Analysis 1

Wintersemester 2019/20

Ingo Runkel
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

(Stand: 28. Januar 2020)

Webseite

www.math.uni-hamburg.de/home/runkel/ws19-ana.html

Bücher

- Rudin, Analysis (Oldenbourg, 4. Auflage)
- Königsberger, Analysis 1 (Springer)
- Forster, Analysis 1 (Vieweg)

und für Mutige

- Dieudonné, Foundations of modern analysis (Academic press)

Denken

Bitte denken Sie beim Durchlesen dieser Notizen mit und sagen mir Bescheid, wenn Sie Fehler finden.

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen, etc

Voraussetzungen

Natürliche Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ und $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Ganze Zahlen

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$

Rationale Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n$ ganze Zahlen und $n \neq 0\}$

Aussagenlogik

$\neg$	nicht
$\wedge$	und
$\vee$	oder
$A \Rightarrow B$	aus A folgt B.
$A \Leftrightarrow B$	A ist äquivalent zu B.
$\forall x \in M : \dots$	Für alle x in der Menge M gilt, dass …
$\exists x \in M : \dots$	Es existiert ein x in der Menge M, sodass …
$\exists! x \in M : \dots$	Es existiert genau ein x in der Menge M, sodass …

Z.B. wird die Aussage "Für jede ganze Zahl x gibt es genau eine ganze Zahl y, sodass $x = 2y$ oder $x = 2y + 1$" geschrieben als

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \exists! y \in \mathbb{Z} : x = 2y \vee x = 2y + 1 \ .$$

1.1 Operationen auf Mengen

Der Mengenbegriff

■ Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterscheidbaren Objekten.

Nebenbemerkung zur Information: (Solche Bemerkungen gibt es ab und zu in der Vorlesung. Sie sind nicht prüfungsrelevant und können ohne Probleme ignoriert werden. Sie werden in der Vorlesung oder den Übungen nicht weiter benutzt. Sie sind aber hoffentlich ab und zu interessant.)
Mengen werden in der Mathematik durch die axiomatische Mengenlehre nach

Zermelo-Fraenkel eingeführt. Aber da die Mengen, die hier in der Analysis vorkommen, mehr oder weniger direkt aus den natürlichen Zahlen konstruiert werden, brauchen wir das nicht. Mehr z.B. auf der Webseite der Vorlesung oder in Devlin, The Joy of Sets (Springer).

Ist ein Objekt x in einer Menge M enthalten, schreiben wir

„x ist ein Element von M“ . In Symbolen: $x \in M$.

Gilt das Gegenteil, so sagen wir

„x ist kein Element von M“ . In Symbolen: $x \notin M$.

■ Die *leere Menge* $\emptyset$ enthält keine Elemente: $x \in \emptyset$ is immer falsch, $x \notin \emptyset$ ist immer wahr.

■ Eine Menge U ist eine *Teilmenge* oder *Untermenge* einer Menge M, wenn gilt

$$x \in U \;\Rightarrow\; x \in M \;.$$

Wir schreiben $U \subset M$. Zwei Mengen U, V sind *gleich* (schreibe $U = V$), genau dann wenn $U \subset V$ und $V \subset U$. Sind U, V nicht gleich, schreiben wir $U \neq V$.

■ Die leere Menge $\emptyset$ ist Teilmenge einer jeden Menge M, da

$$x \in \emptyset \;\Rightarrow\; x \in M \;.$$

(Warum gilt diese wenn-dann Beziehung?) ?

Beispiel 1.1.1. (1) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sind Mengen.
(2) $M = \{1, 5, \frac{1}{3}\}$ ist eine Menge. Es gilt $M \subset \mathbb{Q}$, aber nicht $M \subset \mathbb{Z}$.
(3) $\{1, 1, 5, 5, 5, 3\} = \{3, 5, 1\}$.
(4) $\emptyset$ hat keine Elemente, $\{\emptyset\}$ hat ein Element, nämlich die leere Menge. Also: $\emptyset \in \emptyset$ ist falsch, aber $\emptyset \in \{\emptyset\}$ ist wahr.
(5) Setze $M = \{1, \{1\}, 5, \{5, 5\}, 3\}$. Dann $M \neq \{3, 5, 1\}$. (Gilt $M \subset \mathbb{Z}$?) ?
(6) Wochentage, Buchstaben im Alphabet, ...

■ Die *Potenzmenge* $P(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M.

Beispiel 1.1.2. (1) $P(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Hat M n Elemente, so hat $P(M)$ 2^n Elemente. (Warum?) ?
(2) $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, und in der Tat gilt $2^0 = 1$ und $2^1 = 2$.

Vereinigung, Schnitt, Differenz

■ Schreibe $A := X$ für "A ist definiert als X". $\{x|P(x)\}$ heisst "Die Menge aller x, für die die Aussage $P(x)$ wahr ist". $\{x \in M|P(x)\}$ heisst "Die Menge aller x aus M, für die die Aussage $P(x)$ wahr ist". Es ist gleichbedeutend mit $\{x|x \in M \wedge P(x)\}$.
- Schnitt: $A \cap B := \{x|x \in A \wedge x \in B\}$
- Vereinigung : $A \cup B := \{x|x \in A \vee x \in B\}$.
- Differenz: $A \setminus B := \{x|x \in A \wedge x \notin B\}$
- Komplement von A in M: Sei $A \subset M$. Dann $\complement_M A := M \setminus A$.

■ Für Mengen X, Y, Z gilt z.B.

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \ ,$$

Denn

$$\begin{aligned}
&a \in X \cap (Y \cup Z) \\
\Leftrightarrow\ & a \in X \wedge a \in Y \cup Z \\
\Leftrightarrow\ & a \in X \wedge (a \in Y \vee a \in Z) \\
\Leftrightarrow\ & (a \in X \wedge a \in Y) \vee (a \in X \wedge a \in Z) \\
\Leftrightarrow\ & a \in X \cap Y \vee a \in X \cap Z \\
\Leftrightarrow\ & a \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \ .
\end{aligned}$$

(Aus welcher der Notationen und Definitionen oben ergeben sich jeweils diese Äquivalenzen?) ?

Kartesisches Produkt

■ Es seien X, Y Mengen und $x \in X$, $y \in Y$. Schreibe (x, y) für das *geordnete Paar von x und y*, d.h. es gilt

$$(x, y) = (x', y') \ \Leftrightarrow \ x = x' \wedge y = y' \ .$$

Insbesondere $(x, y) = (y, x)$ genau dann, wenn $x = y$.
■ Das *kartesisches Produkt* $X \times Y$ von zwei Mengen X, Y ist die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$, in Formeln

$$X \times Y := \{(x, y)|x \in X \wedge y \in Y\} \ .$$

Beispiel 1.1.3. (1) $\{4, 5\} = \{5, 4\}$ aber $(4, 5) \neq (5, 4)$.
(2) $\{\heartsuit, \diamondsuit\} \times \{7, 8, 9\} = \{(\heartsuit, 7), (\heartsuit, 8), (\heartsuit, 9), (\diamondsuit, 7), (\diamondsuit, 8), (\diamondsuit, 9)\}$.

■ Es gilt z.B. (Warum?) ?

$$(X \times Y) \cup (X' \times Y) = (X \cup X') \times Y \ .$$

1.2 Funktionen

■ Wir wollen jedem Element aus einer Menge X ein Element aus einer Menge Y zuordnen, z.B.
- einer natürlichen Zahl n ihren Nachfolger $n+1$,
- einem Datum im Jahr 2019 den Wochentag,
- einer natürlichen Zahl n die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$,
- der Zahl 1 die Zahl 3, der Zahl 2 die Zahl 2, ...

■ Seien X, Y Mengen. Eine *Funktion* (oder auch *Abbildung*) ist eine Vorschrift f, die jedem Element aus der Menge X ein Element aus der Menge Y zuordnet. Wir schreiben

$$f : X \to Y \quad \text{oder} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

X heisst *Definitionsbereich* , und Y heißt *Wertebereich* oder *Bildbereich* von f. Falls f dem Element x das Element y zuordnet, schreiben wir

$$y = f(x) \quad \text{oder} \quad f : x \mapsto y \ .$$

Beispiel 1.2.1. (1) $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}$, $f(x, y) = \frac{x}{y}$.
(2) Als Wertetabelle: Sei $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{\heartsuit, \diamondsuit\}$ und $f : X \to Y$ definiert durch

$$f = \begin{array}{c|c|c|c} \heartsuit & & \bullet & \\ \hline \diamondsuit & \bullet & & \bullet \\ \hline & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

(3) Sei X eine nicht-leere Menge. Die *Identitätsfunktion* $\mathrm{id}_X : X \to X$ ist definiert als $\mathrm{id}_X(x) = x$.
(4) Eine Funktion in die Potenzmenge: $S : \mathbb{Q} \to P(\mathbb{Q})$, $x \mapsto \{q \in \mathbb{Q} | q^2 < x\}$.

■ Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$ and $g : Y \to Z$ Funktionen. Die *Verkettung von g und f* ist die Funktion $g \circ f : X \to Z$, $x \mapsto g(f(x))$. Wir sagen auch „g nach f“.

Beispiel 1.2.2. (1) Sei $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{\heartsuit, \diamondsuit\}$, $Z = \{4, 5\}$ und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ mit

$$f = \begin{array}{c|c|c|c} \heartsuit & & \bullet & \\ \hline \diamondsuit & \bullet & & \bullet \\ \hline & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \text{und} \quad g = \begin{array}{c|c|c} 5 & \bullet & \\ \hline 4 & & \bullet \\ \hline & \diamondsuit & \heartsuit \end{array} \quad \text{ergibt} \quad g \circ f = \begin{array}{c|c|c|c} 5 & \bullet & & \bullet \\ \hline 4 & & \bullet & \\ \hline & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

(2) $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$, $g(x) = x + 1$ ergibt

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2x + 1 \quad \text{und} \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2x + 2 \ .$$

Definition 1.2.3. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion.
(i) Eine Funktion $g : Y \to X$ heisst *Inverses zu f* oder *Umkehrfunktion von f* genau dann, wenn gilt $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.
(ii) f heißt
- *bijektiv*, oder *umkehrbar*, oder *invertierbar*, falls zu f ein Inverses existiert.
- *injektiv*, falls für $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$ gilt, dass $f(x) \neq f(y)$.
- *surjektiv*, falls es für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$.

