Take-Home-Exam 2
Funktionalanalysis (SS 2021)

(Vincentas Mulevičius, Ingo Runkel)

Anweisungen zur Bearbeitung:

- Sie können **3 der 4 Aufgaben** auswählen.
- Schreiben Sie auf die erste Seite Ihrer Lösungen Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und welche 3 Aufgaben gewertet werden sollen. **Wenn Sie nicht angeben, welche Aufgaben gewertet werden sollen, ist Ihre Abgabe ungültig.**
- Sie dürfen alle Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungszetteln verwenden (aber nicht Aussagen, die Sie darüber hinaus in Büchern finden, diese müssen Sie dann auch beweisen). **Schreiben Sie in Ihrer Lösung, welchen Aussage/Aufgabe Sie verwenden (mit Nummer).**

  Wenn Sie eine Warum?-Frage oder eine Aussage aus der Vorlesung zeigen sollen, dürfen Sie natürlich keine Ergebnisse verwenden, die darauf aufbauen.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben **alleine** und tauschen sich nicht über die Lösungen aus. Die Lösungen müssen **von Hand aufgeschrieben** werden (per Tablett oder anschließend eingescannt werden).
- Sie können Zwischenergebnisse aus Aufgabenteilen für darauffolgende Aufgaben benutzen, auch wenn Sie diese nicht gezeigt haben.

Aufgabe 1 – Einzelne Fragen

6P 1. Folgen in l_1 sind insbesondere beschränkt, also $l_1 \subset l_\infty$. Was ist der Abschluss von l_1 in l_∞ (bzlg. $\|\cdot\|_{\sup}$)? (Begründen Sie Ihre Antwort kurz.)

7P 2. In der Bemerkung nach Def. 16.2.9 wird behauptet, dass $A^\perp$ abgeschlossen ist. Zeigen Sie dies.

4P 3. Der Satz von Baire (Satz 16.3.1) gilt i.A. nicht, wenn man die Forderung „U_n offen" weglässt. Geben Sie ein explizites Gegenbeispiel. (Begründen Sie Ihre Antwort kurz.)

7P 4. Seien X, Y normierte Räume und $T : X \to Y$ linear (stetig wird nicht vorausgesetzt). In der Bemerkung nach Def. 19.2.1 wird behauptet: Angenommen, T ist kompakt (im Sinne von Def. 19.2.1). Dann ist für alle beschränkten $M \subset X$ das Bild $T(M)$ relativ kompakt. Zeigen Sie dies.

Aufgabe 2 – Kompakte Unterräume

Sei $0 < \alpha \leq 1$. Für eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ setze

$$L_\alpha(f) := \sup\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \,\middle|\, x, y \in [0,1], x \neq y \right\}$$

und

$$C^{0,\alpha}[0,1] := \{\, f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid L_\alpha(f) < \infty \,\} \,.$$

Dann ist $C^{0,\alpha}[0,1]$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und $\|f\|_{C^{0,\alpha}} := \|f\|_{\sup} + L_\alpha(f)$ definiert eine Norm auf $C^{0,\alpha}[0,1]$ (das brauchen Sie nicht zeigen).

6P 1. Zeigen Sie, dass $C^{0,\alpha}[0,1] \subset C[0,1]$.

9P 2. Sei $M \subset C^{0,\alpha}[0,1]$ eine beschränkte Teilmenge (bezüglich $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}}$). Zeigen Sie, dass M als Teilmenge von $(C[0,1], \|\cdot\|_{\sup})$ relativ kompakt ist.

   Hinweis: Satz von Arzelà-Ascoli.

9P 3. Auf $C^1[0,1]$ (einmal stetig differenzierbare Funktionen) betrachte die Norm $\|f\|_1 = \|f\|_{\sup} + \|f'\|_{\sup}$. Sei $M \subset C^1[0,1]$ beschränkt bezüglich $\|\cdot\|_1$. Zeigen Sie, dass M als Teilmenge von $(C[0,1], \|\cdot\|_{\sup})$ relativ kompakt ist.

   Hinweis: Führen Sie dies auf den Fall $\alpha = 1$ zurück.

Aufgabe 3 – Projektionen und direkte Summen

Sei X ein Banachraum.

15P 1. Sei $P : X \to X$ linear, sodass $P^2 = P$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) P ist beschränkt

   (b) $\ker(P)$ und $\operatorname{ran}(P)$ sind abgeschlossen.

   Hinweise: Für (a)⇒(b): Um zu zeigen, dass $\operatorname{ran}(P)$ abgeschlossen ist, kann man $id-P$ betrachten.

   Für (b)⇒(a): Zeigen Sie die Bedingung des Satzes vom abgeschlossenen Graphen in der Form von Lemma 16.5.2. In der Notation aus dem Lemma: Warum ist $y \in \operatorname{ran}(P)$? Warum gilt $Py = y$? Warum ist $x_n - P(x_n) \in \ker(P)$?

9P 2. Angenommen, es gibt abgeschlossene Unterräume $A, B \subset X$, sodass $A \oplus_i B = X$ (innere direkte Summe). Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus $A \oplus B \to X$ gibt (äußere direkte Summe mit der Norm $\|(a, b)\| = \|a\| + \|b\|$).

Aufgabe 4 – Schwache Konvergenz in Hilberträumen

Sei X ein Hilbertraum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X.

4P 1. Zeigen Sie, dass $\sigma\text{-}\lim x_n = x$ genau dann, wenn für alle $y \in X$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$.

6P 2. Angenommen, $\sigma\text{-}\lim x_n = x$. Zeigen Sie, dass $\|x\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|$.

   Hinweis: Betrachten Sie $\langle x_n, x\rangle$.

7P 3. Sei $x \in X$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) $\sigma\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$

   (b) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

   Hinweis: Eine Richtung ist trivial. Teil 2 brauchen Sie in Teilaufgabe 3 (und 4) nicht.

7P 4. Sei $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Orthogonalsystem und $s_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) $\sigma\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$

   (b) $\lim_{n\to\infty} s_n = s$

   Hinweis: Wenn man die Extra-Bedingung in 3 (a) zeigt, folgt Teil 4 aus Teil 3.