Analysis-Klausur (SS 2010)

Name	
Vorname	
Matrikelnr.	

Anweisungen:

- Hilfsmittel: Für die Bearbeitung sind **nur Stift und Papier** erlaubt. Benutzen Sie einen permanenten Stift (Kugelschreiber o.ä., keinen Bleistift). Es sind **keine Mobiltelefone** erlaubt. Mobiltelefonklingeln wird als Täuschungsversuch gewertet.
- Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf **jedes Blatt**, das Sie abgeben, und heften Sie vor der Abgabe alle Blätter und die Klausuraufgaben mit einem Tacker zusammen.
- Die Klausur besteht aus 2 Teilen, **Teil A** und **Teil B**. Für jeden Teil gibt es 50 Punkte.
  - Die Aufgaben aus Teil A geben insgesamt 50 Punkte. **Bearbeiten Sie alle Aufgaben aus Teil A**.
  - Teil B besteht aus 3 Aufgaben zu je 25 Punkten. **Es werden maximal 50 Punkte aus Teil B gewertet**.

Für die Korrektur:

Teil A	A1	A2	A3	A4	Gesamt
Punkte					

Teil B	B1	B2	B3	Gesamt
Punkte				

Teil A

A1 : Ankreuzfragen – Verständnis (24 P)

Kreuzen Sie jeweils **alle richtigen** Antworten an. Es können mehrere Antworten pro Frage richtig sein. Es gibt Punkte für richtig angekreuzte Kästchen und Punktabzug sonst. Für jede der sechs Teilaufgaben gibt es mindestens Null Punkte.

1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ kann man um 0 in eine Potenzreihe entwickeln.

   ☐ wahr ☐ falsch

2. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ linear, so ist f differenzierbar.

   ☐ wahr ☐ falsch

3. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton, so ist f

   ☐ injektiv. ☐ stetig.

4. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar (mit $a < b$), so ist f auf $[a, b]$

   ☐ stetig. ☐ integrierbar.

5. Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Bezüglich der Euklidischen Metrik ist die Menge $\{x\} \subset \mathbb{R}^n$

   ☐ offen. ☐ beschränkt.

   ☐ kompakt. ☐ abgeschlossen.

6. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so

   ☐ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ☐ konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

In den Aufgaben A2, A3, A4 brauchen Sie Ihre Antworten nicht zu begründen.

A2 : Konvergenz von Folgen (12 P)

Geben Sie an, ob die unten stehenden Folgen konvergieren, und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

1. $\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

2. $\left(\dfrac{2n^5+n^2+20n+1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

3. $\left(\dfrac{n^2}{n+1}-\dfrac{n^2}{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

4. $\left(n^2\cdot e^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

A3 : Potenzreihen (5 P)

1. Es sei $\alpha\in\mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n n x^n$ in Abhängigkeit von α.
2. Bestimmen Sie den Wert der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n$ in $x=\frac{1}{4}$.

A4 : Integrale (9 P)

Berechnen Sie den Wert der folgenden (eigentlichen oder uneigentlichen) Integrale.

1. $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

Teil B

- Sie können alle Sätze aus der Vorlesung verwenden. Ergebnisse der Übungsaufgaben dürfen Sie natürlich nur dann verwenden, wenn Sie diese nicht gerade zeigen sollen.
- Sie können Aussagen von Teilaufgaben für nachfolgende Aufgabenteile verwenden, auch wenn Sie diese nicht gezeigt haben.
- Fangen Sie für jede der Aufgaben B1, B2, B3 ein **neues Blatt** an.

B1 – Integration

Sei $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.

1. Beweisen Sie, dass dann ein $x \in [a, b]$ existiert, so dass
$$\int_a^b f\,dt = f(x)(b-a)$$
gilt.
Hinweis: Was können Sie über die Extrema der Funktion $[a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)(b-a)$ aussagen?
2. Beweisen Sie, dass $f = 0$ genau dann, wenn $\int_a^b f(x)^2 dx = 0$.
Bemerkung: Diese Aufgabe ist unabhängig von Teil 1.

B2 – Differentiale

1. Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (e^x y, x^2 + y)$.
   (a) Berechnen Sie die Matrix $[dg(x, y)]$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) Geben Sie alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ an, für die $dg(x, y)$ invertierbar ist.
   (c) Sei U eine offene Umgebung von $(0, 2)$, so dass g auf U invertierbar ist. Sei $V = g(U)$ und $h : V \to U$ die lokale Umkehrfunktion von g. Sei $(a, b) = g(0, 2)$. Berechnen Sie $[dh(a, b)]$.
2. Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Es gebe ein $L > 0$, so dass
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^2 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^m.$$
   (a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und geben Sie $df(x)$ an.
   (b) Zeigen Sie, dass f konstant ist.

   Bemerkung: Diese Aufgabe ist unabhängig von Teil 1.

B3 – Gleichmäßige Konvergenz

1. Sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge, $g_n : I \to \mathbb{R}$ mit $I \subset \mathbb{R}$, und sei $g : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Geben Sie die Definition der Aussage "$(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf I gleichmäßig gegen g".

Betrachten Sie nun die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2} \ .$$

2. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für $x \geq 0$.

3. Sei $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $h(y) = y/(1 + y^2)$. Zeigen Sie, dass h auf $[0, 1]$ monoton steigend ist, auf $[1, \infty[$ monoton fallend ist, und im Punkt $y = 1$ ein Maximum besitzt.

4. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ nicht gleichmäßig konvergiert.

   Hinweis: Es gilt $f_n(x) = h(nx)$. Was ist der maximale Wert von $f_n(x)$ für $x \geq 0$?

5. Sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[a, \infty[$ gleichmäßig konvergiert.