Beispiel 1.2.4. Die Funktion $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ gegeben durch $s(x) = x+1$ hat ein Inverses, nämlich $s^{-1}(x) = x - 1$.
Die Funktion $d : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $d(x) = 2x$ hat kein Inverses: Angenommen, es gibt ein $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $d \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. Dann gilt $d(g(1)) = 1$, also $2g(1) = 1$. Das ist unmöglich, denn es gibt keine ganze Zahl z für die gilt $2z = 1$.
Aber es gibt eine Funktion $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $g \circ d = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. (Welche? Gibt es mehr als eine?) ?
(Ist f aus Beispiel 1.2.1 bijektiv? injektiv? surjektiv? Sind s, d von oben injektiv? surjektiv?) ?

■ In Aussagenlogik kann man injektiv und surjektiv wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} \ &\Leftrightarrow\ \forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \ , \\ f \text{ surjektiv} \ &\Leftrightarrow\ \forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y \end{aligned}$$

Eine Funktion ist genau dann bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist. (Warum? Was ist in der Implikation $\Leftarrow$ dann die Umkehrfunktion?) ?

■ Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Der *Graph von f* ist die Teilmenge $\mathrm{Graph}(f) \subset X \times Y$, die durch

$$\mathrm{Graph}(f) \ = \ \{(x, y) \,|\, x \in X, y \in Y \text{ mit } y = f(x)\} \ = \ \{(x, f(x)) \,|\, x \in X\}$$

gegeben ist.

Beispiel 1.2.5. (1) In Beispiel 1.2.2 (1) sind f, g und $g \circ f$ durch ihre Graphen beschrieben.
(2) Die übliche Weise, Funktionen f von den reellen Zahlen in die reellen Zahlen darzustellen, zeigt einen Teil des Graphen von f. Z.B. $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$:

[Bild in der Vorlesung]

(3) Sei $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{3, 4\}$. Die Teilmengen von $X \times Y$, die durch

$y = 4$	•	•	
$y = 3$	•		•
	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

oder

$y = 4$		•	
$y = 3$			•
	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

gegeben sind, können nicht Graphen von Funktionen $X \to Y$ sein. (Warum?) ?
(4) Schreibe $[0,1]$ für das Intervall $\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$. Hier sind Beispiele für Graphen von Funktionen $f : [0,1] \to [0,1]$, die injektiv, surjektiv, bijektiv sind:

[Bild in Vorlesung]

Seien X, Y Mengen. Wir bezeichnen die Menge aller Funktionen von X nach Y mit

$$\mathrm{Fun}(X, Y) \ .$$

Z.B. gibt es 8 Funktionen von $X = \{1,2,3\}$ nach $Y = \{0,1\}$ (Welche?), also hat in diesem Fall $\mathrm{Fun}(X,Y)$ acht Elemente. ?

Nebenbemerkung zur Information: Im axiomatischen Aufbau der Mathematik aus der Mengenlehre heraus, muss man jeden Begriff auf Mengen zurückführen. Das hätten wir eigentlich schon für geordnete Paare machen sollen (siehe z.B. „ordered pair“ auf Wikipedia). Für Funktionen geben wir die mengentheoretische Definition in dieser Bemerkung.
Wir dürfen dann nicht einfach sagen „Eine Funktion ist eine Vorschrift f, die jedem Element aus der Menge X ein Element aus der Menge Y zuordnet.“ weil der Begriff „Vorschrift“ nicht definiert ist. Die mengentheoretische Definition ist genau umgekehrt zur Darstellung oben und fängt mit dem Graphen einer Funktion an:

> Seien X, Y Mengen. Eine *Funktion* (oder auch *Abbildung*) f *von* X *nach* Y ist eine Teilmenge $f \subset X \times Y$, sodass es für alle $x \in X$ genau ein $y \in Y$ gibt, für das $(x, y) \in f$.

Nun kann man für die Aussage $(x, y) \in f$ die Schreibweise $y = f(x)$ festlegen. Jetzt kann man auch zwei Sonderfälle untersuche, die wir oben unterschlagen habe: Was ist, wenn X oder Y die leere Menge sind?
Angenommen $X = \emptyset$. Dann auch $X \times Y = \emptyset$. Die Teilmenge $f = \emptyset$ erfüllt die Definition (da $x \in X$ immer falsch ist). Also gibt es eine (eindeutige) Funktion $\emptyset \to Y$.
Angenommen, $X \neq \emptyset$ aber $Y = \emptyset$. Dann wieder $X \times Y = \emptyset$ und die einzige Teilmenge ist $f = \emptyset$. Aber dieses f erfüllt *nicht* die Definition: da X nicht leer ist, gibt es $x \in X$, aber es gibt kein $y \in Y$. Somit gibt es *keine* Funktion $X \to \emptyset$.

2 Die reellen Zahlen

2.1 Geordnete Körper

Definition 2.1.1. Ein *Körper* ist eine Menge K mit Abbildungen $+ : K \times K \to K$ und $\cdot : K \times K \to K$ mit den Eigenschaften (A1)–(A4), (M1)–(M4) und (D) unten. (Für $x, y \in K$ schreiben wir $x + y$ statt $+(x, y)$ und $x \cdot y$ oder nur xy statt $\cdot(x, y)$.)

Axiome der Addition: Für alle $x, y, z \in K$ gilt

(A1) Kommutativität: $x + y = y + x$

(A2) Assoziativität: $(x + y) + z = x + (y + z)$

(A3) Neutrales Element: Es gibt $0 \in K$, sodass $0 + x = x$.

(A4) Inverse: Es gibt $-x \in K$, sodass $x + (-x) = 0$.

Axiome der Multiplikation: Für alle $x, y, z \in K$ gilt

(M1) Kommutativität: $xy = yx$

(M2) Assoziativität: $(xy)z = x(yz)$

(M3) Neutrales Element: Es gibt $1 \in K$, $1 \neq 0$, sodass $1x = x$.

(M4) Inverse: Wenn $x \neq 0$, gibt es $x^{-1} \in K$, sodass $xx^{-1} = 1$.

Distributivgesetz: Für alle $x, y, z \in K$ gilt

(D) $x(y + z) = xy + xz$.

(Warum fordern wir in Axiom (D) nicht auch, dass $(x + y)z = xz + yz$ gilt?) ?

Beispiel 2.1.2.

(1) (Rechnen modulo 2) $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit 0: neutrales Element der Addition, und 1: neutrales Element der Multiplikation, und mit $1 + 1 = 0$. $\mathbb{F}_2$ ist ein Körper.
(Rechnen modulo 3 ergibt auch einen Körper, rechnen modulo 4 nicht. Was geht schief?) ?

(2) $\mathbb{Q}$ ist ein Körper.

(3) $\mathbb{Z}$ ist kein Körper. $\mathbb{Q}_{\geq 0} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 0\}$ ist kein Körper. (Welche der Axiome oben gelten in diesen Beispielen noch? Welche nicht mehr?) ?

Satz 2.1.3. Sei K ein Körper und $x, y, z \in K$. Es gilt

(i) $x + z = y + z \;\Leftrightarrow\; x = y$.

(ii) Für $z \neq 0$, $xz = yz \;\Leftrightarrow\; x = y$.

(iii) $0 \cdot x = 0$.

Beweis. Allgemein: Ist $f : X \to Y$ eine Funktion zwischen zwei Mengen X, Y, und sind $x, x' \in X$, dann $x = x' \Rightarrow f(x) = f(x')$.
Wir zeigen in Teil (i), dass aus $x + z = y + z$ folgt, dass $x = y$. Betrachte die Funktion $f : K \to K$ gegeben durch $f(k) = k + (-z)$. Dann

$$
\begin{aligned}
&x + z = y + z \overset{\text{Vorbemerkung}}{\Rightarrow} f(x + z) = f(y + z) \\
&\overset{\text{Def. von } f}{\Rightarrow} (x + z) + (-z) = (y + z) + (-z) \\
&\overset{\text{(A2)}}{\Rightarrow} x + (z + (-z)) = y + (z + (-z)) \overset{\text{(A4)}}{\Rightarrow} x + 0 = y + 0 \overset{\text{(A3)}}{\Rightarrow} x = y \; .
\end{aligned}
$$

Die andere Richtung von (i) geht so ähnlich. Und Teil (ii) ist analog zu Teil (i). Teil (iii) folgt aus $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$, da dann nach (i) $0x = 0$. (Details zu (ii)? Was passiert, wenn man die Bedingung $z \neq 0$ weglässt?) □ ?

■ Statt $x + (-y)$ schreiben wir auch $x - y$.

Definition 2.1.4. Ein *geordneter Körper* ist ein Körper K zusammen mit einer Teilmenge $\mathcal{P}$ von K (die *positiven Zahlen*), sodass für alle $x, y \in \mathcal{P}$ gilt

(i) $x + y \in \mathcal{P}$ (abgeschlossen bzgl. Addition)

(ii) $xy \in \mathcal{P}$ (abgeschlossen bzgl. Multiplikation)

(iii) Es ist genau eine der Aussagen $x \in \mathcal{P}$, $x = 0$, oder $-x \in \mathcal{P}$ wahr.

