4 Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

Bisher standen Anfangswertaufgaben im Mittelpunkt der Untersuchungen, d.h. neben der Differentialgleichung mit $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\boldsymbol{y}' \quad = \quad \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \tag{1}$$

wurde für die gesuchte Funktion $\boldsymbol{y}$ die Zusatzbedingung

$$\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$$

gestellt, um zumindest in einer Umgebung von x_0 eine eindeutige Lösung von (1) zu erhalten. Stellt man an $\boldsymbol{y}$ an mehr als einem Punkt x_0 Bedingungen, so spricht man von Randwertaufgaben. Einfachste Beispiele zeigen, dass selbst bei Vorliegen eines Fundamentalsystems die Existenz einer Lösung nicht gewährleistet ist, also eine andere Lösungstheorie zu erwarten ist.

Zunächst sollen Beispiele für die Entstehung von Randwertaufgaben vorgestellt werden.

4.1 Produktansatz bei partiellen Differentialgleichungen

Eine partielle Differentialgleichungen ist eine Gleichung, in der neben der gesuchten Funktion u, die jetzt von mehr als einer Variablen abhängt, auch partielle Ableitungen erster oder höherer Ordnung von u auftreten können.

Beispiel 4.1:

Die Auslenkung $u(x,t)$ einer schwingenden Saite der Länge L, die an den Endpunkten eingespannt ist, wird durch folgende lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben $(c > 0)$:

$$u_{tt} \quad = \quad c^2 u_{xx} \quad \text{für} \quad 0 < x < L\,,\ 0 < t < T, \tag{2}$$

die die Randbedingungen

$$u(0,t) = 0 \quad \text{und} \quad u(L,t) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \le t \le T \tag{3}$$

und die Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{und} \quad u_t(x,0) = v_0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq L \tag{4}$$

erfüllt. Dabei gibt u_0 die Anfangsauslenkung und v_0 die Anfangsgeschwindigkeit an.

Zur Lösung setzt man einen Seperations- oder auch Produktansatz der Form

$$u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$$

in die Differentialgleichung ein und erhält

$$v(x)w''(t) = c^2 v''(x)w(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{w''(t)}{w(t)} = c^2 \frac{v''(x)}{v(x)} =: \lambda\,,$$

wobei λ eine Konstante ist. Aus dem Produktansatz ergeben sich damit die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen in v und w:

$$w'' - \lambda w = 0 \quad \text{und} \quad v'' - \frac{\lambda}{c^2} \cdot v = 0\,.$$

Setzt man den Produktansatz in die Randbedingungen ein, so ergibt sich

$$v(0)w(t) = 0 \quad \text{und} \quad v(L)w(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(0) = 0 \text{ und } v(L) = 0\,.$$

Für v ergibt sich somit die gewöhnliche Randwertaufgabe

$$v'' - \frac{\lambda}{c^2} \cdot v = 0 \quad \text{mit} \quad v(0) = 0 \text{ und } v(L) = 0\ .$$

Gesucht sind nur nichttriviale Lösungen, d.h. $v \not\equiv 0$. Andernfalls ergibt sich $u \equiv 0$ und damit keine Lösung des Ausgangsproblems.

Nichttriviale Lösungen ergeben sich nur im Fall $\lambda < 0$. Hier lautet die allgemeine Lösung:

$$v(x) = a \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda}x}{c}\right) + b \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda}x}{c}\right)$$

Einsetzen der Randbedingungen ergibt:

$0 = v(0) = b$ und $(a \not\equiv 0)$

$$0 = v(L) = a \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda}L}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{-\lambda}L}{c} = k\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\left(\frac{ck\pi}{L}\right)^2 .$$

Man erhält also für $k \in \mathbb{N}$ die Lösungen

$$v_k(x) = a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) .$$

Mit diesem Ergebnis ergibt sich für die verbleibende Differentialgleichung

$$w'' + \left(\frac{k\pi x}{L}\right)^2 w = 0$$

und deren allgemeine Lösung lautet

$$w(t) = C_k \sin\left(\frac{ck\pi t}{L}\right) + D_k \cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right) .$$

Damit löst

$$u_k(x,t) = \left(c_k \sin\left(\frac{ck\pi t}{L}\right) + d_k \cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

die Gleichung (2) mit den Randbedingungen (3). Da die Gleichung (2) linear ist erhält man durch Superposition, Konvergenz vorausgesetzt, folgende allgemeine sich aus dem Produktansatz ergebende Lösung

$$u(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \sin\left(\frac{ck\pi t}{L}\right) + d_k \cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) . \tag{5}$$

