Übungsaufgaben zur Topologie

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2024/25

Blatt 9 Abgabetermin: 20.12.2024, 15:45h in H5

(1) (Freie Produkte) (2 + 2 Punkte)
Betrachten Sie das freie Produkt $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und zeigen Sie:
a) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist nicht endlich.
b) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist nicht abelsch.
Gelten a) und b) für beliebige freie Produkte $G_1 * G_2$ nichttrivialer Gruppen G_1 und G_2?

(2) (Wichtige Pushouts) (2 + 1 + 2 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Pushouts:
(a) Was ist der Pushout des Diagramms für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$?

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot n"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \\ 1 & \end{tikzcd}$$

(b) Was ist der Pushout von $\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ 1 & \end{tikzcd}$?

(c) Wir bezeichnen mit a den Erzeuger von $\mathbb{Z} = \{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$ und die Erzeuger von $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ seien b und c. Es sei $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ der Homomorphismus, der gegeben ist durch $f(a) = bcb^{-1}c^{-1}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ der Pushout des Diagramms $\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \\ 1 & \end{tikzcd}$ ist.

(3) (Kompakt-offene Topologie auf Abbildungsräumen) (1 + 2 + 2 + 3 Punkte)
Auf der Menge $C(X, Y)$ aller stetigen Abbildung eines Raumes X in einen Raum Y ist die kompakt-offenen Topologie diejenige, die als Subbasis die Mengen $U(K, O)$ aller stetigen Abbildungen $f \in C(X, Y)$ hat, die eine kompakte Menge $K \subset X$ in eine offene Menge $O \subset Y$ abbilden:

$$U(K, O) = \{f \in C(X, Y),\ f(K) \subset O\}.$$

a) Beweisen Sie, dass für jeden diskreten topologischen Raum X gilt: $C(X, Y) \cong \prod_X Y$.
b) Beweisen Sie, dass die Auswertungsabbildung $\varepsilon : C(X, Y) \times X \longrightarrow Y$, $(f, x) \mapsto f(x)$ stetig ist, falls X lokal-kompakt und hausdorffsch ist.
c) Es seien X, Y hausdorffsch und lokal-kompakt. Beweisen Sie das Exponentialgesetz:

$$C(X \times Y, Z) \cong C(X, C(Y, Z)) \cong C(Y, C(X, Z)).$$

d) Zeigen Sie, dass für einen kompakten Hausdorffraum X und einen metrischen Raum (Y, d) die kompakt-offene Topologie auf $C(X, Y)$ induziert ist durch die Metrik

$$d_{\sup}(f, g) := \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

Hinweis: Es reicht zu zeigen, dass ein Element der Umgebungsbasis in einer der Topologien jeweils eine Umgebung bezüglich der anderen Topologie enthält.