■ Sei $x \in K$.
- Falls $x \in \mathcal{P}$, so sagen wir x ist *positiv* und schreiben $x > 0$.
- Falls $-x \in \mathcal{P}$, so sagen wir x ist *negativ* und schreiben $x < 0$.

Beispiel 2.1.5.

(1) $\mathbb{Q}$ mit Standard-Ordnung $\mathcal{P} = \mathbb{Q}_{>0} = \{\text{positive rationale Zahlen}\}$ ist ein geordneter Körper.
(Gibt es für $\mathbb{Q}$ noch eine andere mögliche Wahl für $\mathcal{P}$ oder ist das die Einzige? (Hinweis: Satz 2.1.6 sagt z.B. $x > 0 \Rightarrow 1/x > 0$.)) ?

(2) $\mathbb{Q}$ mit $\mathcal{P} = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q > 1\}$ ist kein geordneter Körper. (Warum?) ?

(3) Für $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ gibt es keine Wahl von $\mathcal{P}$, sodass $\mathbb{F}_2$ ein geordneter Körper wird. (Warum?) ?

■ Mehr Notation: Seien $x, y \in K$.
- Falls $x - y > 0$, so schreiben wir $x > y$.
- Und falls $x - y < 0$ schreiben wir $x < y$.
- Die Schreibweise $x \geq y$ bedeutet, dass entweder $x > y$ oder $x = y$. Genauso für $x \leq y$.

Satz 2.1.6. Sei K ein geordneter Körper und $x, y, z \in K$.

(i) $x > y \;\Rightarrow\; x + z > y + z$.

(ii) Falls $x > y$ und $y > z$, so gilt auch $x > z$.

(iii) Falls $x > 0$, so gilt $y < z \;\Rightarrow\; xy < xz$.

(iv) Falls $x < 0$, so gilt $y < z \;\Rightarrow\; xy > xz$.

(v) Wenn $x \neq 0$, dann $x^2 > 0$.

(vi) Wenn $0 < x < y$, dann $0 < 1/y < 1/x$.

Beweis. (i)

$$x > y \overset{\text{Notation}}{\Rightarrow} x - y > 0 \overset{\text{Körperaxiome}}{\Rightarrow} (x+z) - (y+z) > 0 \overset{\text{Notation}}{\Rightarrow} x + z > y + z \ .$$

(Welche einzenen Schritte werden genau bei der Implikation „Körperaxiome“ ausgeführt?) ?

(ii) So ähnlich. (Details?) ?

(iii)

$$\begin{aligned} y < z &\overset{\text{Notation}}{\Rightarrow} z - y > 0 \overset{\text{Def. (ii)}}{\Rightarrow} x(z-y) > 0 \overset{\text{Körperaxiome}}{\Rightarrow} xz - xy > 0 \\ &\overset{\text{Notation}}{\Rightarrow} xz > xy \ . \end{aligned}$$

(iv) So ähnlich.

(v) Es gilt entweder $x > 0$ oder $x < 0$. Für $x > 0$ folgt $x^2 > 0$ aus Definition 2.1.4 (ii), und für $x < 0$ haben wir $-x > 0 \Rightarrow (-x)(-x) > 0 \Rightarrow x^2 > 0$. (Wie sieht man $(-1)(-1) = 1$ aus den Körperaxiomen?) ?

(vi) $x^{-1}x^{-1} > 0$ nach (v). Also nach (iii) $0 < x \Rightarrow 0 < xx^{-1}x^{-1} = x^{-1}$. Genauso $0 < y^{-1}$. Damit $x^{-1}y^{-1} > 0$ und wieder nach (iii) $x < y \Rightarrow xx^{-1}y^{-1} < yx^{-1}y^{-1} \Rightarrow y^{-1} < x^{-1}$. □

Korollar 2.1.7. In einem geordneten Körper gilt $1 > 0$.

Beweis. Folgt aus $1 = 1^2$ und Teil (v) des vorherigen Satzes. $\square$

Nebenbemerkung zur Information: Jeder geordnete Körper K enthält automatisch $\mathbb{Q}$ als Unterkörper. Um das zu sehen, baut man sich zunächst eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to K$ durch $f(1) = 1$, $f(2) = 1 + 1$, etc. Dann bemerkt man, dass $f(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Hier hat man die Ordnung benutzt (Wieso?)). Man erweitert f von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Q}$ indem man für $p, q \in \mathbb{N}$ definiert, dass $f(\frac{p}{q}) = f(p) \cdot f(q)^{-1}$, und so ähnlich für negative rationale Zahlen (und $f(0) = 0$). Jetzt muss man noch nachprüfen, dass f mit Addition und Multiplikation verträglich ist.
Insbesondere kann ein Körper, der nur endlich viele Elemente hat, niemals geordnet sein.

Definition 2.1.8. Sei K eine geordneter Körper und sei $A \subset K$ eine Teilmenge.

(i) A ist *nach oben beschränkt*, wenn es ein $M \in K$ gibt, sodass $a \leq M$ für alle $a \in A$. In diesem Fall heisst M *obere Schranke* von A.

(ii) A ist *nach unten beschränkt*, wenn es ein $m \in K$ gibt, sodass $a \geq m$ für alle $a \in A$. In diesem Fall heisst m *untere Schranke* von A.

(iii) Ein Element $S \in K$ heisst *kleinste obere Schranke* (oder *Supremum*) *von A in K*, wenn S eine obere Schranke von A ist, und wenn kein $x < S$ eine obere Schranke von A ist. In diesem Fall schreiben wir

$$S = \sup A \ .$$

(iv) Ein Element $s \in M$ heisst *größte untere Schranke* (oder *Infimum*) *von A in K*, wenn s eine untere Schranke von A ist, und wenn kein $x > s$ eine untere Schranke von A ist. In diesem Fall schreiben wir

$$s = \inf A \ .$$

■ Wenn eine Teilmenge $A \subset K$ ein Supremum hat, dann ist es eindeutig. D.h. falls S, S' beides kleinste obere Schranken für A sind, so folgt $S = S'$. (Warum?) ?
Genauso verhält es sich mit dem Infimum.

Beispiel 2.1.9. Betrachte Teilmengen von $\mathbb{Q}$.

(1) $A = \{x | x < 0\} \subset \mathbb{Q}$ ist nach oben beschränkt, z.B. durch 1, aber nicht nach unten beschränkt. Die kleinste obere Schranke ist $\sup A = 0$. Allerdings ist $0 \notin A$.

(2) $A = \{x | x \leq 0\} \subset \mathbb{Q}$ hat ebenfalls $\sup A = 0$, und diesmal $0 \in A$.

(3) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ hat weder eine obere noch eine untere Schranke.

(4) $A = \{x | 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{Q}$ hat $\sup A = 1$ und $\inf A = 0$.

Satz 2.1.10. Die Menge $\{r \in \mathbb{Q} | r^2 < 2\}$ ist nach oben beschränkt, aber hat kein Supremum in $\mathbb{Q}$.

Beweis. Setze $A = \{r \in \mathbb{Q} | r^2 < 2\}$. Zwei ist eine obere Schranke von A (denn aus $r \geq 2$ folgt $r^2 \geq 4$).

Sei $s \in \mathbb{Q}$ eine obere Schranke von A.

- Beh.: Es gilt $s^2 \geq 2$.
  Bew.: Angenommen $s^2 < 2$. Betrachte
  $$t = s + \frac{2 - s^2}{s + 2} = 2 \cdot \frac{s+1}{s+2} \; . \qquad (*)$$
  Dann $t > s$ und
  $$t^2 - 2 = \frac{2(s^2 - 2)}{(s+2)^2} < 0 \; .$$
  Also $t \in A$. Widerspruch. (Widerspruch zu was?) ?

- Beh.: Es gilt $s^2 \neq 2$.
  Bew.: (Haben wir schon in Kapitel 0.2 gesehen.) Angenommen $s = \frac{p}{q}$. Durch Kürzen können wir erreichen, dass nicht sowohl p als auch q gerade sind. Wegen $s^2 = 2$ folgt $p^2 = 2q^2$. Also ist p^2 durch 2 teilbar. Und somit auch p. Also ist p^2 durch 4 teilbar. Wegen $p^2 = 2q^2$ ist dann q^2 gerade, und somit auch q. Widerspruch.

Somit gilt $s^2 > 2$. Definiere t wie in $(*)$. Dann gilt $t < s$ und $t^2 > 2$. Also ist t eine obere Schranke für A (Warum?), die kleiner ist als s. Es folgt, dass A keine kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}$ hat. ? $\square$

Definition 2.1.11. Sei K eine geordneter Körper. Existiert für alle nach oben beschränkten und nicht-leeren Teilmengen $M \subset K$ das Supremum $\sup M$ in K, dann sagen wir K hat die *Supremums-Eigenschaft*.

(Warum wäre diese Definition ohne den Zusatz „nicht-leer“ keine gute Definition mehr?) ?

■ In Satz 2.1.10 haben wir gesehen, dass $\mathbb{Q}$ nicht die Supremums-Eigenschaft hat.

Satz 2.1.12. Sei K eine geordneter Körper mit Supremums-Eigenschaft und sei $E \neq \emptyset$ eine nach unten beschränkte Teilmenge von K. Es gilt:

(i) $\inf E$ existiert in K,

(ii) Sei U die Menge der unteren Schranken für E. Dann $\inf E = \sup U$.

Beweis. (i) folgt aus (ii). Wir beweisen (ii).

U ist nicht leer und jedes $x \in E$ ist eine obere Schranke von U. Sei $s = \sup U$ (existiert nach Supremums-Eigenschaft).

- Beh.: s ist eine untere Schranke für E.
  Bew.: Zu zeigen: $t \in E \Rightarrow t \geq s$. Das ist äquivalent zu $t < s \Rightarrow t \notin E$.