Zur Lösung des Anfangsrandwertproblems es jetzt nur noch erforderlich die Unbekannten c_k und d_k aus (5) unter Verwendung der Anfangsbedingungen (4) als Fourierkoeffizienten zu berechnen:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \\ &\Rightarrow \quad d_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx , \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} v_0(x) &= u_t(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k ck\pi}{L} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \\ &\Rightarrow \quad c_k = \frac{2}{ck\pi} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx . \end{aligned} \tag{7}$$

Beispiel 4.2:

Die Eigenschwingungen einer in einem Kreissektor vom Radius R und Winkel ω am Rand eingespannten Membran werden beschrieben durch das folgende Randeigenwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{im Inneren des Kreissektors,} \\ u &= 0 \quad \text{auf dem Rand des Kreises.} \end{aligned}$$

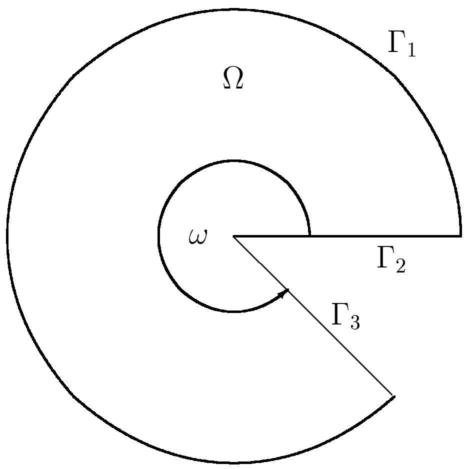


Bild Kreissektor Ω

Da das zugrundeliegende Gebiet ein Kreissektor ist werden als Variable Polarkoordinaten gewählt, d.h. $u = u(r, \phi)$. Damit besitzt die Differentialgleichung die Form

$$-\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi}\right) \;=\; \lambda u \quad \text{für} \quad 0 < r < R\,,\ 0 < \phi < \omega, \tag{8}$$

und die Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned} u(R, \phi) &= 0 \quad \text{für} \quad 0 \le \phi \le \omega\,, \\ u(r, 0) &= 0 \quad \text{für} \quad 0 \le r \le R\,, \\ u(r, \omega) &= 0 \quad \text{für} \quad 0 \le r \le R\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Ein Produktansatz der Form $u(r, \phi) = g(r)f(\phi)$ eingesetzt in (8) liefert

$$-\left(g''f + \frac{g'f}{r}u_r + \frac{gf''}{r^2}\right) \;=\; \lambda g f$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{f''}{f} = \frac{r^2g'' + rg' + \lambda r^2 g}{g} =: \mu, \tag{10}$$

mit einer Konstanten μ. Aus (10) ergeben sich die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$f'' + \mu f = 0 \tag{11}$$

und

$$r^2 g'' + rg' + (r^2\lambda - \mu) = 0\,. \tag{12}$$

Setzt man den Produktansatz in die zweite und dritte Randbedingung aus (9) ein so ergibt sich

$0 = u(r, 0) = g(r)f(0) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$

$0 = u(r, \omega) = g(r)f(\omega) \quad \Rightarrow \quad f(\omega) = 0\,.$

Für f ergibt sich somit die gewöhnliche Randwertaufgabe

$$f'' + \mu f = 0 \qquad \text{mit} \qquad f(0) = 0 \text{ und } f(\omega) = 0\ . \tag{13}$$

Setzt man den Produktansatz in die erste Randbedingung aus (9) ein so ergibt sich $0 = u(R, \phi) = g(R)f(\phi) \Rightarrow g(R) = 0$.

Für g ergibt sich somit die gewöhnliche Randwertaufgabe

$$r^2 g'' + rg' + (r^2\lambda - \mu) = 0 \qquad \text{mit} \qquad g(R) = 0\,. \tag{14}$$

Dass hier nur eine Randbedingung auftaucht hängt damit zusammen, dass es sich bei (14) um eine für $r = 0$ singuläre Differentialgleichung handelt. Die zweite nicht explizit genannte Randbedingung lautet hier $g(0) < \infty$. Die erforderlichen Untersuchungen werden später durchgeführt.

Es sei noch vermerkt, dass im Fall $\lambda > 0$ die Substitution $r = \rho/\sqrt{\lambda}$ angewendet auf die Differentialgleichung (12) auf eine Besselsche Differentialgleichung in $G(\rho) := g(r(\rho))$ führt.

$$\rho^2 G'' + \rho G' + (\rho^2 - \mu)G \;=\; 0\,. \tag{15}$$

4.2 Zweipunktrandwertprobleme bei linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Gegeben sei die lineare gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$L[u] := a_n u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = g \tag{16}$$

mit stetigen Funktionen $a_i, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sowie $a_n(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Mit L wird der die Gleichung beschreibende Differentialoperator bezeichnet.

