9 Finite Elementmethode bei gewöhnlichen Randwertproblemen

Gegeben sei der lineare Differentialoperator zweiter Ordnung L, von dem wir nach Kapitel 4 ohne Einschränkung annehmen können, dass er in selbstadjungierter Form vorliegt:

$$L[u] := -(pu')' + qu \, ,$$

wobei $p \in C^1[a,b]$, $q \in C[a,b]$, $p(x) > 0$ und $q(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ angenommen wird.

9.1 Variationelle Formulierung

In diesem Abschnitt soll das folgende selbstadjungierte Zweipunkt-Randwertproblem in seiner klassischen Differentialgleichungsformulierung

$$\begin{aligned} -(pu')' + qu &= f \, , & \qquad (26) \\ u(a) &= 0 \, , \qquad (D) & \\ u(b) &= 0 & \end{aligned}$$

in ein Variationsproblem und in ein Minimierungsproblem umgeschrieben werden.

Dazu werden benötigt das Skalarprodukt

$$(v, w) \;:=\; \int_a^b v(x) w(x) dx$$

und der lineare Raum

$$V \;:=\; \{ v \in C[a,b] \mid v' \text{ stückweise stetig und beschränkt}, \; v(a) = 0, \; v(b) = 0 \} \, .$$

Die variationelle Formulierung ergibt sich aus (D) durch multiplizieren von (26) mit einer sogenannten Testfunktion $v \in V$, integrieren über das Intervall $[a,b]$ und anschließender partieller Integration, wobei man beachte, dass $v(a) = 0$ und $v(b) = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)v(x)dx &= \int_a^b (-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x))v(x)dx \\
&= \int_a^b p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)dx - p(b)u'(b)v(b) + p(a)u'(a)v(a) \\
&= \int_a^b p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)dx\,.
\end{aligned}$$

Variationsproblem

Mit der Bilinearform

$$a(u,v) \;:=\; \int_a^b p(x)u'(x)v(x)' + q(x)u(x)v(x)\,dx$$

ergibt sich damit das (D) zugeordnete Variationsproblem:

$$\text{Gesucht ist } u \in V \text{ mit} \quad a(u,v) \;=\; (f,v) \quad \text{für alle} \quad v \in V\,. \qquad (V)$$

Aus der Konstruktion ergibt sich sofort, dass Lösungen u von (D) auch Lösungen von (V) sind, in Kurzform notiert als

$$(D) \quad \Rightarrow \quad (V)\,.$$

Der umgekehrte Fall gilt nur, falls $u \in C^2[a,b] \cap C_0[a,b]$ gilt. Zum Beweis wird das Fundamentallemma der Variationsrechnung benötigt (vgl. Aufgabe 9.1).

Minimierungsproblem

Definiert man das Funktional $F : V \to \mathbb{R}$ durch

$$F(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - (f,v) = \int_a^b \frac{1}{2}\left(p(x)u'(x)v(x)' + q(x)u(x)v(x)\right) - f(x)v(x)dx,$$

so wird das (D) zugeordnete Minimierungsproblem definiert durch:

$$\text{Gesucht ist } u \in V \text{ mit} \quad F(u) \leq F(v) \quad \text{für alle} \quad v \in V\,. \qquad (M)$$

Satz 9.1: Es gilt: $u \in V$ ist Lösung von (V) ist genau dann, wenn es Lösung von(M) ist, in Kurzform notiert als

$$(V) \quad \Leftrightarrow \quad (M)\,.$$

Beweis:

"$\Rightarrow$": Nehmen wir zunächst an, dass $u \in V$ Lösung von (V) ist:

Sei $v \in V$ beliebig. Wir setzen $w := v - u \in V$, damit ergibt sich

$$\begin{aligned} F(v) &= F(u+w) = \frac{1}{2}a(u+w,u+w) - (f,u+w) \\ &= \frac{1}{2}a(u,u) - (f,u) + \frac{1}{2}(a(u,w) + a(w,u)) - (f,w) + \frac{1}{2}a(w,w) \\ &= F(u) + a(u,w) - (f,w) + \frac{1}{2}a(w,w) \\ &= F(u) + \frac{1}{2}a(w,w) \\ &\geq F(u) \end{aligned}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ symmetrisch und aufgrund der Vorzeichenbedingung von p und q nicht negativ ist, d.h. es gilt $a(w,w) \geq 0$ für $w \in V$.

"$\Leftarrow$": Sei nun $u \in V$ Lösung von (M):

Für beliebiges $v \in V$ und $\epsilon \in \mathbb{R}$ gilt wegen $u + \epsilon v \in V$

$$F(u) \leq F(u + \epsilon v)\ .$$

Damit besitzt die in ϵ quadratische Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &:= F(u + \epsilon v) \\ &= \frac{\epsilon^2}{2}a(v,v) + \epsilon(a(u,v) - (f,v)) + \frac{1}{2}a(u,u) - (f,u) \end{aligned}$$

in $\epsilon = 0$ ein Minimum. Die notwendige Bedingung dafür lautet
$0 = g'(0) = a(u,v) - (f,v)$, d.h. u löst (V). □

Satz 9.2: Die Lösung von (V) ist eindeutig.