  Wähle ein $t < s$. Dann ist t keine obere Schranke von U (nach Def. des Supremums). Also gibt es ein $u \in U$ mit $u > t$. Nach Definition von U gilt $x \geq u$ für alle $x \in E$. Insbesondere $t \notin E$. Wir haben gezeigt: $t < s \Rightarrow t \notin E$. Also ist s eine untere Schranke von E.
  (Eine untere Schranke war in Definition 2.1.8 aber etwas anders definiert. Warum ist das das Gleiche?) ?

- Beh.: Es gilt $s = \inf E$.
  Bew.: Sei $r > s$. Dann ist $r \notin U$ (denn s ist obere Schranke von U). Also ist kein $r > s$ eine untere Schranke von E. Somit $s = \inf E$.

□

2.2 Eigenschaften der reellen Zahlen

Satz 2.2.1. Es gibt einen geordneten Körper $\mathbb{R}$ der

(i) die Supremums-Eigenschaft hat, und

(ii) den Körper $\mathbb{Q}$ als Unterkörper enthält.

Das beweisen wir in Abschnitt 2.5.

Nebenbemerkung zur Information: Wir nennen zwei Körper K, K' *isomorph*, falls es eine bijektive Abbildung $f : K \to K'$ gibt, sodass $f(a+b) = f(a) + f(b)$ und $f(ab) = f(a)f(b)$ gilt. Es gilt der folgende bemerkenswerte Satz:

> Es gibt einen bis auf Isomorphie eindeutigen geordneten Körper, der die Supremums-Eigenschaft hat.

Diesen Körper nennen wir „die reellen Zahlen“. Einen Beweis der Aussage findet man z.B. in Kapitel 907 von Olmsted, The real number system (Dover).

Jetzt kann man mit den Eigenschaften eines geordneten Körpers mit Supremums-Eigenschaft arbeiten und muss sich keine Sorgen über die konkrete explizite Konstruktion machen. Die expliziten Konstruktionen (z.B. Dezimalzahlen oder Dedekind Schnitte, siehe unten) sind nämlich zu kompliziert, um damit verständliche Beweise zu produzieren.

Satz 2.2.2. (Archimedische Eigenschaft) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $x > 0$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $nx > y$.

Beweis. Angenommen, die Aussage sei falsch. Dann $nx \leq y$ für alle n. Also ist y eine obere Schranke der Menge $A = \{nx | n \in \mathbb{N}\}$. Sei $s = \sup A$ (Supremums-Eigenschaft). Dann ist $s - x$ keine obere Schranke von A. Also gibt es ein m mit $s - x < mx$. Dann auch $s < (m+1)x$. Aber $(m+1)x \in A$. Widerspruch (zu $s = \sup A$). □

Satz 2.2.3. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $x < y$. Dann gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$.

Beweis. Wegen $x < y$ gilt $y - x > 0$ (Notation nach Definition 2.1.4). Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n(y - x) > 1$ (Satz 2.2.2). Sei $A = \{m \in \mathbb{Z} | m < ny\}$.

- Beh.: $A \neq \emptyset$ und A ist nach oben beschränkt.
  Bew.: Falls $ny > 0$, so ist $0 \in A$, und es gibt ein N mit $N > ny$ (Satz 2.2.2 (Wie muss man n, x, y aus dem Satz wählen?)). Also ist N obere Schranke von A. ?
  Falls $ny = 0$ ist $-1 \in A$ und 0 obere Schranke von A.
  Falls $ny < 0$ ist 0 obere Schranke von A und es gibt ein N mit $N > -ny$ (Satz 2.2.2). Also $-N \in A$.

Da $A \subset \mathbb{Z}$ ist, und nicht-leer und nach oben beschränkt ist, enthält A ein maximales Element $s \in A$ (Warum?). D.h. $a \leq s$ für alle $a \in A$. ?

- Beh.: $nx < s < ny$.
  Bew.: Es gilt $s + 1 \geq ny$ (da sonst $s + 1 \in A$ aber s ist bereits maximal). Wegen $n(y - x) > 1$ gilt $nx < ny - 1$. Wegen $s + 1 \geq ny$ gilt $ny - 1 \leq s$. Wegen $s \in A$ gilt $s < ny$. Also auch $nx < s < ny$.

Wegen $n > 0$ gilt $1/n > 0$ (Satz 2.1.6 (vi)). Aus $nx < s < ny$ folgt auch $x < s/n < y$ (Satz 2.1.6 (iii)). □

■ Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $x^n = (\cdots((xx)x)\cdots x)x$, wobei rechts insgesamt n-Mal x steht. Wegen der Assoziativität der Multiplikation spielt die Position der Klammern keine Rolle, und es ist Konvention, sie ganz wegzulassen,

$$x^n = \underbrace{xx\cdots x}_{n\text{-Mal}} .$$

Des weiteren definiert man $x^0 = 1$ (auch für $x = 0$).

Satz 2.2.4. (Existenz von Wurzeln) Sei $x \in \mathbb{R}$ positiv und $n \in \mathbb{N}$. Es gibt genau ein positives $y \in \mathbb{R}$ mit $y^n = x$.

Wir schreiben $\sqrt[n]{x}$ oder $x^{\frac{1}{n}}$ für diese Zahl. Der Beweis kommt nach der Hilfsaussage in folgendem Lemma.

Lemma 2.2.5. Sei $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $y \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Wenn $y^n < x$, dann gibt es ein reelles $\varepsilon > 0$, sodass auch $(y+\varepsilon)^n < x$.

(ii) Wenn $y^n > x$, dann gibt es ein reelles $\varepsilon > 0$, sodass auch $(y-\varepsilon)^n > x$.

Der Beweis des Lemmas ist eine Übungsaufgabe.

Beweis von Satz 2.2.4.

- Eindeutigkeit: Angenommen $(y_1)^n = x$ und $(y_2)^n = x$ für $y_1 \neq y_2$ und $y_1, y_2 > 0$. Dann $y_1 < y_2$ oder $y_1 > y_2$. Im ersten Fall gilt auch $(y_1)^n < (y_2)^n$ (Warum?), im Widerspruch zu $(y_1)^n = x = (y_2)^n$. Genauso führt $y_1 > y_2$ zum Widerspruch ?

- Existenz: Sei $E = \{t \in \mathbb{R} \,|\, t > 0 \wedge t^n < x\}$. Dann:

  (a) E ist nicht leer:
  Es gilt $0^n = 0 < x$. Nach Lemma 2.2.5 gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $(0+\varepsilon)^n < x$. Dann gilt $\varepsilon \in E$.

  (b) E ist nach oben beschränkt:
  Für $t > x + 1$ gilt $t^n > t$ (Warum?) und somit $t^n > x + 1 > x$. Also ist $x + 1$ eine obere Schranke für E. ?

  (c) $(\sup E)^n = x$:
  Wegen (a) und (b) existiert $y = \sup E$.
  ■ Angenommen $y^n < x$.
  Nach Lemma 2.2.5 existiert ein $\varepsilon > 0$ sodass $(y+\varepsilon)^n < x$. Also ist $y + \varepsilon \in E$. Widerspruch (zu “y ist obere Schranke von E”).
  ■ Angenommen $y^n > x$.
  Nach Lemma 2.2.5 existiert ein $\varepsilon > 0$ sodass $(y-\varepsilon)^n > x$. Also ist $y - \varepsilon$ eine obere Schranke von E. Widerspruch (zu $y = \sup E$).
  Also bleibt nur die Möglichkeit $y^n = x$.

$\square$

Korollar 2.2.6. Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann $(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$.

Beweis. Setze $u = a^{\frac{1}{n}}$ und $v = b^{\frac{1}{n}}$. Dann $u^n = a$ und $v^n = b$. Wegen Kommutativität und Assoziativität von $\mathbb{R}$ gilt $(uv)^n = u^n v^n$, und somit $(uv)^n = ab$. Wegen Eindeutigkeit der (positiven) Lösung zu $y^n = ab$ gilt $(ab)^{\frac{1}{n}} = uv$. $\square$

2.3 Dezimalschreibweise

Sei

$$x \in \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad x \geq 0$$

gegeben. Bestimme rekursiv ganze Zahlen $n_0, n_1, n_2, n_3, \dots$ wie folgt. Seien $n_0, \dots, n_{k-1}$ bereits gewählt. Sei n_k die größte ganze Zahl, sodass

$$n_0 + \frac{n_1}{10^1} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{n_k}{10^k} \;\leq\; x \;.$$

Die Existenz von n_k folgt aus der Archimedischen Eigenschaft von $\mathbb{R}$ (Wie?). ?
Dies definiert eine Funktion

$$d : \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\} \longrightarrow \{ \text{ Folgen } (n_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \text{ mit } n_k \in \mathbb{N}_0 \ \} \ .$$

Es gilt (Übung):

1. Es gilt $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und für $k > 0$ gilt $0 \leq n_k \leq 9$.

2. Sei
$$E = \{\sum_{r=0}^{k} \frac{n_r}{10^r} \mid k \in \mathbb{N}_0\} \ .$$
Dann $x = \sup E$. Man schreibt
$$x = n_0, n_1 n_2 n_3 \dots$$
Dies ist die *Dezimalschreibweise der reellen Zahlen*. Jede reelle Zahl ≥ 0 kann auf diese Weise in Dezimalschreibweise geschrieben werden. (Was ? macht man mit negative reellen Zahlen? (Ihre Antwort sollte „inf E“ beinhalten.))

3. Umgekehrt sei $n_k \in \mathbb{N}_0$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq n_k \leq 9$ für $k \geq 1$. Definiere E wie oben. Dann ist E beschränkt und somit existiert $\sup E$. Jede solche Zahlenfolge $n_0, n_1 n_2 n_3 \dots$ definiert also eine reelle Zahl.