Bei Zweipunkt-Randwertaufgaben werden die Randbedingungen $i = 1, \cdots, n$ an zwei verschiedenen Punkten a und b vorgeschrieben:

$$\begin{aligned} R_i[u] \; := \; & \alpha_{i0}u(a) + \alpha_{i1}u'(a) + \cdots + \alpha_{i,n-1}u^{(n-1)}(a) \\ & + \beta_{i0}u(b) + \beta_{i1}u(b)' + \cdots + \beta_{i,n-1}u^{(n-1)}(b) = d_i \, . \end{aligned} \tag{17}$$

Dass die Randwertaufgabe (16) und (17), selbst bei Vorliegen eines Fundamentalsystems keine (eindeutige) Lösung besitzen muss, zeigt das folgende:

Beispiel 4.3:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u'' + u \;=\; 0 \, ,$$

mit der allgemeinen Lösung:

$$u(x) \;=\; a \sin x + b \cos x \, ,$$

und verschiedenen Randbedingungen in $a = 0$ und $b = \pi/2$.

a) $u(0) = 0$ und $u(\pi/2) = 1$:

$$\Rightarrow \quad 0 = u(0) = b \, , \;\; 1 = u(\pi/2) = a$$

Als eindeutig bestimmte Lösung ergibt sich $u(x) = \sin x$.

b) $u'(0) = 1$ und $u(\pi/2) = 1$:

$$\Rightarrow \quad 1 = u'(0) = a \, , \; 1 = u(\pi/2) = \sin(\pi/2) + b\cos(\pi/2) \, .$$

Man erhält die Lösungsschar ($b \in \mathbb{R}$) $u(x) = \sin x \; + b \cos x$.

c) $u(0) = 0$ und $u'(\pi/2) = 1$:

$$\Rightarrow \quad 0 = u(0) = b \, , \; u'(\pi/2) = a\cos(\pi/2) = 0 \, .$$

Diese Randbedingungen liefern also keine Lösung.

Ist nun eine Funktion z gegeben, die die Randbedingungen erfüllt, d.h. es gilt $R_i[z] = d_i$, so wird die in den Randbedingungen inhomogene Aufgabe durch die Transformation $y := u - z$, in ein in den Randbedingungen homogenes Problem überführt:

$$L[y] \;=\; f \quad \text{mit} \quad R_i[y] = 0, \quad i = 1, \cdots, n \, , \tag{18}$$

denn

$$R_i[y] = R_i[u - z] = R_i[u] - R_i[z] = d_i - d_i = 0$$

und

$$L[y] = L[u - z] = L[u] - L[z] = g - L[z] =: f \, .$$

Im Folgenden werden daher nur noch Randwertaufgaben der Form (18) betrachtet. Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_i y_k(x)$$

Dabei bilden $y_1, \cdots, y_n$ das Fundamentalsystem und y_0 sei eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

Eingesetz in die Randbedingungen ergibt sich:

$$R_i[y] = R_i[y_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k] = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} c_k R_i[y_k] = -R_i[y_0] \, .$$

Die Lösbarkeit dieses linearen Gleichungssystems hängt von der Regularität der Systemmatrix $R_i[y_k]$ ab.

Es gilt daher der folgende Alternativsatz

Satz 4.1:

Gegeben sei das Randwertproblem (18) mit dem Fundamentalsystem $y_1, \cdots, y_n$ zu $L[y] = 0$ und der speziellen Lösung y_0 zu $L[y] = f$. Dann gilt

a) (18) ist eindeutig lösbar, falls $\det(R_i[y_k]) \neq 0$.

b) Gilt $\det(R_i[y_k]) = 0$, so ist (18) lösbar, falls

$$\operatorname{rang}(R_i[y_k]) = \operatorname{rang}(R_i[y_k], R_i[y_0]) = r < n$$

gilt. Die Dimension des Lösungsraumes des vollhomogenen Problems ($f = 0$) ist $n - r$.