Beweis:

Angenommen es gäbe zwei Lösungen $u_1, u_2 \in V$ von (V), d.h. es gilt

$$\begin{aligned} a(u_1,v) &= (f,v) \quad \text{und} \\ a(u_2,v) &= (f,v) \quad \text{für alle} \quad v \in V\ . \end{aligned}$$

Nach Subtraktion der beiden Gleichungen und für $v := u_1 - u_2 \in V$ erhält man

$$0 = a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = \int_a^b p(x)(u_1'(x) - u_2'(x))^2 + q(x)(u_1(x) - u_2(x))^2\,dx\ .$$

Aufgrund der Annahmen $p(x) > 0$ und $q(x) \geq 0$ gilt

$$u_1'(x) - u_2'(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in [a,b] \, .$$

Aufgrund der Stetigkeit von $u_1 - u_2$ folgt $u_1(x) - u_2(x) = const.$ und wegen der Randbedingungen $u_1(a) = u_2(a) = 0$ erhält man $u_1(x) - u_2(x) = 0$, d.h.

$$u_1(x) = u_2(x) \quad \text{für alle} \quad x \in [a,b] \, . \qquad \square$$

Euler-Lagrange-Gleichung

Hinreichend häufige Differenzierbarkeit vorausgesetzt, stellt sich die notwendige Bedingung $(V) \Leftrightarrow (D)$ des Minimierungsproblems (M) als Spezialfall des folgenden Minimierungsproblems dar:

Mit zweimal stetig differenzierbarem $g : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und dem Funktional $I : C^2[a,b] \cap C_0[a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$I(v) := \int_a^b g(x, v, v') dx \, ,$$

lässt sich das folgende Minimierungsproblem formulieren:

Gesucht ist $u \in C^2[a,b] \cap C_0[a,b]$ mit

$$I(u) \leq I(v) \quad \text{für alle} \quad v \in C^2[a,b] \cap C_0[a,b] \, . \qquad (\tilde{M})$$

Löst u das Minimierungsproblem $(\tilde{M})$, dann ist u notwendigerweise Lösung des Randwertproblems mit der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial v'} g(x, v(x), v'(x))\right) + \frac{\partial}{\partial v} g(x, v(x), v'(x)) &= 0 \\ v(a) \; = \; 0 \; = \; v(b) & \qquad . \end{aligned}$$

Im obigen Fall (M) ist g durch

$$g(x, v(x), v'(x)) \;=\; \frac{1}{2}\left(p(x)v'(x)^2 + q(x)v(x)^2\right) - f(x)v(x) \qquad (27)$$

gegeben und die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung ist identisch mit (D).

Natürliche Randbedingungen

Das Randwertproblem (D) und damit auch die Probleme (V) und (M) schreiben die sogenannten wesentlichen Randbedingungen oder Zwangsrandbedingungen $u(a) = 0$ und $u(b) = 0$ vor.

Wird im Minimierungsproblem $(\tilde{M})$ nur $u, v \in C^2[a,b]$ verlangt, entfallen also die Zwangsrandbedingungen, so kommen zur Euler-Lagrangeschen Differentialgleichung noch die sogenannten natürlichen Randbedingungen hinzu. Löst u nun das entsprechende Minimierungsproblem, so muss u notwendig das folgende Randwertproblem lösen:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial v'}\, g(x, v(x), v'(x))\right) + \frac{\partial}{\partial v}\, g(x, v(x), v'(x)) &= 0\,. \\ \frac{\partial}{\partial v'}\, g(x, v(x), v'(x))\Big|_{x=a} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial v'}\, g(x, v(x), v'(x))\Big|_{x=b} &= 0\,. \end{aligned}$$

Die natürlichen Randbedingungen für (27) lauten damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v'}\, g(x, v(x), v'(x))\Big|_{x=a} &= p(a)v'(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad v'(a) = 0\,, \\ \frac{\partial}{\partial v'}\, g(x, v(x), v'(x))\Big|_{x=b} &= p(b)v'(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad v'(b) = 0\,. \end{aligned}$$

9.2 Finite Elementmethode mit stückweise linearen Funktionen

Die finite Elementmethode approximiert die Lösung der obigen Probleme (V) bzw. (M) über einen endlichdimensionalen Teilraum $V_h \subset V$.