4. Verschiedene Zahlenfolgen $n_0, n_1, n_2, \dots$ und $m_0, m_1, m_2, \dots$ können das gleiche Supremum haben. Z.B.

$$1.0000\dots = 0.9999\dots$$

Nebenbemerkung zur Information: Wenn wir Reihen und Konvergenz definiert haben, können wir folgende Aussage machen: Gegeben eine Zahlenfolge n_k wie in Teil 3 oben, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} n_k 10^{-k}$. Der Grenzwert x dieser Reihe ist gleich dem Supremum $\sup E$ in Teil 2.
Der Grenzwert $x \in \mathbb{R}$ der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} n_k 10^{-k}$ ist die übliche Interpretation der Dezimalschreibweise. Wegen $x = \sup E$ stimmt dies mit der Beschreibung oben überein.

2.4 Komplexe Zahlen

■ Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Gibt es ein $y \in \mathbb{R}$, sodass $y^n = x$? (Übung)

	$x > 0$	$x = 0$	$x < 0$
n ungerade	ja	ja	ja
n gerade	ja	ja	nein

Definition 2.4.1. Die *komplexen Zahlen* sind

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

mit

	Addition	Multiplikation
Funktion	$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$	$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
	$(a,b) + (a',b')$	$(a,b)(a',b')$
	$= (a+a', b+b')$	$= (aa' - bb', ab' + ba')$
neutrales Element	$0 := (0,0)$	$1 := (1,0)$
Inverses	$-(a,b) := (-a,-b)$	$(a,b)^{-1} := \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

Nebenbemerkung zur Information: Wir werden später, wenn wir die komplexe Exponentialfunktion definiert haben, folgendes geometrische Bild für die Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen begründen können:
[Bild in Vorlesung]

Satz 2.4.2.

(i) Die komplexen Zahlen sind ein Körper.

(ii) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = (x, 0)$ ist injektiv und erfüllt

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad , \quad f(xy) = f(x)f(y) \ .$$

Das beweist man durch Nachrechnen der Körperaxiome in Definition 2.1.1. (Details?) Wir zeigen exemplarisch $1z = z$ und $f(xy) = f(x)f(y)$: Sei $z = (a', b')$. Dann $1z = (1, 0)(a', b') = (1a' - 0b', 1b' + 0a') = (a', b')$. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. $f(xy) = (xy, 0)$ and $f(x)f(y) = (x, 0)(y, 0) = (xy, 0)$. ?

■ Für $x \in \mathbb{R}$ schreiben wir $x \equiv (x, 0) \in \mathbb{C}$. (Das ist konsistent mit $0 = (0, 0)$ und $1 = (1, 0)$ aus Definition 2.4.1.) Wir sagen, eine komplexe Zahl $(x, 0) \in \mathbb{C}$ ist reell.

■ Definiere

$$i := (0, 1) \in \mathbb{C} \ .$$

Es gilt

$$i^2 = -1 \ ,$$

und für $x, y \in \mathbb{R}$

$$x + iy = (x, y) \in \mathbb{C} \ .$$

■ Die Beobachtung $i^2 = -1$ zeigt, dass man auf $\mathbb{C}$ keine Ordnung definieren kann. Denn angenommen, es gibt eine Ordnung auf $\mathbb{C}$. Nach Korollar 2.1.7 gilt dann, dass $1 > 0$, und somit $-1 < 0$. Da $-1 = i^2$ folgt aber nach Satz 2.1.6 (v), dass $-1 > 0$. Widerspruch.

■ Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Gibt es ein $y \in \mathbb{C}$, sodass $y^n = x$? (Übung)

	$x > 0$	$x = 0$	$x < 0$
n ungerade	ja	ja	ja
n gerade	ja	ja	ja

■ Die *komplexe Konjugation* ist die Funktion $\overline{(\ )} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\overline{(a, b)} = (a, -b) \ .$$

Sie erfüllt, für $z, w \in \mathbb{C}$

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \quad , \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w} \ ,$$

und für $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\overline{x + iy} = x - iy \ .$$

■ Definiere Funktionen $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}((a,b)) = a$ und $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}((a,b)) = b$. Für $z \in \mathbb{C}$ heisst $\mathrm{Re}(z)$ der *Realteil von z* und $\mathrm{Im}(z)$ der *Imaginärteil von z*. Es gilt:

$$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) \quad \text{und} \quad \frac{1}{i}(z - \overline{z}) = 2\,\mathrm{Im}(z)\ .$$

$\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$

■ Für eine Menge X sei X^n die Menge der geordneten n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$.
■ Alternativ können wir auch rekursiv definieren $X^1 = X$, $X^{n+1} = X^n \times X$. Dann

$$X^n = (\cdots((X \times X) \times X) \cdots \times X) \times X$$

und wir schreiben

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n) \quad \text{statt} \quad \big((\cdots((x_1, x_2), x_3) \ldots, x_{n-1}), x_n\big)\ .$$

■ Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Für $x \in K^n$ schreiben wir

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

und nennen x einen *Vektor* und x_k die *k-te Koordinate von x*. Für $c \in K$ und $x, y \in K^n$ definieren wir

- Vektoraddition: $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$, also $(x + y)_k = x_k + y_k$,
- Multiplikation von Vektoren und Skalaren: $cx = (cx_1, cx_2, \ldots cx_n)$, also $(cx)_k = cx_k$.

Für $x \in K^n$ setzen wir

$$-x := (-1)x\ .$$

2.5 Konstruktion von $\mathbb{R}$

Hier beweisen wir Satz 2.2.1, d.h. die Existenz eines geordneten Körpers mit Supremums-Eigenschaft, der $\mathbb{Q}$ enthält. Nachdem wir die Existenz gezeigt haben, werden wie die konkrete Konstruktion, die in diesem Kapitel präsentiert wird, nie wieder verwenden.

Definition 2.5.1. Ein *Dedekind Schnitt* (oder kurz *Schnitt*) ist eine Untermenge α von $\mathbb{Q}$, sodass

(i) $\alpha \neq \emptyset$ und $\alpha \neq \mathbb{Q}$,

(ii) wenn $p, q \in \mathbb{Q}$, $p < q$ und $q \in \alpha$, dann auch $p \in \alpha$,

(iii) es für alle $p \in \alpha$ ein $q \in \alpha$ gibt mit $p < q$.

Beispiel 2.5.2.

(1) Sei $r \in \mathbb{Q}$. Die Menge

$$r^* := \{q \in \mathbb{Q} | q < r\}$$

ist ein Schnitt (Warum?). Die Menge $\{q \in \mathbb{Q} | q \leq r\}$ ist kein Schnitt (Eigenschaft (iii) ist nicht erfüllt). ?

(2) Sei $n_0, n_1 n_2 n_3 \ldots$ eine Dezimalzahl. Die Menge $\{r \in \mathbb{Q} | \exists m \in \mathbb{N} : r < \sum_{k=0}^{m} n_k / 10^k\}$ ist ein Schnitt (Warum?). ?

Definition 2.5.3. Die *reellen Zahlen* sind $\mathbb{R} = \{\alpha \subset \mathbb{Q} \,|\, \alpha \text{ ist ein Schnitt}\}$.

Die reellen Zahlen sind also eine Untermenge der Potenzmenge von $\mathbb{Q}$.

■ Die Teilmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$ der positiven reellen Zahlen ist definiert als

$$\mathcal{P} := \{\alpha \in \mathbb{R} \,|\, 0 \in \alpha\} \ .$$

Wie vorher schreiben wir $\alpha > 0$ falls $\alpha \in \mathcal{P}$. Bevor wir prüfen können, das dies eine Ordnung definiert, müssen wir aus $\mathbb{R}$ einen Körper machen.

■ Für die neutralen Element der Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ machen wir den Ansatz $0 = 0^*$, $1 = 1^*$.

■ Gegeben $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, definiere

$$p(\alpha, \beta) = \{r + s | r \in \alpha, s \in \beta\} \ .$$

Dann ist $p(\alpha, \beta)$ ein Schnitt (Warum?). Wir definieren die Funktion ?

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad \alpha + \beta = p(\alpha, \beta) \ .$$

■ Gegeben $\alpha \in \mathbb{R}$, definiere

$$-\alpha = \{p \in \mathbb{Q} \,|\, \text{es gibt ein } r > 0,\, r \in \mathbb{Q}, \text{ sodass } -p - r \notin \alpha\} \ .$$

Dies ist ein Schnitt (Warum?). ?

Beispiel 2.5.4. Für $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt $r^* + s^* = (r + s)^*$ und $-(r^*) = (-r)^*$ (Warum?). ?

■ Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$ definieren wir

$$m(\alpha, \beta) = \{p \in \mathbb{Q} \,|\, \text{es gibt } r \in \alpha,\ r > 0\ ,\ s \in \beta,\ s > 0, \text{ sodass } p < rs\}\ .$$

Dies definiert einen Schnitt (Warum? Und warum ist es wichtig, in der Definition von $m(\alpha, \beta)$ die Bedingungen $r, s > 0$ dabei zu haben?). Falls nicht gilt, dass $\alpha, \beta > 0$, setzen wir ?

$$m(\alpha, \beta) = \begin{cases} m(-\alpha, -\beta) & ; \alpha < 0 \wedge \beta < 0 \\ -m(-\alpha, \beta) & ; \alpha < 0 \wedge \beta > 0 \\ -m(\alpha, -\beta) & ; \alpha > 0 \wedge \beta < 0 \\ 0^* & ; \alpha = 0 \text{ oder } \beta = 0 \end{cases}$$

Wir definieren die Funktion

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad \alpha\beta = m(\alpha, \beta)\ .$$

■ Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ sei

$$\alpha^{-1} = \{p \in \mathbb{Q} \,|\, \text{es gibt ein } a \in \alpha,\ a > 0, \text{ sodass } p < a^{-1}\}\ .$$

Dies ist ein Schnitt (Warum?). Für $\alpha < 0$ definiere $\alpha^{-1} := -(-\alpha)^{-1}$. ?