Beispiel 4.4:

Die Kriterien des Satzes 4.1 sollen jetzt auf Beispiel 4.3 angewendet werden. Gegeben sei also die Differentialgleichung

$$u'' + u \;\; = \;\; 0 \, .$$

Ein Fundamentalsystem lautet

$$u_1(x) = y_1(x) = \sin x \quad , \quad u_2(x) = y_2(x) = \cos x \, .$$

Für die verschiedenen Randbedingungen ergibt sich:

a) $u(0) = 0$ und $u(\pi/2) = 1$:

Eine Funktion, die die Randbedingungen erfüllt ist durch $z(x) = 2x/\pi$ gegeben. Transformation auf Nullrandbedingungen ergibt:

$$f := g - L[z] = 0 - L[2x/\pi] = -2x/\pi \quad \Rightarrow \quad y'' + y = -2x/\pi \; .$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$y_0(x) = -z(x) = -2x/\pi \; .$$

$$\begin{aligned} \det(R_i[y_k]) &= \det \begin{pmatrix} R_1[y_1] & R_1[y_2] \\ R_2[y_1] & R_2[y_2] \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(\pi/2) & y_2(\pi/2) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \end{aligned}$$

Nach Satz 4.1 ist die Lösung damit eindeutig bestimmt.

b) $u'(0) = 1$ und $u(\pi/2) = 1$:

Eine Funktion, die die Randbedingungen erfüllt ist durch $z(x) = x - \pi/2 + 1$ gegeben. Transformation auf Nullrandbedingungen ergibt:

$$f := g - L[z] = -x + \pi/2 - 1 \quad \Rightarrow \quad y'' + y = -x + \pi/2 - 1 \; .$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$y_0(x) = -z(x) = -x + \pi/2 - 1 \; .$$

$$\det(R_i[y_k]) = \det \begin{pmatrix} y_1'(0) & y_2'(0) \\ y_1(\pi/2) & y_2(\pi/2) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} R_1[y_1] & R_1[y_2] \\ R_2[y_1] & R_2[y_2] \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} R_1[y_1] & R_1[y_2] & R_1[y_0] \\ R_2[y_1] & R_2[y_2] & R_2[y_0] \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

Nach Satz 4.1 ist die Aufgabe lösbar, wenn auch nicht eindeutig bestimmt. Die Dimesnion des Lösungsraumes ist gleich 1.

c) $u(0) = 0$ und $u'(\pi/2) = 1$:

Eine Funktion, die die Randbedingungen erfüllt ist durch $z(x) = x$ gegeben. Transformation auf Nullrandbedingungen ergibt:

$$f := g - L[z] = -x \quad \Rightarrow \quad y'' + y = -x \; .$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$y_0(x) = -z(x) = -x \; .$$

$$\det(R_i[y_k]) \;=\; \det\begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(\pi/2) & y_2'(\pi/2) \end{pmatrix} \;=\; \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} R_1[y_1] & R_1[y_2] \\ R_2[y_1] & R_2[y_2] \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} R_1[y_1] & R_1[y_2] & R_1[y_0] \\ R_2[y_1] & R_2[y_2] & R_2[y_0] \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Nach Satz 4.1 ist die Aufgabe unlösbar.

4.3 Selbstadjungierte Randwertprobleme bei linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

In den Anwendungen der mathematischen Physik spielt die selbstadjungierte Form bei Randwertaufgaben eine wichtige Rolle. Am Beispiel linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung wird diese Form diskutiert.

Gegeben sei der lineare Differentialoperator zweiter Ordnung L

$$L[u] := a_2u'' + a_1u' + a_0u \tag{19}$$

mit $a_i \in C^i[a,b]$ und das Skalarprodukt

$$(u, L[v]) := \int_a^b uL[v]\,dx\,. \tag{20}$$

Mit Hilfe partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_a^b uL[v]\,dx &= \int_a^b u(a_2v'' + a_1v' + a_0v)\,dx \\ &= [a_2uv' + a_1uv]_a^b + \int_a^b -(a_2u)'v' - (a_1u)'v + a_0uv\,dx \qquad (21) \\ &= [-(a_2u)'v + a_2uv' + a_1uv]_a^b + \int_a^b ((a_2u)'' - (a_1u)' + a_0u)v\,dx \end{aligned}$$

Man definiert den zu L adjungierten Operator durch

$$L^*[u] := (a_2u)'' - (a_1u)' + a_0u = a_2u'' + (2a_2' - a_1)u' + (a_2'' - a_1' + a_0)u\,.$$

