F' = f^{-1}(f(F'))$, wenn f injektiv ist.
- Ist F ein Filter auf Y und $f^{-1}(F)$ existiert, so ist $f(f^{-1}(F))$ feiner als F und stimmt mit F überein, falls f surjektiv ist.

(3) (Ultrafilter sind wie Primideale) (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass für einen Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf X für Teilmengen $A, B \subset X$ gilt, dass aus $A \cup B \in \mathcal{F}$ folgt, dass A oder B schon in $\mathcal{F}$ liegt.

(4) (Filter und hausdorffsch) (3 Punkte)
Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für einen topologischen Raum X:

a) X ist hausdorffsch.

b) Für jeden Punkt $x \in X$ ist der Durchschnitt aller seiner abgeschlossenen Umgebungen gleich $\{x\}$.

c) Jeder konvergente Filter auf X besitzt genau einen Limespunkt.

(5) (Cantors Diskontinuum) (2 + 2 Punkte)
Es sei C der Raum, der aus dem Einheitsintervall $I = [0, 1]$ entsteht, indem man zuerst das mittlere offene Drittel $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ entfernt. Dann entfernt man aus den beiden verbliebenen Teilen $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$ wiederum die offenen mittleren Drittel und so weiter.

Beschreiben Sie den Raum C als den Durchschnitt einer absteigenden Folge abgeschlossener Mengen $I = C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ und zeigen Sie

a) C ist homöomorph zum Produkt $\prod_{n \in \mathbb{N}} \{0, 2\}$ und somit insbesondere überabzählbar.

c) Wie sehen die Zusammenhangskomponenten von C aus?