Beispiel 2.5.5. Für $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt $r^* s^* = (rs)^*$ und $(r^{-1})^* = (r^*)^{-1}$ (Warum?). ?

Lemma 2.5.6. $\mathbb{R}$, mit $+$, $\cdot$, 0, 1, $-\alpha$, α^{-1} wie oben, ist ein Körper.

Wir beweisen eine Eigenschaft als Beispiel:
■ Beh.: (A3) $\alpha + 0^* = \alpha$:
Bew.: Es gilt

$$\alpha + 0^* = \{r + s | r \in \alpha, s \in 0^*\}\ .$$

Aber $s \in 0^* \Rightarrow s < 0^* \Rightarrow r + s < r \Rightarrow r + s \in \alpha$. Also $\alpha \subset \alpha + 0^*$. Sei umgekehrt $r \in \alpha$. Dann gibt es ein $p > r$, $p \in \alpha$. Also gilt $r = p + (r - p)$ mit $r - p \in 0^*$. Somit $\alpha + 0^* \subset \alpha$.

Lemma 2.5.7. $\mathbb{R}$, mit der Teilmenge $\mathcal{P}$ wie oben, ist ein geordneter Körper.

Wir beweisen eine Eigenschaft als Beispiel:
■ Beh.: $\alpha, \beta \in \mathcal{P}$ impliziert, dass $\alpha\beta \in \mathcal{P}$:
Bew.: $\alpha\beta = \{p \in \mathbb{Q} |$ es gibt $a \in \alpha$, $b \in \beta$, sodass $a, b > 0$ und $p < ab\}$. Da $\mathbb{Q}$ geordnet ist, gilt $ab > 0$. Also $0 \in \alpha\beta$.

■ Per Definition gilt $\alpha < \beta$ falls $\beta - \alpha \in \mathcal{P}$. Es gilt: (Warum?) ?

$$\alpha < \beta \ \Leftrightarrow\ (\alpha \subset \beta \wedge \alpha \neq \beta)\ .$$

Beispiel 2.5.8. Für $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt $r < s$ genau dann, wenn $r^* < s^*$ (warum?).

Lemma 2.5.9. $\mathbb{R}$ hat die Supremums-Eigenschaft.

Beweis. Sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer und sei $\sigma \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von A. Definiere

$$\gamma = \{p \in \mathbb{Q} | \text{ es gibt ein } \alpha \in A, \text{ sodass } p \in \alpha\} \quad \Big(= \bigcup_{\alpha \in A} \alpha \Big) .$$

- Beh.:$\gamma \in \mathbb{R}$:
  Bew.: Es gilt
  - $\gamma \neq \emptyset$: Es gibt ein $\alpha \in A$, und α ist nicht leer (per Definition eines Schnittes).
  - $\gamma \neq \mathbb{Q}$: für $\alpha \in A$ gilt $\alpha \leq \sigma$, also auch $p \in \gamma \Rightarrow p \in \sigma$, und $\sigma \neq \mathbb{Q}$.
  - Wenn $p \in \gamma$, $q \in \mathbb{Q}$ und $q < p$, dann $q \in \gamma$: Sei $\alpha \in A$, sodass $p \in \alpha$. Dann $q \in \alpha$ und somit $q \in \gamma$.
  - Für $p \in \gamma$ gibt es ein $q \in \gamma$ mit $p < q$: Genauso.
- Beh.: $\gamma = \sup A$:
  Bew.: Per Definition $\alpha \subset \gamma$ für alle $\alpha \in A$, somit $\alpha \leq \gamma$. Also ist γ eine obere Schranke von A. Sei $\delta < \gamma$. Dann gibt es ein $p \in \gamma$ mit $p \notin \delta$. Sei $p \in \alpha$ mit $\alpha \in A$. Dann gilt nicht $\alpha \leq \delta$, also ist δ keine obere Schranke von A.

□

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathbb{R}$ auch $\mathbb{Q}$ als Unterkörper enthält. Setze dazu $\mathbb{Q}^* = \{r^* \in \mathbb{R} | r \in \mathbb{Q}\}$. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^*$, $f(r) = r^*$.

Lemma 2.5.10. Es gilt:

(i) f ist eine Bijektion,

(ii) $f(r+s) = f(r) + f(s)$, $f(rs) = f(r)f(s)$,

(iii) $r < s \Leftrightarrow f(r) < f(s)$.

Beweis. Teile (ii) und (iii) sind Beispiele 2.5.4, 2.5.5, 2.5.8. Zu (i): f ist surjektiv per Definition von $\mathbb{Q}^*$. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$. Sei oBdA $x < y$. Wegen (iii) gilt $f(x) < f(y)$, also auch $f(x) \neq f(y)$. Also $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Also ist f injektiv. □

Damit ist Satz 2.2.1 bewiesen.

3 Metrische Räume

3.1 Betrag und Norm

■ Definiere die Funktion $|\ |: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

$|x|$ heisst *Betrag von* x oder *Absolutbetrag von* x. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt (Warum?): ?

$|x| \geq 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $|x| = |-x|$, $|x+y| \leq |x| + |y|$, $|x| = \sqrt{x^2}$.

Satz 3.1.1. Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ und $d(x,y) = |x-y|$ gilt

(i) $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$,

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Beweis. Wir zeigen (iii) als Beispiel:

$d(x,z) = |x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z)$.

Der Rest ist klar. □

■ Definiere die Funktion $|\ |: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ durch

$$|\,(x,y)\,| = \sqrt{x^2+y^2}\ .$$

$|z|$ heisst *Betrag von* z oder *Absolutbetrag von* z. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$, oder, äquivalent dazu, $|z|^2 = z\overline{z}$ (Warum ist das äquivalent?). ?

Lemma 3.1.2. Seien $z, w \in \mathbb{C}$.

(i) $|z| = |\overline{z}|$,

(ii) $|zw| = |z|\,|w|$,

(iii) $|z| = |-z|$,

(iv) $|z| \geq 0$,

(v) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,

(vi) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$,

(vii) $|z+w| \le |z| + |w|$.

Beweis. Wir beweisen Teil (vi) als Beispiel: Für $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \ge 0$ gilt (Warum?) ?

$$x \le y \;\Leftrightarrow \sqrt{x} \le \sqrt{y}\ .$$

Sei $z = (a, b)$. Es gilt $0 \le a^2 \le a^2 + b^2$, also auch $\sqrt{a^2} \le \sqrt{a^2+b^2}$ (und $|a| = \sqrt{a^2}$). Also

$$|\operatorname{Re} z| \le |z|$$

Rest: Übung / selber überlegen. ?

□

Satz 3.1.3. Für $x, y, z \in \mathbb{C}$ und $d(x,y) = |x-y|$ gelten (i)–(iii) von Satz 3.1.1.

Der Beweis ist wegen Lemma 3.1.2 identisch zu dem von Satz 3.1.1.

(Hätten wir in dem Satz oben auch $d(x,y) = |x-2y|$ oder $d(x,y) = |x+y|$ nehmen können?) ?

■ Definiere eine Funktion $|\ | : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$|\,(x_1, \dots, x_n)\,| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \quad \text{also} \quad |x| = \Big(\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\ .$$

$|x|$ heisst *(Euklidische) Norm.* Setze $d(x,y) = |x-y|$. Dann gelten (i)–(iii) aus Satz 3.1.3. Beweis: siehe nächstes Beispiel.

■ Definiere eine Funktion $|\ | : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$|\,(z_1, \dots, z_n)\,| = \sqrt{z_1\overline{z_1} + \cdots + z_n\overline{z_n}}$$

$|z|$ heisst *(Hermitesche) Norm.*

Satz 3.1.4. (Schwarzsche Ungleichung) Seien $a, b \in \mathbb{C}^n$. Dann gilt

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_j\overline{b_j}\Big| \;\le\; |a|\,|b|\ .$$

Beweis: [Satz 1.35 aus Rudin]

(Fallen Ihnen Beispiele ein, bei denen sogar „=“ gilt?) ?

Für $x, y \in \mathbb{C}^n$ setze $d(x,y) = |x-y|$.

Satz 3.1.5. Es gelten (i)–(iii) aus Satz 3.1.1.

Beweis. (i) und (ii) sind klar.

Für $a, b \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\begin{aligned}|a+b|^2 &= \sum_j (a_j + b_j)(\overline{a_j} + \overline{b_j}) \leq |a|^2 + |b|^2 + 2\Big|\sum_j a_j \overline{b_j}\Big| \\ &\overset{(*)}{\leq} |a|^2 + |b|^2 + 2|a|\,|b| = (|a| + |b|)^2\end{aligned}$$

(Warum gilt die erste Ungleichung?) Bei $(*)$ haben wir die Schwarzsche Ungleichung benutzt. Somit auch $|a+b| \leq |a| + |b|$. Mit $a = x - y$, $b = y - z$ folgt die Behauptung. ☐ ?

Definition 3.1.6. Ein *metrischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$, die *Metrik* oder *Abstandsfunktion*, sodass für alle $x, y, z \in X$,

(i) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$,

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

■ Eigenschaft (iii) nennt man *Dreiecksungleichung*. Wir schreiben auch (X, d) für einen metrischen Raum X mit Metrik d.

Beispiel 3.1.7.

(1) $(\mathbb{R}, |x-y|)$, $(\mathbb{C}, |x-y|)$, $(\mathbb{R}^n, |x-y|)$, $(\mathbb{C}^n, |x-y|)$ sind metrische Räume.

(2) Sei K entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Für $x \in K^n$ setze

$$\|x\|_\infty \;=\; \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}\ .$$

Dies nennt man auch die *Supremums-Norm* (wir habe allerdings nicht definiert, was eine Norm ist). Es gilt: $(K^n, \|x - y\|_\infty)$ ist ein metrischer Raum (Warum?). ?