L heißt selbstadjungiert, falls $L = L^*$ gilt. Die Bedingungen dafür ergeben sich aus einem Koeffizientenvergleich der beiden Differentialoperatoren:

$$a_2 = a_2\,, \quad 2a_2' - a_1 = a_1\,, \quad a_2'' - a_1' + a_0 = a_0\,.$$

Notwendig und hinreichend für die Selbstadjungiertheit ist also $a_2' = a_1$. Damit besitzen selbstadjungierte Differentialoperatoren die Darstellung

$$L[u] := a_2u'' + a_1u' + a_0u = a_2u'' + a_2'u' + a_0u = (a_2u')' + a_0u\,.$$

Ein gegebener Differentialoperator $\tilde{L}$ kann durch Multiplikation mit einem Faktor $r = r(x)$ in folgender Weise auf selbstadjungierte Form gebracht werden:

$$\begin{aligned}
& r\tilde{L}[u] = ra_2u'' + ra_1u' + ra_0u \\
\Rightarrow\quad & ra_1 = (ra_2)' = r'a_2 + ra_2' \\
\Rightarrow\quad & r'/r = a_1/a_2 - a_2'/a_2 \\
\Rightarrow\quad & \ln r = \textstyle\int a_1/a_2 dx - \ln a_2 \\
\Rightarrow\quad & r = \exp\,(\textstyle\int a_1/a_2dx)/a_2
\end{aligned}$$

Damit ist $L = r\tilde{L}$ selbstadjungiert und besitzt die Darstellung

$$L[u] = -\left(-\exp\,\left(\int a_1/a_2dx\right)u'\right)' + \left(a_0\exp\,\left(\int a_1/a_2dx\right)/a_2\right)u = -(pu')' + qu$$

mit $\quad p := -ra_2 = -\exp\,(\int a_1/a_2dx) \quad$ und $\quad q := ra_0 = a_0\exp\,(\int a_1/a_2dx)/a_2$.

Beispiel 4.5:

Besselsche Differentialgleichung: $\quad x^2u'' + xu' + (x^2 - \mu)u = 0$

$$\begin{aligned}
r(x) &= \exp\,(\textstyle\int x/x^2dx)/x^2 \\
&= \exp\,(\ln x)/x^2 \\
&= 1/x
\end{aligned}$$

Selbstadjungierte Form: $\quad -(-xu')' + (x - \mu/x)u = 0$

Aus der Rechnung in (21) erhält man für selbstadjungierte Differentialoperatoren, d.h. $L = L^*$ und $a_2' = a_1$

$$\begin{aligned}
(u, L[v]) - (L[u], v) &= \left[-(a_2u)'v + a_2uv' + a_2'uv\right]_a^b \\
&= \left[a_2(uv' - u'v)\right]_a^b \\
&= a_2(b)W(u, v, b) - a_2(a)W(u, v, a) \qquad (22)
\end{aligned}$$

mit der zur Wronskimatrix $\boldsymbol{W}(u,v,x)$ gehörigen Wronskideterminante

$$W(u,v,x) = \det \underbrace{\begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{W}(u,v,x)} .$$

Sind u und v Lösungen der homogenen Differentialgleichungen, d.h. gilt $L[u] = 0$ und $L[v] = 0$, ergibt sich aus (22)

$$a_2(b)W(u,v,b) \quad = \quad a_2(a)W(u,v,a)$$

Die Selbstadjungiertheit läßt sich vom Differentialoperator L erweitern auf Randwertprobleme zweiter Ordnung

Definition 4.1

Das Randwertproblem (18)

$$L[y] \quad = \quad f \quad \text{mit} \quad R_i[y] = 0, \quad i = 1,2\,,$$

heißt selbstadjungiert, wenn

$$L[y] = L^*[y]$$

und

$$(u, L[v]) - (L[u], v) = a_2(b)W(u,v,b) - a_2(a)W(u,v,a) = 0$$

gilt. Dabei sind $u, v \in C^n[a,b]$ zwei Vergleichsfunktionen, die die Randbedingungen erfüllen.

Im Folgenden werden Kriterien für Randbedingungen angegeben, die bei selbstadjungiertem Differentialoperator auf ein selbstadjungiertes Randwertproblem führen. Nachzuweisen ist dabei, dass die Randbedingungen so geartet sind, dass für zwei beliebige Vergleichsfunktionen, die die Randbedingungen erfüllen, folgt

$$a_2(b)W(u,v,b) - a_2(a)W(u,v,a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} a_2(a) \\ -a_2(b) \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} W(u,v,a) \\ W(u,v,b) \end{pmatrix} . \tag{23}$$

Da $a_2(a) \neq 0 \neq a_2(b)$ gilt, ist (23) genau dann erfüllt,

wenn entweder $(W(u,v,a), W(u,v,b)) = \mathbf{0}$

oder $W(u,v,a) \neq 0 \neq W(u,v,b)$ gilt.

