Übungsaufgaben zur Topologie

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2024/25

Blatt 6 Abgabetermin: 29.11.2024, 15:45h in H5

(1) (Lebesgue-Zahl) (2 Punkte)
Sei X ein kompakter metrischer Raum. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass die Metrik auf X beschränkt ist. Für eine beliebige Teilmenge $S \subset X$ sei $\operatorname{diam}(S) := \sup\{d(x_1, x_2), x_1, x_2 \in S\}$ der Durchmesser der Teilmenge S. Zeigen Sie, dass es zu jeder offenen Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine reelle Zahl $\lambda > 0$ gibt, so dass jede Teilmenge $S \subset X$ mit $\operatorname{diam}(S) < \lambda$ in einem U_i liegt.

(2) (Ein-Punkt-Kompaktifizierung) (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)
a) Es seien $a < b < c < d \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Ein-Punkt-Kompaktifizierungen von $[a, b)$, (a, b) und $(a, b) \cup (c, d)$.

Es seien X und Y lokal-kompakt und hausdorffsch und X^+, Y^+ seien die Ein-Punkt-Kompaktifizierungen mit $\infty \in X^+$ und $\infty' \in Y^+$ als unendlich fernen Punkten.

b) Zeigen Sie, dass sich eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ genau dann durch $\tilde{f}(\infty) := \infty'$ zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f}\colon X^+ \to Y^+$ fortsetzen lässt, wenn für jedes kompakte $K \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(K)$ kompakt ist.

c) Stellen Sie $X^+ \vee Y^+$ als Ein-Punkt-Kompaktifizierung eines Raumes dar, wenn wir als Grundpunkte in X^+ und Y^+ die unendlich fernen Punkte wählen.

d) Beweisen Sie, dass X dicht liegt in X^+, falls X nicht schon kompakt ist.

(3) (Eigentliche Abbildungen) (2 Punkte)
Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt eigentlich, falls sie abgeschlossen ist und $f^{-1}(y) \subset X$ kompakt ist für alle $y \in Y$. Zeigen Sie, dass für eigentliche Abbildungen $f^{-1}(K)$ kompakt ist für jedes kompakte K.

(4) (Endlicher Tychonov per Hand) (3 Punkte)
Beweisen Sie den Satz von Tychonov für endliche Produkte, d.h. beweisen Sie, dass $X \times Y$ für nicht-leere X und Y genau dann kompakt ist, wenn X und Y kompakt sind. Betrachten Sie dazu die Inklusion $i_y\colon X \to X \times Y$, $x \mapsto (x, y)$ für ein festes y und wählen Sie zu einer offenen Überdeckung von $X \times Y$ eine endliche Teilüberdeckung von $i_y(X)$.

(5) (Total unzusammenhängend) (2 Punkte)
Ein topologischer Raum, in dem nur die einelementigen Teilmengen und die leere Menge zusammenhängend sind, heißt *total unzusammenhängend*.

Es sei p eine Primzahl. Die p-adischen ganzen Zahlen, $\mathbb{Z}_p$, sind definiert als Unterraum des Produktes $\prod_{n \geqslant 1} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ als

$$\mathbb{Z}_p := \{(x_1, x_2, x_3, \ldots) \mid x_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},\ \varrho_{n+1}(x_{n+1}) = x_n \text{ für alle } n \geqslant 1\}.$$

Hierbei ist $\varrho_{n+1}\colon \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_p$ für jede Primzahl p als topologischer Raum total unzusammenhängend ist. Hinweis: Als diskreter Raum ist $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ total unzusammenhängend. Was ist dann mit dem Produkt total unzusammenhängender Räume und einem Unterraum?