(3) Sei X eine Menge. Wie in Kapitel 1 bezeichne $[-1, 1]$ das Intervall $\{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 1\}$ und $\mathrm{Fun}(X, [-1, 1])$ die Menge aller Funktionen $X \to [-1, 1]$. Für $f, g \in \mathrm{Fun}(X, [-1, 1])$ setze

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &= \sup\big\{\, |f(x)| \,\big|\, x \in X \big\}\ . \\ d(f, g) &= \|f - g\|_\infty\ .\end{aligned}$$

Dann ist $(\mathrm{Fun}(X, [-1, 1]), \|f-g\|_\infty)$ ein metrischer Raum. (Warum? Und warum existiert das Supremum in der Definition von $\|f\|_\infty$?) ?

Z.B.: Später (nach Einführen der komplexen Exponentialfunktion) können wir nachprüfen: Für $X = \mathbb{R}$ gilt $d(\sin, \cos) = \sqrt{2}$.

Satz 3.1.8. Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $Y \subset X$ und $d' : Y \times Y \to \mathbb{R}$ gegeben durch $d'(x, y) = d(x, y)$. Dann ist (Y, d') ein metrischer Raum.

Beweis. Aus $x, y, z \in Y$ folgt $x, y, z \in X$, also gelten (i)–(iii) aus Definition 3.1.6, da d eine Metrik auf X definiert. $\square$

■ Wenn X ein metrischer Raum ist und $Y \subset X$, dann behandeln wir Y als metrischen Raum wie im vorherigen Satz definiert. Wir sagen: "Y hat die von X induzierte Metrik", und wir benutzen hierfür das gleiche Symbol wie für die Metrik auf X.

3.2 Offene und abgeschlossene Mengen

Definition 3.2.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine *Umgebung* eines Punktes $p \in X$ ist eine Menge

$$U_r(p) = \{x \in X \mid d(x, p) < r\} .$$

für ein reelles $r > 0$. r heisst *Radius* von $U_r(p)$.

Beispiel 3.2.2. Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit Euklidischer Metrik.

(1) Für $a, b \in \mathbb{R}$ definiere die *Intervalle*

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \wedge x \leq b\} \\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}
\end{aligned}$$

Für $a < b$ ist (a, b) eine Umgebung des Punktes $\frac{a+b}{2}$ mit Radius $\frac{b-a}{2}$ in $\mathbb{R}$. Die Intervalle $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ sind keine Umgebungen in $\mathbb{R}$.

(2) Für $\mathbb{R}^1$ ist $U_r(p)$ ein Intervall, für $\mathbb{R}^2$ eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt p und Radius r (aber ohne den Rand), für $\mathbb{R}^3$ eine Kugel (aber ohne den Rand).

(3) $[0, 1)$ ist eine Umgebung von 0 in $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$, aber es ist *keine* Umgebung von 0 in $\mathbb{R}$.

Definition 3.2.3. Sei X ein metrischer Raum und sei $V \subset X$.

(i) Ein $p \in V$ heisst *innerer Punkt von V*, wenn es eine Umgebung U von p gibt, sodass $U \subset V$.

(ii) V heisst *offen in* X, wenn jeder Punkt von V ein innerer Punkt ist.

(iii) Ein $x \in X$ heisst *Häufungspunkt von* V, wenn jede Umgebung U von x ein $y \in V$ mit $x \neq y$ enthält.

(iv) V heisst *abgeschlossen in* X, wenn jeder Häufungspunkt von V in V liegt.

■ Wenn klar ist, welche umgebende Menge gemeint ist, sagen wir auch "V ist offen" statt "V ist offen in X".

Beispiel 3.2.4. Betrachte den metrischen Raum $(\mathbb{R}, |x-y|)$.

(1) $[0,1]$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$, nicht offen in $\mathbb{R}$, abgeschlossen in $[0,1]$, offen in $[0,1]$ (Warum?). ?

(2) $(0,1)$ ist offen in $\mathbb{R}$, offen in $[0,1]$, nicht abgeschlossen in $[0,1]$, abgeschlossen in $(0,1)$ (Warum?). ?

(3) Eine endliche Untermenge von $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$, denn eine endliche Untermenge von $\mathbb{R}$ hat keine Häufungspunkte ($\rightarrow$ Übung).

Satz 3.2.5. Sei X ein metrischer Raum. Jede Umgebung in X ist offen in X.

Beweis. Sei $q \in U_r(p)$. Setze $s = r - d(p,q)$. Es gilt $s > 0$. Für jedes $x \in U_s(q)$ gilt

$$d(p,x) \leq d(p,q) + d(q,x) < r - s + s = r \ ,$$

also $x \in U_r(p)$. Somit $U_s(q) \subset U_r(p)$ und jedes $q \in U_r(p)$ ist innerer Punkt von $U_r(p)$ in X. □

Satz 3.2.6. Sei X ein metrischer Raum. $\emptyset$ und X sind sowohl abgeschlossen als auch offen in X.

Beweis. $\emptyset$ ist offen nach (ii), da $\emptyset$ keine Elemente hat (also ist jeder Punkt inner), und $\emptyset$ ist abgeschlossen nach (iv), da $\emptyset$ keine Häufungspunkte hat.

X ist offen, da jede Umgebung $U_r(p)$ in X liegt (per Definition einer Umgebung) und X ist abgeschlossen, da jeder Häufungspunkt in X liegt (nach Definition eines Häufungspunktes). □

Satz 3.2.7. Sei X ein metrischer Raum und $V \subset X$.

(i) V ist offen $\Leftrightarrow$ $\complement_X V$ ist abgeschlossen.

(ii) V ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $\complement_X V$ ist offen.

Beweis. (i) „⇒“: Sei x Häufungspunkt von $\complement_X V$. Es gilt zu zeigen, dass $x \in \complement_X V$. Angenommen, $x \notin \complement_X V$. Dann $x \in V$. Da V offen ist, existiert eine Umgebung U von x mit $U \subset V$. Dann aber $U \cap \complement_X V = \emptyset$, Widerspruch (zu „$x$ ist Häufungspunkt von $\complement_X V$“).
„⇐“: Sei $v \in V$. Es gilt zu zeigen, dass es eine Umgebung U von v gibt, sodass $U \subset V$. Angenommen, es gäbe kein U mit $U \cap \complement_X V = \emptyset$. Dann wäre v ein Häufungspunkt von $\complement_X V$, und somit $v \in \complement_X V$, da $\complement_X V$ abgeschlossen ist. Widerspruch (zu $v \in V$).
(ii) folgt aus (i) (Wie?). □ ?

Definition 3.2.8. Seien A, X Mengen. Eine *(durch A indizierte) Familie von Mengen in X* ist eine Funktion $E : A \to P(X)$.

- Wir schreiben E_α statt $E(\alpha)$ und $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ oder nur $\{E_\alpha\}$ statt E.
- Vereinigung und Schnitt aller Mengen in einer Familie sind definiert als

$$\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha := \{x \in X \mid \exists \alpha \in A : x \in E_\alpha\} \ ,$$
$$\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha := \{x \in X \mid \forall \alpha \in A : x \in E_\alpha\} \ .$$

Falls $A = \mathbb{N}$ schreibt man auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ statt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, und genauso für $\bigcap$.

Lemma 3.2.9. Sei $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie von Mengen in X.

$$\complement_X \Big(\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \Big) = \bigcup_{\alpha \in A} \left(\complement_X E_\alpha \right) \ .$$

Beweis zum selber überlegen (Details?). Der Satz gilt auch mit $\bigcap$ und $\bigcup$ vertauscht (Warum?). ? ?

Satz 3.2.10. Sei $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie von Mengen in einem metrischen Raum X.

(i) Sei E_α offen in X für alle $\alpha \in A$. Dann ist auch $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ offen in X.

(ii) Sei E_α abgeschlossen in X für alle $\alpha \in A$. Dann ist auch $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$ abgeschlossen in X.

Beweis. (i) Sei $x \in \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$. Dann gibt es ein $\alpha \in A$, sodass $x \in E_\alpha$. Da E_α offen ist, gibt es eine Umgebung U von x mit $U \subset E_\alpha$. Da $E_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ gilt auch $U \subset \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$.
(ii) Da E_α abgeschlossen ist, ist $\complement_X E_\alpha$ offen (Satz 3.2.7). Nach Teil (i) ist auch $\bigcup_{\alpha \in A} \complement_X E_\alpha$ offen. Nach Lemma 3.2.9 ist dies gleich $\complement_X \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$. Somit ist $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$ abgeschlossen (Satz 3.2.7). □

Beispiel 3.2.11. In diesem Beispiel betrachten wir Teilmengen von $\mathbb{R}$. Die Umkehrung von Satz 3.2.10 gilt nicht:

(1) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}) = (0,3)$ ist offen, aber $\bigcap_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}) = (1,2]$ ist weder offen noch abgeschlossen.

(2) $\bigcap_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}] = [1,2]$ ist abgeschlossen, aber $\bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}] = (0,3]$ ist weder offen noch abgeschlossen.

(Warum?) ?

Satz 3.2.12. Sei X ein metrischer Raum.

(i) Seien $V_1, \ldots, V_n \subset X$ offen in X. Dann ist $\bigcap_{k=1}^{n} V_k$ offen in X.

(ii) Seien $V_1, \ldots, V_n \subset X$ abgeschlossen in X. Dann ist $\bigcup_{k=1}^{n} V_k$ abgeschlossen in X.