Die von den Vergleichsfunktionen u und v erfüllten Randbedingungen lauten:

$$\begin{array}{rrcl}
& R_1[u] & = & \alpha_{10}u(a) + \alpha_{11}u'(a) + \beta_{10}u(b) + \beta_{11}u'(b) = 0 \\
& R_2[u] & = & \alpha_{20}u(a) + \alpha_{21}u'(a) + \beta_{20}u(b) + \beta_{21}u'(b) = 0 \\
& R_1[v] & = & \alpha_{10}v(a) + \alpha_{11}v'(a) + \beta_{10}v(b) + \beta_{11}v'(b) = 0 \\
& R_2[v] & = & \alpha_{20}v(a) + \alpha_{21}v'(a) + \beta_{20}v(b) + \beta_{21}v'(b) = 0 \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & = & \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{10} & \alpha_{11} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{W}(u,v,a)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{10} & \beta_{11} \\ \beta_{20} & \beta_{21} \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} u(b) & v(b) \\ u'(b) & v'(b) \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{W}(u,v,b)} \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \alpha_{10} & \alpha_{11} & \beta_{10} & \beta_{11} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \beta_{20} & \beta_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \\ u(b) & v(b) \\ u'(b) & v'(b) \end{pmatrix} .
\end{array}$$

Erfüllen u und v die Randbedingungen so ergibt sich

$$\begin{array}{rl}
& \det\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}(u,v,a)\right) = \det\left(-\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}(u,v,b)\right) \\
\Rightarrow & (\det \boldsymbol{A})W(u,v,a) = (\det \boldsymbol{B})W(u,v,b) \\
\Rightarrow & \begin{pmatrix} \det \boldsymbol{A} \\ -\det \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} W(u,v,a) \\ W(u,v,b) \end{pmatrix}
\end{array} \tag{24}$$

Zunächst werden zerfallende Randbedingungen untersucht, d.h. homogene Randbedingungen der Form

$$\begin{pmatrix} \alpha_{10} & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{20} & \beta_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y(b) \\ y'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

mit $|\alpha_{10}| + |\alpha_{11}| > 0$ und $|\beta_{20}| + |\beta_{21}| > 0$.

Zerfallende Randbedingungen liegen nun genau dann vor,
wenn $(\det \boldsymbol{A}, -\det \boldsymbol{B}) = \mathbf{0}$ gilt (vgl. Übungsaufgabe 3a)).

Außerdem liegen zerfallende Randbedingungen auch genau dann vor,
wenn $(W(u,v,a), W(u,v,b)) = \mathbf{0}$ gilt (vgl. Übungsaufgabe 3b)).

Da für zerfallende Randbedingungen $(W(u,v,a), W(u,v,b)) = \mathbf{0}$ gilt, ist (23) erfüllt und das Randwertproblem für $L = L^*$ selbstadjungiert.

Beispiel 4.6:

Randbedingungen die auf Selbstadjungiertheit führen sind daher

a) $$\begin{aligned} R_1[y] &= y(a) = 0 \\ R_2[y] &= y(b) = 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y(b) \\ y'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{aligned} R_1[y] &= y'(a) = 0 \\ R_2[y] &= y'(b) = 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y(b) \\ y'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{aligned} R_1[y] &= \alpha_{10} y(a) + \alpha_{11} y'(a) = 0 \\ R_2[y] &= \beta_{20} y(b) + \beta_{21} y'(b) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha_{10} & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{20} & \beta_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y(b) \\ y'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Liegen nicht zerfallende Randbedingungen vor, dann gilt

$$\begin{pmatrix} W(u,v,a) \\ W(u,v,b) \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \neq \begin{pmatrix} \det \boldsymbol{A} \\ -\det \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

Diese müssen dann für die Selbstadjungiertheit, wegen (24) und (23) folgende Parallelitätsbedingung erfüllen

$$\begin{pmatrix} \det \boldsymbol{A} \\ -\det \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} a_2(a) \\ -a_2(b) \end{pmatrix} .$$

Beispiel 4.7:

$$\begin{aligned} R_1[y] &= \alpha_{10} y(a) + \beta_{10} y(b) = 0 \\ R_2[y] &= \beta_{10} a_2(a) y'(a) + \alpha_{10} a_2(b) y'(b) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha_{10} & 0 & \beta_{10} & 0 \\ 0 & \beta_{10} a_2(a) & 0 & \alpha_{10} a_2(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y(b) \\ y'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