Um den endlichdimensionalen Teilraumes V_h zu konstruieren, wird das Intervall $[a,b]$ durch $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ in Teilintervalle $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ mit $j = 1, \cdots, n$ zerlegt. Die x_j werden dabei als Knoten bezeichnet. Die Feinheit der Unterteilung wird durch $h = \max\limits_{j=1,\cdots,n} h_j$ gemessen, wobei $h_j = x_j - x_{j-1}$ die Länge des Teilintervalls I_j angibt. Damit wird der Teilraum definiert durch:

$$V_h \;:=\; \{v \in C_0[a,b] \mid v \text{ ist linear auf } I_j\,,\ j = 1, \cdots, n\} \;\subset\; V\,.$$

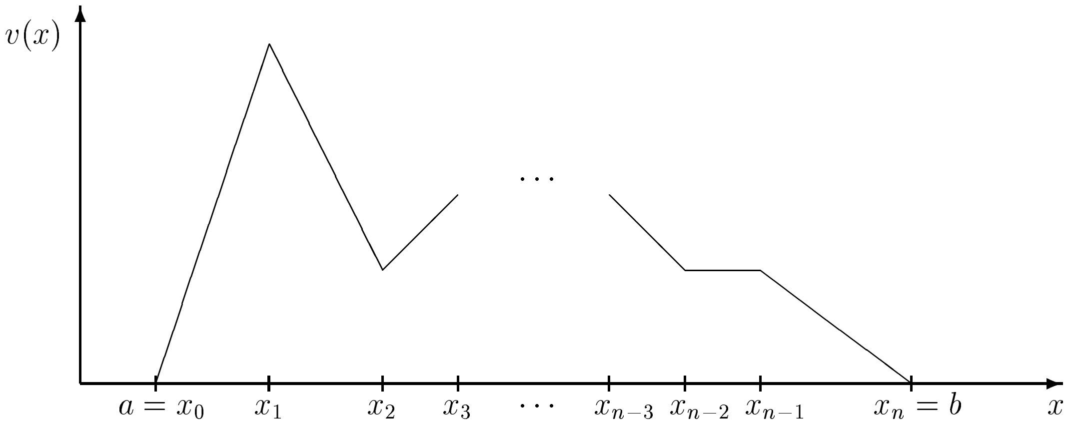

Bild 9.1: Beispiel einer stetigen und stückweise linearen Funktion $v \in V_h$

Da $v \in V_h$ durch die Funktionswerte in den Knoten $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ eindeutig beschrieben wird, können die Funktionen $\varphi_j \in V_h$, $j = 1, \ldots n-1$ mit

$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls}\, i = j \\ 0 & \text{falls}\, i \neq j \end{cases}$$

als Basis von V_h verwendet werden. Eine beliebige Funktion $v \in V_h$ mit $v(x_i) = v_i$ besitzt mit dieser Basis die Darstellung

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \varphi_i(x) \quad \text{mit} \quad x \in [a,b]\,.$$

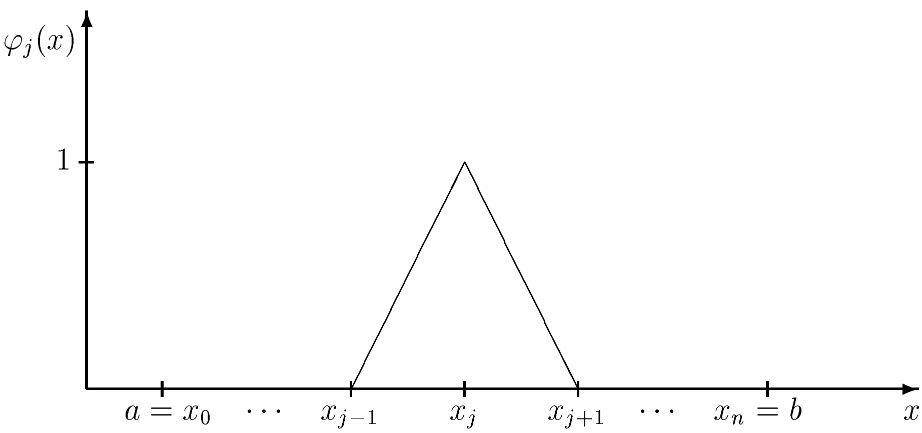

Bild 9.2: Beispiel einer Basisfunktion $\varphi_j \in V_h$

Die Wahl einer so gearteten Basis ist typisch für die finite Elementmethode. Die Basiselemente φ_j zeichnen sich dadurch aus, dass sie nur auf wenigen (zusammenhängenden) Teilintervallen I_j, den sogenannten Elementen, von Null verschieden sind. Dies hat zur Folge, dass die meisten Produkte $\varphi_j \cdot \varphi_i$ identisch Null sind und damit die Systemmatrix zur Berechnung der Näherungslösung dünn besetzt ist.

Die finite Elementmethode besteht nun darin das Variationsproblem (V) bzw. Minimierungsproblem (M) auf dem endlichdimensionalen Teilraum V_h zu lösen.

Galerkin-Verfahren

Das Variationsproblem auf V_h lautet

$$\text{Gesucht ist } u_h \in V_h \text{ mit } \quad a(u_h, v) \;=\; (f, v) \quad \text{für alle} \quad v \in V_h\,. \tag{V_h}$$

(V_h) ist genau dann erfüllt, wenn gilt

$$a(u_h, \varphi_j) \;=\; (f, \varphi_j) \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n-1\,. \tag{28}$$

Besitzt die Lösung u_h von (V_h) die Basisdarstellung

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \varphi_i(x)\,,$$

so ist (28) identisch mit folgendem linearen $(n-1)\times(n-1)$ Gleichungssystem in $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})^T$

$$\boldsymbol{A\xi} \;=\; \boldsymbol{b}\,, \tag{29}$$

mit dem Lastvektor $\boldsymbol{b} = ((f, \varphi_1), \ldots, (f, \varphi_{n-1}))^T$ und der Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{A} = (a(\varphi_i, \varphi_j))_{i,j=1,\ldots,n-1}$. Die Bezeichnungen von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{b}$ gehen auf Anwendungen in der Strukturmechanik zurück, in denen die finite Elementmethode ihren Ursprung besitzt.

