

Übungsaufgaben zur Topologie

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2024/25

Blatt 7

Abgabetermin: 6.12.2024, 15:45h in H5

(1) (Kompaktheit und Limites) (2 + 2 Punkte)

- Ist die unendlich dimensionale Sphäre $\mathbb{S}^\infty = \varinjlim (\mathbb{S}^0 \subset \mathbb{S}^1 \subset \dots \subset \mathbb{S}^n \subset \dots)$ kompakt?
- Zeigen Sie, dass der Hawaiische Ohrring kompakt ist.

(2) (Kegel) (1 + 2 + 2 Punkte)

Es sei $\emptyset \neq X$ ein beliebiger Raum. Der Kegel auf X , CX , sei definiert als $CX = X \times [0, 1]/X \times \{1\}$.

- Zeigen Sie, dass CX zusammenziehbar ist.

Der Raum X kann als Unterraum des Kegels aufgefasst werden, indem man X mit $X \times \{0\}$ identifiziert. Es sei $i: X \rightarrow CX$ die Inklusion.

b) Beweisen Sie, dass eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ genau dann nullhomotop ist, wenn sie sich auf den Kegel CX fortsetzen lässt.

Der Abbildungskegel einer Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist definiert als $C_f := Y \cup_f CX$. Hierbei ist Y in kanonischer Weise ein Unterraum von C_f .

c) Es sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ eine Verkettung von Abbildungen. Beweisen Sie, dass $g \circ f$ genau dann nullhomotop ist, falls man g über den Kegel von f faktorisieren kann:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z, \\ & & \downarrow i & \nearrow \bar{g} & \\ & & C_f & & \end{array}$$

d.h. es gibt ein \bar{g} mit $\bar{g} \circ i = g$.

(3) (Zur Homotopieäquivalenz) (2 Punkte)

Zu $f: X \rightarrow Y$ gebe es $h, k: Y \rightarrow X$ mit $h \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ k \simeq \text{id}_Y$. Beweisen Sie, dass dann X homotopieäquivalent zu Y ist.

(4) (Fundamentalgruppen topologischer Gruppen) (2 + 2 + 2 Punkte)

Es sei G eine topologische Gruppe, also eine Gruppe G , die ein topologischer Raum ist, so dass die Verknüpfung und die Inversenbildung stetig sind. Ist $\emptyset \neq X$ ein beliebiger topologischer Raum, so definieren wir auf $[X, G]$ und auf $[X, x_0; G, 1]$ für $x_0 \in X$ eine Multiplikation durch $[f] \bullet [g] := [f \bullet g]$, wobei wir für $f \bullet g$ punktweise in G verknüpfen: $(f \bullet g)(x) := f(x)g(x)$.

- Zeigen Sie, dass $[X, x_0; G, 1]$ für $x_0 \in X$ dadurch eine Gruppe wird. Gilt das auch für $[X, G]$?
- Beweisen Sie, dass für $(X, x_0) = (\mathbb{S}^1, 1)$ die beiden Multiplikationen $f * g$ und $f \bullet g$ übereinstimmen.
- Auch für nichtabelsche topologische Gruppen G ist $\pi_1(G, 1)$ abelsch. Warum?