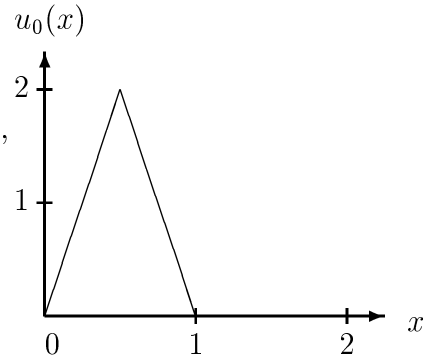
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \det \boldsymbol{A} \\ -\det \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{10}\beta_{10} a_2(a) \\ -\beta_{10}\alpha_{10} a_2(b) \end{pmatrix} = \alpha_{10}\beta_{10} \begin{pmatrix} a_2(a) \\ -a_2(b) \end{pmatrix}$$

4.4 Aufgaben

Aufgabe 4.1:

Man löse die folgende Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe eines Produktansatzes:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \text{ für } \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t \le T\,, \\ u(x,0) &= u_0(x) \text{ für } \quad 0 \le x \le 2\,, \\ u(0,t) &= 0 = u(2,t) \text{ für } \quad 0 \le t \le T\,. \end{aligned}$$



Aufgabe 4.2:

a) Man berechne alle Lösungen des Randwertproblems
$$y'' - y = x \quad \text{mit} \quad y(0) = 0\,,\; y(1) + y'(1) = 2e\,.$$

b) Für das Randwertproblem
$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) + y(b) = 2\,,\; y'(0) + y'(b) = 3$$
bestimme man die $b \in \mathbb{R}$, für die das Problem eine eindeutige Lösung besitzt.

Aufgabe 4.3:

Man bestimme die selbstadjungierte Form der

a) Legendre-Differentialgleichung: $(1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u = 0$,

b) Laguerre-Differentialgleichung: $xu'' + (1-x)u' + nu = 0$.

Aufgabe 4.4:

Man beweise, dass zerfallende Randbedingungen (vgl. (25)) äquivalent sind zu:

a) $(\det \boldsymbol{A}, -\det \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{0}$ bzw.

b) $(W(u,v,a), W(u,v,b)) = \boldsymbol{0}$.

4.5 Lösungen

Lösung 4.1:

Setzt man den Produktansatz $u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$ in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$v(x)w'(t) = v''(x)w(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} =: \lambda\,.$$

Damit ergeben sich die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen in v und w:

$$w' - \lambda w = 0 \quad \text{und} \quad v'' - \lambda v = 0\,.$$

Setzt man den Produktansatz in die Randbedingungen ein, so ergibt sich

$$v(0)w(t) = 0 \quad \text{und} \quad v(2)w(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(0) = 0 \text{ und } v(2) = 0\,.$$

Für v ergibt sich somit die gewöhnliche Randwertaufgabe

$$v'' - \lambda v = 0 \quad \text{mit} \quad v(0) = 0 \text{ und } v(2) = 0\ .$$

Nichttriviale Lösungen ergeben sich nur im Fall $\lambda < 0$. Hier lautet die allgemeine Lösung:

$$v(x) = a \sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + b\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$$

Einsetzen der Randbedingungen ergibt:

$0 = v(0) = b$ und $(a \not\equiv 0)$

$$0 = v(2) = a\sin\left(2\sqrt{-\lambda}\right) \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{-\lambda} = k\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2\ .$$

Man erhält also für $k \in \mathbb{N}$ die Lösungen

$$v_k(x) = a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\ .$$

Mit diesem Ergebnis ergibt sich für die verbleibende Differentialgleichung

$$w' + \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 w = 0\,.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$w(t) = C_k \exp\ \left(-\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 t\right)\ .$$

Damit wird die Differentialgleichung mit Randbedingungen gelöst durch

$$u_k(x,t) = \exp\left(-\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 t\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$$

und die allgemeine Lösung, die noch nicht die Anfangsbedingungen erfüllt, lautet

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2 t}{4}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \; .$$

Aus dem Bild in der Aufgabenstellung ergibt sich die Anfangsvorgabe

$$u_0(x) \;=\; \begin{cases} 4x & \text{für } \; 0 \le x \le \dfrac{1}{2}\,, \\ 4(1-x) & \text{für } \; \dfrac{1}{2} \le x \le 1\,, \\ 0 & \text{für } \; 1 \le x \le 2\,. \end{cases}$$