Ritz-Verfahren

Über das Funktional $F : V_h \to \mathbb{R}$ mit

$$F(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - (f,v) = \int_a^b \frac{1}{2}\left(p(x)u'(x)v(x)' + q(x)u(x)v(x)\right) - f(x)v(x)dx,$$

wird das (V_h) zugeordnete Minimierungsproblem definiert durch:

$$\text{Gesucht ist } u_h \in V_h \text{ mit } \quad F(u_h) \le F(v) \quad \text{für alle} \quad v \in V_h\,. \tag{M_h}$$

Besitzt die Lösung u_h von (M_h), wie im Galerkin-Verfahren, die Basisdarstellung

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \varphi_i(x) \,,$$

so ist (M_h) identisch mit der Minimierung folgenden quadratischen Funktionals in $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})^T$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\xi} \quad = \quad \min! \,, \tag{30}$$

mit dem Lastvektor und der Steifigkeitsmatrix aus dem Galerkin-Verfahren.

Notwendige Bedingung, dafür, dass ein Minimum vorliegt, ist (29).

Die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{A}$ ist symmetrisch, wegen der Symmetrie von $a(\cdot,\cdot)$, und positiv definit, denn mit $u_h \in V_h$ gilt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} \quad &= \quad \sum_{i,j=1}^{n-1} \xi_i a(\varphi_i, \varphi_j)\xi_j = a\left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i\varphi_i, \sum_{i=1}^{n-1} \xi_j\varphi_j\right) \\ &= \quad a(u_h, u_h) = \int_a^b p(x)(u_h'(x))^2 + q(x)u_h^2(x)\, dx \geq 0 \,. \end{aligned} \tag{31}$$

Da $p \in C^1[a,b]$, $q \in C[a,b]$, $p(x) > 0$ und $q(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ angenommen wurde, kann $a(u_h, u_h) = 0$ nur für $u_h'(x) \equiv 0$ gelten. Mit den Randbedingungen $u_h(a) = 0 = u_h(b)$ erhält man $u_h(x) \equiv 0$, d.h. $\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} = 0$ gilt genau für $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$.

Mit der positiven Definitheit von $\boldsymbol{A}$ und (29) ist für (30) auch das hinreichende Minimalitätskriterium für u_h erfüllt und das Gleichunssystem (29) ist eindeutig lösbar.

Aufgrund der Definition der Basisfunktionen φ_i erhält man

$$a(\varphi_i, \varphi_j) \begin{cases} \neq 0 & \text{für} \quad |i-j| \leq 1 \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

d.h. die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{A}$ besitzt Tridiagonalform.

Zusammenfassend kann die finite Elementmethode als Verfahren zur Bestimmung einer Näherungslösung von (D) über die Ersatzprobleme (V_h) bzw. (M_h) beschrieben werden. Dabei wird die Näherungslösung über Lösen des linearen Gleichunssystems (29) mit symmetrischer, positiv definiter und dünn besetzter Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ berechnet.

Geometrische Interpretation und Fehlerabschätzung

Durch die Bilinearform

$$a(u,v) \;=\; \int_a^b p(x)u'(x)v(x)' + q(x)u(x)v(x)\,dx$$

wird ein Skalarprodukt auf V_h definiert, denn es gilt für $u, v, w \in V_h$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a(u,v) &= a(v,u) \\ a(\lambda u + \mu v, w) &= \lambda a(u,w) + \mu a(v,w) \\ a(u,u) &\geq 0 \\ a(u,u) &= 0 \;\Leftrightarrow\; u \equiv 0\,. \end{aligned}$$

Die letzten beiden Bedingungen ergeben sich aus (31) bzw. der anschließenden Bemerkung.

Die dem Skalarprodukt zugeordnete Norm für $v \in V_h$ wird definiert durch

$$||v||_a \;:=\; \sqrt{a(v,v)}\,.$$

Damit gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|a(u,v)| \;\leq\; ||u||_a ||v||_a\,.$$

Man kann sogar zeigen, dass die Norm $||\cdot||_a$ zur im Sobolev-Raum $H_0^1(a,b)$ definierten Norm

$$||v||_1 \;:=\; \int_a^b (v'(x))^2 + v^2(x)dx$$

äquivalent ist (vgl. Aufgabe 9.3). Damit wird die positive Definitheit der Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ sogar auf $H_0^1(a,b)$ gewährleistet und $a(\cdot,\cdot)$ wird zum Skalarprodukt auf $H_0^1(a,b)$ $(\supset V \supset V_h)$.

Satz 9.3: Sei u die Lösung von (V) und u_h die (Näherungs-) Lösung von (V_h), dann gilt für alle $v \in V_h$

a)
$$a(u - u_h, v) \;=\; 0\,, \tag{32}$$

b)
$$||u-u_h||_a^2 + ||u_h||_a^2 \;=\; ||u||_a^2\,, \tag{33}$$

c)
$$||u-u_h||_a \;\leq\; ||u-v||_a\,. \tag{34}$$

Beweis:

a) Es gilt

$$a(u,v) = (f,v) \quad \text{und} \quad a(u_h,v) = (f,v) \quad \text{für alle} \quad v \in V_h\ (\subset V\ ) .$$

Durch Differenzbildung erhält man:

$$a(u-u_h,v) = 0 \quad \text{für alle} \quad v \in V_h .$$

b) Unter Verwendung von (32) ergibt sich:

$$\begin{aligned} ||u-u_h||_a^2 + ||u_h||_a^2 &= a(u-u_h,u-u_h) + a(u_h,u_h) \\ &= a(u-u_h,u) - a(u-u_h,u_h) + a(u_h,u_h) \\ &= a(u,u) - a(u_h,u) + a(u_h,u_h) \\ &= a(u,u) = ||u||_a^2 . \end{aligned}$$

c) Da (34) für $||u-u_h||_a = 0$ gilt, bleibt nur der Fall $||u-u_h||_a \neq 0$ nachzuweisen.

Sei $w := u_h - v\ (\in V_h)$, dann gilt

$$\begin{aligned} ||u-u_h||_a^2 &= a(u-u_h,u-u_h) + a(u-u_h,w) \\ &= a(u-u_h,u-u_h+w) \\ &= a(u-u_h,u-v) \\ &\leq ||u-u_h||_a ||u-v||_a . \end{aligned}$$

Nach Division erhält man (34). □

Bemerkungen:

Gleichung (32)-(34) können folgendermaßen geometrisch interpretiert werden:

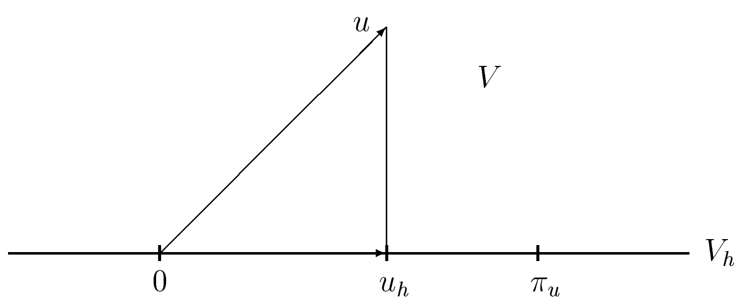

Bild 9.3: Approximation von u durch u_h

Der Fehler $u - u_h$ steht nach (32) senkrecht auf V_h bezüglich des Skalarproduktes $a(\cdot,\cdot)$, d.h. die finite Elementlösung u_h kann als Projektion der exakten Lösung u auf den Teilraum V_h von V aufgefasst werden.

Gleichung (33) beschreibt den Satz des Pythagoras, bzgl. der durch das Skalarprodukt $a(\cdot,\cdot)$ definierten Norm $||\cdot||_a$. Für die Bilinearform a erhält man daher auch

$$a(u_h, u_h) \;=\; ||u_h||_a^2 \;\le\; ||u||_a^2 \;=\; a(u,u)\,.$$

Schließlich besagt (34), dass u_h diejenige Funktion aus V_h ist, die der Lösung u bzgl. des durch $||\cdot||_a$ gemessenen Abstandes am nächsten liegt, d.h. die beste Approximation von u ist.

Abschätzung (34) kann zur quantitativen Abschätzung des Fehlers der Näherungslösung u_h genutzt werden. Die Idee besteht darin ein geeignetes $v \in V_h$ zu finden, bzgl. dessen man den Fehler berechnen kann. Wählt man den linearen Spline π_u, der die Funktionswerte von u in den Knoten x_i interpoliert, so kann der Fehler über den Interpolationsfehler $f_\pi(h)$ abgeschätzt werden.

Satz 9.4: Ist u zweimal stetig differenzierbar, so gilt für den, bzgl. der äquidistanten Knoten $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ interpolierenden linearen Spline π_u mit $h = (b-a)/n$

$$\max_{x\in[a,b]} |u(x) - \pi_u(x)| \;\le\; \frac{h^2}{8} \max_{x\in[a,b]} |u''(x)| \quad \text{und} \tag{35}$$

$$\max_{x\in[a,b]} |u'(x) - \pi_u'(x)| \;\le\; h \max_{x\in[a,b]} |u''(x)|\,. \tag{36}$$

Beweis: (vgl. Aufgabe 9.4)

Satz 9.5: Für den Fehler der finite Elementlösung u_h mit linearen Elementen gilt für zweimal stetig differenzierbares u

$$||u - u_h||_a^2 \;=\; a(u-u_h, u-u_h) \;\le\; Ch^2 \max_{x\in[a,b]} |u''(x)|^2\,. \tag{37}$$