Einsetzen in die allgemeine Lösung liefert

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} b_k &= \int_0^2 u_0(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\,dx \\ &= \int_0^{1/2} 4x\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\,dx + \int_{1/2}^{1} 4(1-x)\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\,dx \\ &= \frac{32}{k^2\pi^2}\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) - \frac{16}{k^2\pi^2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Lösung 4.2:

a) Die allgemeine Lösung von $y'' - y = x$ lautet

$$y(x) = -x + c_1 e^x + c_2 e^{-x} \, .$$

Eingesetzt in die Randbedingungen ergibt

$0 = y(0) = c_1 + c_2 \;\Rightarrow\; c_2 = -c_1$

$2e = y(1) + y'(1) = -1 + c_1 e + c_2/e - 1 + c_1 e - c_2/e$

$\Rightarrow\; c_1 = (e+1)/2 \;\Rightarrow\; c_2 = -(e+1)/2$

b) Die allgemeine Lösung von $y'' - 3y' + 2y = 0$ lautet

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \, .$$

Eingesetzt in die Randbedingungen ergibt sich

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y(0) + y(b) \\ y'(0) + y'(b) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + c_1 e^b + c_2 e^{2b} \\ c_1 + 2c_2 + c_1 e^b + 2c_2 e^{2b} \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + e^b & 1 + e^{2b} \\ 1 + e^b & 2 + 2e^{2b} \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \, . \end{aligned}$$

Wegen $\det \boldsymbol{A} = (1 + e^b)(1 + e^{2b}) > 0$ für alle $b \in \mathbb{R}$, ist $\boldsymbol{A}$ regulär und damit für alle $b \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar. Man beachte, dass es sich im Fall $b = 0$ um eine Anfangswertaufgabe handelt.

Lösung 4.3:

a) Legendresche Differentialgleichung: $(1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u = 0$

$$\begin{aligned} r(x) &= \exp\left(\int -2x/(1-x^2)dx\right)/(1-x^2) \\ &= (1-x^2)/(1-x^2) \;=\; 1 \end{aligned}$$

Selbstadjungierte Form: $-(-(1-x^2)u')' + n(n+1)u = 0$

b) Laguerresche Differentialgleichung: $xu'' + (1-x)u' + nu = 0$

$$\begin{aligned} r(x) &= \exp\left(\int (1-x)/x dx\right)/x \\ &= \exp\left(\int 1/x - 1 dx\right)/x \\ &= \exp\left(\ln x - x\right)/x \\ &= \exp\left(-x\right) \end{aligned}$$

Selbstadjungierte Form: $-(-xe^{-x}u')' + ne^{-x}u = 0$

Lösung 4.4:

a) Randbedingungen sind zerfallend $\quad\Leftrightarrow\quad (\det \boldsymbol{A}, -\det \boldsymbol{B}) = \mathbf{0}$:

"$\Rightarrow$:" ist klar.

"$\Leftarrow$:" Wegen $\det \boldsymbol{A} = 0$ und $\det \boldsymbol{B} = 0$ folgt nach zwei Gauß-Eliminationsschritten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{10} & \alpha_{11} & \beta_{10} & \beta_{11} & 0 \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \beta_{20} & \beta_{21} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{10} & \alpha_{11} & \beta_{10} & \beta_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{20} & \beta_{21} & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{10} & \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{20} & \beta_{21} & 0 \end{array}\right)$$

b) Randbedingungen sind zerfallend $\quad\Leftrightarrow\quad (W(u,v,a), W(u,v,b)) = \mathbf{0}$:

"$\Rightarrow$:"

$$\begin{pmatrix} u(a) & u'(a) & u(b) & u'(b) \\ v(a) & v'(a) & v(b) & v'(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{10} & 0 \\ \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \beta_{20} \\ 0 & \beta_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u(a) & u'(a) \\ v(a) & v'(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u(b) & u'(b) \\ v(b) & v'(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{20} \\ \beta_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha_{10}, \alpha_{11}) \neq \mathbf{0} \neq (\beta_{20}, \beta_{21}) \quad\Rightarrow\quad (W(u,v,a), W(u,v,b)) = \mathbf{0}$$

"$\Leftarrow$:"

$$\begin{pmatrix} u(a) & u'(a) & u(b) & u'(b) \\ v(a) & v'(a) & v(b) & v'(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{10} & \alpha_{20} \\ \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \beta_{10} & \beta_{20} \\ \beta_{11} & \beta_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit $(W(u,v,a), W(u,v,b)) = \mathbf{0}$ erhält man

$$\begin{pmatrix} u(a) & u'(a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v(b) & v'(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{10} & \alpha_{20} \\ \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \beta_{10} & \beta_{20} \\ \beta_{11} & \beta_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \alpha_{20} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \alpha_{20} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix}$$

Entsprechend gilt $\begin{pmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{11} \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} \beta_{20} \\ \beta_{21} \end{pmatrix}$ und die Randbedingungen sind zerfallend.

4.6 Literatur

W.Luther, K.Niederdrenk, F.Reutter und H.Iserentant,
Gewöhnliche Differentialgleichungen,
Vieweg (1987)