Beweis:

Unter Verwendung von (34) - (36) erhält man

$$\begin{aligned}
a(u-u_h, u-u_h) &\leq a(u-\pi_u, u-\pi_u) \\
&= \int_a^b p(x)(u'(x)-\pi_u'(x))^2 + q(x)(u(x)-\pi_u(x))^2 \, dx \\
&\leq \max_{x\in[a,b]} |p(x)(u'(x)-\pi_u'(x))^2 + q(x)(u(x)-\pi_u(x))^2| \int_a^b dx \\
&\leq (b-a)\left(\max_{x\in[a,b]}|p(x)| + \frac{h^2}{64}\max_{x\in[a,b]}|q(x)|\right) h^2 \max_{x\in[a,b]}|u''(x)|^2 \\
&\leq Ch^2 \max_{x\in[a,b]}|u''(x)|^2 \qquad \square
\end{aligned}$$

9.3 Aufgaben

Aufgabe 9.1:

Man beweise das

Fundamentallemma der Variationsrechnung

Ist $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und gilt

$$\int_a^b h(x)v(x)\,dx \;=\; 0$$

für alle $v \in C_0[a, b]$, dann gilt $h(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.

Aufgabe 9.2:

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -u'' &= 2 \quad \text{für} \quad x \in]1, 2[\quad \text{mit} \\ u(1) &= 0 \;=\; u(2)\,. \end{aligned}$$

a) Man berechne die Lösung der Randwertaufgabe.

b) Man zerlege das Intervall $[1, 2]$ in n äquidistante Teilintervalle und berechne damit die finite Elementlösung auf dem Raum der stetigen und stückweise linearen Funktion V_h für $n = 5$.

Aufgabe 9.3:

Man zeige, dass auf $H_0^1(a, b)$ die folgenden Normen äquivalent sind, d.h. dass mit $c > 0$ und $C > 0$

$$c||v||_1 \;\leq\; ||v||_a \;\leq\; C||v||_1$$

gilt, mit

$$\begin{aligned} ||v||_1 \;&:=\; \left(\int_a^b (v'(x))^2 + v^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ ||v||_a \;&:=\; \left(\int_a^b p(x)\,(v'(x))^2 + q(x)v^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \;, \end{aligned}$$

wobei $p \in C^1[a,b]$, $q \in C[a,b]$, $p(x) > 0$ und $q(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ angenommen wird.

Hinweis: Man zeige und verwende dabei die folgende Ungleichung

$$\int_a^b v^2(x)dx \leq (b-a)^2 \int_a^b \left(v'(x)\right)^2 dx \,.$$

Aufgabe 9.4:

Man beweise:

Ist u zweimal stetig differenzierbar, so gilt für den, bzgl. der äquidistant verteilten Knoten $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, interpolierenden linearen Spline π_u mit $h = (b-a)/n$

$$\max_{x\in[a,b]} |u(x) - \pi_u(x)| \;\leq\; \frac{h^2}{8} \max_{x\in[a,b]} |u''(x)| \quad \text{und}$$

$$\max_{x\in[a,b]} |u'(x) - \pi_u'(x)| \;\leq\; h \max_{x\in[a,b]} |u''(x)| \,.$$

9.4 Lösungen

Lösung 9.1:

Beweis:

Angenommen es gibt ein $x_0 \in [a,b]$ mit $h(x_0) \neq 0$, dann gibt es wegen der Stetigkeit von h ein Intervall $x_0 \in [\alpha,\beta] \subset [a,b]$ mit $\alpha < \beta$, auf dem h das gleiche Vorzeichen besitzt. Da

$$\int\limits_a^b h(x)v(x)\,dx \;=\; 0$$

für alle $v \in C_0[a,b]$ gelten soll, erhält man für das spezielle $\tilde{h} \in C_0[a,b]$ mit

$$\tilde{v}(x) \;:=\; \begin{cases} \operatorname{sign}(h(x_0))\dfrac{x-\alpha}{x_0-\alpha} & \text{für } \alpha \le x \le x_0 \\ \operatorname{sign}(h(x_0))\dfrac{\beta-x}{\beta-x_0} & \text{für } x_0 < x \le \beta \\ 0 & \text{für } x \in [a,b]\backslash[\alpha,\beta] \end{cases}$$

$$\int\limits_a^b h(x)\tilde{v}(x)\,dx \;=\; \int\limits_\alpha^\beta h(x)\tilde{v}(x)\,dx \;>\; 0\,,$$

da $h(x)\tilde{v}(x) > 0$ für alle $x \in (\alpha,\beta)$. Die Annahme: Es gibt ein $x_0 \in [a,b]$ mit $h(x_0) \neq 0$ war also falsch.

Lösung 9.2:

a) Die Lösung kann hier durch zweimaliges Hochintegrieren und anschließendes Anpassen an die Randbedingungen berechnet werden:

$$\begin{aligned} -u'' &= 2 \quad \Rightarrow \quad u(x) = -x^2 + ax + b \\ 0 &= u(1) = -1 + a + b \quad \Rightarrow \quad b = 1 - a \\ 0 &= u(2) = -4 + 2a + b = a - 3 \quad \Rightarrow \quad a = 3 \quad \Rightarrow \quad b = -2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = -x^2 + 3x - 2 = (1-x)(x-2)$$

b) Hier gilt $[a,b] = [1,2]$. Für die Zerlegung des Intervalls erhält man

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}\,, \quad x_j = 1 + jh\,, \quad j = 0, 1, \cdots, n\,.$$

Die Basisfunktionen besitzen die Darstellung

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} N_{1,j}(x) := \dfrac{x - x_j}{x_j - x_{j-1}} = \dfrac{x - x_j}{h} & \text{für } x_{j-1} \le x \le x_j \\ N_{2,j+1}(x) := -\dfrac{x - x_{j+1}}{x_{j+1} - x_j} = -\dfrac{x - x_{j+1}}{h} & \text{für } x_j \le x \le x_{j+1} \end{cases}$$

mit der Ableitung

$$\varphi_j'(x) = \begin{cases} N_{1,j}'(x) = \dfrac{1}{h} & \text{für } x_{j-1} \le x \le x_j \\ N_{2,j+1}'(x) = -\dfrac{1}{h} & \text{für } x_j \le x \le x_{j+1}\,. \end{cases}$$

Für die $(n-1) \times (n-1)$ Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{A} = (a(\varphi_i, \varphi_j))_{i,j=1,\ldots,n-1}$ sind nur die von Null verschiedenen Elemente zu berechnen:

$$\begin{aligned} a(\varphi_j, \varphi_j) &= \int_1^2 \left(\varphi_j'(x)\right)^2 dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(N_{1,j}'(x)\right)^2 dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(N_{2,j+1}'(x)\right)^2 dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h^2}\, dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{h^2}\, dx = \frac{2}{h} \\ a(\varphi_j, \varphi_{j+1}) &= \int_1^2 \varphi_j'(x)\varphi_{j+1}'(x) dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_{2,j+1}'(x) N_{1,j+1}'(x) dx \\ &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} -\frac{1}{h^2}\, dx = -\frac{1}{h} = a(\varphi_{j+1}, \varphi_j)\,. \end{aligned}$$

Die Komponenten des Lastvektors $\boldsymbol{b} = ((f,\varphi_1),\ldots,(f,\varphi_{n-1}))^T$ berechnen sich folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
(f,\varphi_j) &= \int_1^2 2\varphi_j(x)dx \;=\; \int_{x_{j-1}}^{x_j} 2N_{1,j}(x)dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} 2N_{2,j+1}(x)dx \\
&= \frac{2}{h}\left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} x - x_{j-1}\,dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} x_{j+1} - x\,dx\right) \\
&= \frac{2}{h}\left(\int_0^h \xi\,d\xi + \int_0^h h-\xi\,d\xi\right) \;=\; \frac{2}{h}\left(\frac{h^2}{2}+\frac{h^2}{2}\right) \;=\; 2h
\end{aligned}
$$

Die Näherungslösung aus der finite Elementmethode ergibt sich damit aus der Lösung des folgenden Gleichungssystems

$$
\begin{pmatrix}
2 & -1 & & & \\
-1 & 2 & -1 & & \\
 & -1 & 2 & -1 & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & -1 & 2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ \\ \vdots \\ \\ x_{n-1} \end{pmatrix}
= 2h^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Für $n = 5$ und $h = 1/5$ ergibt sich

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & & & 2h^2 \\
-1 & 2 & -1 & & 2h^2 \\
 & -1 & 2 & -1 & 2h^2 \\
 & & -1 & 2 & 2h^2
\end{array}\right)
\to
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & & & 2h^2 \\
 & 3/2 & -1 & & 3h^2 \\
 & & 4/3 & -1 & 4h^2 \\
 & & & 5/4 & 5h^2
\end{array}\right)
\Rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}
$$

Wertet man die Lösung u an den Knoten x_j aus, so erhält man

$$
\left(u(1), u\left(\frac{6}{5}\right), u\left(\frac{7}{5}\right), u\left(\frac{8}{5}\right), u\left(\frac{9}{5}\right), u(2)\right) = \left(0, \frac{4}{25}, \frac{6}{25}, \frac{6}{25}, \frac{4}{25}, 0\right).
$$

Bei dieser speziellen Aufgabe stimmt also die finite Elementlösung u_h mit dem die Funktionswerte von u in den Punkten x_j interpolierenden linearen Spline π_u überein.

Lösung 9.3:

Zum Beweis der Poincaré Ungleichung $\displaystyle\int_a^b v^2(x)dx \le (b-a)^2 \int_a^b \left(v'(x)\right)^2 dx$:

Wegen der Randbedingung $v(a) = 0$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für $a \le \xi \le b$

$$v(\xi) \;=\; \int_a^\xi v'(x)dx\,.$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung ergibt:

$$|v(\xi)|^2 \;\le\; \int_a^\xi 1^2 dx \int_a^\xi (v'(x))^2 dx \;\le\; (b-a)\int_a^b (v'(x))^2 dx\,.$$

Integration über ξ ergibt die Poincaré Ungleichung

$$\int_a^b v^2(\xi)\,d\xi \;\le\; (b-a)\int_a^b \left(\int_a^b (v'(x))^2 dx\right) d\xi \;=\; (b-a)^2 \int_a^b (v'(x))^2 dx\,.$$

Zum Beweis von $\quad ||v||_a \;\le\; C||v||_1$:

$$\begin{aligned} ||v||_a^2 \;&=\; \int_a^b p(x)\left(v'(x)\right)^2 + q(x)v^2(x)dx \\ &\le\; \underbrace{\max_{x\in[a,b]}\{p(x), q(x)\}}_{=:C^2} \int_a^b \left(v'(x)\right)^2 + v^2(x)dx \;=\; C^2||v||_1^2\,. \end{aligned}$$

Zum Beweis von $c||v||_1 \;\le\; ||v||_a$ wird die Poincaré Ungleichung benötigt, da $q \equiv 0$ möglich ist:

$$\begin{aligned} ||v||_a^2 \;&=\; \int_a^b p(x)\left(v'(x)\right)^2 + q(x)v^2(x)dx \;\ge\; \min_{x\in[a,b]} p(x) \int_a^b \left(v'(x)\right)^2 dx \\ &\ge\; \frac{1}{2}\min_{x\in[a,b]} p(x) \left(\int_a^b \left(v'(x)\right)^2 dx + \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b v^2(x)dx\right) \\ &\ge\; \underbrace{\frac{1}{2}\min_{x\in[a,b]} p(x) \min\left\{1, \frac{1}{(b-a)^2}\right\}}_{=:c^2} \int_a^b \left(v'(x)\right)^2 + v^2(x)dx \;=\; c^2||v||_1^2\,. \end{aligned}$$

Lösung 9.4:

Der Fehler im Intervall $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ werde mit $\epsilon_j(x) := u(x) - \pi_u(x)$ bezeichnet.

Aufgrund der Interpolationseigenschaft gilt $\epsilon_j(x_{j-1}) = 0 = \epsilon_j(x_j)$. Daher existiert nach dem Satz von Rolle ein $\xi_j \in I_j$ mit $\epsilon_j'(\xi_j) = 0$.

Nach dem Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung gilt für $x \in I_j$ wegen $\epsilon_j'' = u''$

$$|\epsilon_j'(x)| = \left| \int_{\xi_j}^{x} \epsilon_j''(\tau)\, d\tau \right| = \left| \int_{\xi_j}^{x} u''(\tau)\, d\tau \right| \leq h \max_{\tau \in I_j} |u''(\tau)|$$

Damit ergibt sich für $x \in [a, b]$

$$\max_{x \in [a,b]} |u'(x) - \pi_u'(x)| = \max_{j=1,n} |\epsilon_j'(x)| \leq \max_{j=1,n} \left(h \max_{\tau \in I_j} |u''(\tau)| \right) = h \max_{x \in [a,b]} |u''(x)| \, .$$

Für ein Maximum von $|\epsilon_j(x)|$, das wegen der Interpolationseigenschaft im Punkt ξ_j mit $x_{j-1} < \xi_j < x_j$ angenommen werde, gilt $\epsilon_j'(\xi_j) = 0$. Ohne Einschränkung kann angenommen werden, dass ξ_j näher an x_j liegt, d.h. es gilt $x_j - \xi_j \leq h/2$. Durch Taylorreihenentwicklung von ϵ_j um ξ_j erhält man

$$0 = \epsilon_j(x_j) = \epsilon_j(\xi_j) + \epsilon_j'(\xi_j)(x_j - \xi_j) + \frac{\epsilon_j''(\tau_j)}{2}(x_j - \xi_j)^2$$

mit $\xi_j < \tau_j < x_j$. Wegen $\epsilon_j'(\xi_j) = 0$ und $\epsilon_j'' = u''$ gilt

$$\max_{x \in I_j} |u(x) - \pi_u(x)| = |\epsilon_j(\xi_j)| = \left| \frac{\epsilon_j''(\tau_j)}{2}(x_j - \xi_j)^2 \right| \leq \frac{h^2}{8} \max_{\tau \in I_j} |u''(\tau)| \, .$$

Für das gesamte Intervall $[a, b]$ ergibt sich damit

$$\max_{x \in [a,b]} |u(x) - \pi_u(x)| \quad \leq \quad \frac{h^2}{8} \max_{x \in [a,b]} |u''(x)| \, .$$

9.5 Literatur

C.Johnson,
Numerical solution of partial differential equations by the finite element method,
Cambridge University Press (1994), 5.printing

H.R.Schwarz
Methode der finiten Elemente,
Teubner (1991), 3.Auflage

G.Strang und G.Fix,
An analysis of the finite element method,
Prentice-Hall (1973)