Beweis. (i) Sei $p \in \bigcap_{k=1}^{n} V_k$. Dann $p \in V_k$ für $k = 1, \ldots, n$. Da V_k offen ist in X gibt es $r_k > 0$, sodass $U_{r_k}(p) \subset V_k$. Sei $r = \min(r_1, \ldots, r_n)$. Dann $U_r(p) \subset U_{r_k}(p)$ und somit auch $U_r(p) \subset \bigcap_{k=1}^{n} V_k$.
(ii) folgt aus (i) (Wie? Und wo geht der Beweis von (i) und (ii) schief, wenn wir unendliche Familien $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ zulassen?). ? □

Definition 3.2.13. Sei X ein metrischer Raum und $V \subset X$. Setze

$$\overline{V} = V \cup \{x \in X \mid x \text{ ist Häufungspunkt von } V \text{ in } X\} .$$

$\overline{V}$ heisst *Abschluss* oder *abgeschlossene Hülle* von V in X.

Beispiel 3.2.14.

(1) Wir müssen V mit dazu nehmen, damit $V \subset \overline{V}$ gilt. Sonst z.B.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist Häufungspunkt von } \mathbb{Z} \text{ in } \mathbb{R}\} = \emptyset .$$

(2) Der Abschluss $\overline{(0,1)}$ des offenen Intervals $(0,1)$ in $\mathbb{R}$ ist $[0,1]$. Der Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ ist $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Der Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ ist $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.

(3) Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Der Abschluss der Umgebung $U_r(p)$ in K^n (mit Euklidischer, bzw. Hermitescher Metrik, aber das wollten wir bei K^n ja immer annehmen, wenn nichts anderes gesagt wurde) ist

$$\overline{U_r(p)} = \{x \in X \mid d(x,p) \le r\} .$$

(Warum?) ?

Satz 3.2.15. Sei X ein metrischer Raum und $V \subset X$. $\overline{V}$ ist abgeschlossen in X.

Beweis. Wir zeigen, dass $\complement_X \overline{V}$ offen ist. Nach Satz 3.2.7 impliziert dies die Behauptung.

Sei $p \in \complement_X \overline{V}$. Dann $v \notin \overline{V}$. Es gibt ein $r > 0$, sodass $U_r(p) \cap V = \emptyset$ (sonst wäre p Häufungspunkt von V und damit in $\overline{V}$).

Beh.: Es gilt $U_{r/2}(p) \cap \overline{V} = \emptyset$.
Per Konstruktion $U_{r/2}(p) \cap V = \emptyset$. Sei $x \in \overline{V} \setminus V$. Also ist x ist Häufungspunkt von V. Per Definition ist somit $U_{r/2}(x) \cap V \neq \emptyset$. Also gibt es ein $v \in V$ mit $d(x, v) < \frac{r}{2}$. Aber $d(p, v) \geq r$ (da $U_r(p) \cap V = \emptyset$) und $d(p, x) + d(x, v) \geq d(p, v)$. Es folgt, dass $d(p, x) \geq r - d(x, v) > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$ (da $d(x, v) < \frac{r}{2}$). Also $x \notin U_{r/2}(p)$.

Insgesamt gilt also, dass es für jedes $p \in \complement_X \overline{V}$ ein $r > 0$ gibt, sodass $U_{r/2}(p) \subset \complement_X \overline{V}$. Somit ist $\complement_X \overline{V}$ offen. □

3.3 Kompakte Mengen

Definition 3.3.1. Sei X ein metrischer Raum und sei V eine Teilmenge von X. Eine *offene Überdeckung von V (in X)* ist eine Familie $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von offenen Mengen (in X), sodass $V \subset \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$.

Beispiel 3.3.2.

(1) Die Familie $\{X\}$, die nur aus dem gesamte Raum X besteht, ist eine offene Überdeckung von jeder Teilmenge $V \subset X$.

(2) $\{(-1, 2), (1, 4)\}$ ist eine offene Überdeckung von $[0, 3]$ in $\mathbb{R}$.

(3) $\{(a, a+2) | a \in \mathbb{Z}\}$ ist eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$, aber $\{(a, a+1) | a \in \mathbb{Z}\}$ ist keine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$.

(4) Für jedes $\varepsilon > 0$ sind $\{U_\varepsilon(p)\}_{p \in \mathbb{R}^n}$ und $\{U_\varepsilon(p)\}_{p \in \mathbb{Q}^n}$ offene Überdeckungen von $\mathbb{R}^n$. Aber $\{U_\varepsilon(p)\}_{p \in \mathbb{Z}^n}$ ist nur für ε groß genug eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}^n$. (Wie groß muss ε sein? Gibt es eine kleinste Wahl für ε?) ?

(5) Sei $E_n = (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}) \subset \mathbb{R}$, also

$$E_1 = (\tfrac{1}{3}, 1)\ , \quad E_2 = (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2})\ , \quad E_3 = (\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{3})\ , \quad \ldots$$

dann ist $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von $(0, 1)$ und $[\frac{1}{10}, \frac{1}{2}]$ in $\mathbb{R}$, aber nicht von $[0, \frac{1}{2}]$.

Definition 3.3.3. Sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $K \subset X$ heisst *kompakt (in X)* genau dann, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

■ "endliche Teilüberdeckung" heisst Folgendes: Wenn $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von K ist, dann gibt es endlich viele Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$, sodass

$$K \subset E_{\alpha_1} \cup \cdots \cup E_{\alpha_n} .$$

■ Die zentrale Idee hier ist, dass diese Endlichkeitseigenschaft für *jede* offene Überdeckung von K gilt. (Warum macht es keinen Sinn, in der Definition oben zu sagen „K heißt kompakt in X genau dann, wenn es eine endliche offene Überdeckung von K in X gibt.“?) ?

■ Mit Definition 3.3.3 ist es leicht, zu zeigen, dass eine Menge *nicht* kompakt ist (gebe eine einzige offene Überdeckung an, die keine endliche Teilüberdeckung hat). Aber es ist schwer, zu zeigen, dass eine Menge kompakt ist (prüfe etwas für *alle* offenen Überdeckungen).

Beispiel 3.3.4.

(1) $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt (die Überdeckung aus Beispiel 3.3.2 (3) hat keine endliche Teilüberdeckung).

(2) $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus Beispiel 3.3.2 (5) ist offene Überdeckung von $[\frac{1}{10}, \frac{1}{2}]$ und hat die endliche Teilüberdeckung

$$\{\ E_1 = (\tfrac{1}{3}, 1), \ldots, E_9 = (\tfrac{1}{11}, \tfrac{1}{9})\} .$$

(Das beweist *noch nicht*, dass $[\frac{1}{10}, \frac{1}{2}]$ kompakt ist, dazu muss man die Eigenschaft für *jede* offene Überdeckung nachweisen, nicht nur für eine.)

(3) $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus Beispiel 3.3.2 (5) ist offene Überdeckung von $(0, 1)$ und hat keine endliche Teilüberdeckung. Also ist $(0, 1)$ nicht kompakt.

(4) Jede endliche Teilmenge $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ ist kompakt. (Warum?) ?

Satz 3.3.5. Sei X ein metrischer Raum und seien $K \subset Y \subset X$. Dann ist K kompakt in X genau dann, wenn K in Y kompakt ist.

Der Beweis ist Selbststudium, siehe [Satz 2.33 aus Rudin]. Dort wird folgendes Lemma benutzt (auch Selbststudium, siehe [Satz 2.30 aus Rudin]).

Lemma 3.3.6. Sei X ein metrischer Raum und $Y \subset X$. Dann ist $E \subset Y$ offen in Y genau dann, wenn es ein offenes $G \subset X$ gibt mit $E = G \cap Y$.

■ Sei X ein metrischer Raum und $V \subset X$. Die Aussage "V ist kompakt" ist unabhängig von der umgebenden Menge X. Dagegen hängen die Aussagen "V ist offen" oder "V ist abgeschlossen" von der umgebenden Menge X ab.

Satz 3.3.7. Sei X ein metrischer Raum und $K \subset X$ kompakt. Dann ist K abgeschlossen in X.

Beweis. Wir zeigen: $\complement_X K$ ist offen in X. Sei $p \in X$, $p \notin K$. Für $x \in K$ setze

$$V_x = U_r(p) \quad , \quad W_x = U_r(x) \quad \text{mit } r = \tfrac{1}{2} d(x,p) \; .$$

Dann $V_x \cap W_x = \emptyset$ (Warum? Kann man auch $r = \frac{1}{3} d(x,p)$ nehmen?) und ?
$K \subset \bigcup_{x \in K} W_x$. Somit ist $\{W_x\}_{x \in K}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilberdeckung, d.h. es gibt $\{x_1, \ldots, x_n\} \in K$, sodass

$$K \subset W_{x_1} \cup \cdots \cup W_{x_n} \; .$$

Sei $V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$. Es gilt
1) V ist eine Umgebung von p (mit Radius $\frac{1}{2} \min(d(p,x_1), \ldots, d(p,x_n))$).
2) $V \cap W_{x_k} = \emptyset$ (da $V \subset V_{x_k}$ und $V_{x_k} \cap W_{x_k} = \emptyset$).
Es folgt, dass

$$V \cap (W_{x_1} \cup \cdots \cup W_{x_n}) = \emptyset \; ,$$

also auch $V \cap K = \emptyset$. Somit $V \subset \complement_X K$, und p ist innerer Punkt von $\complement_X K$. □

■ Die Kontraposition des Satzes ist nützlich: Ist $A \subset X$ nicht abgeschlossen, dann ist A auch nicht kompakt. Z.B. sind deshalb $(0,1] \subset \mathbb{R}$ oder $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ nicht kompakt.
Die Umkehrung des Satzes gilt nicht. Z.B. ist $\mathbb{R}$ abgeschlossen aber nicht kompakt. Oder $(0,1]$ ist abgeschlossen in $(0,1]$, aber nicht kompakt.

Satz 3.3.8. Sei K kompakt und $V \subset K$ abgeschlossen in K. Dann ist V kompakt.

Beweis. Da V abgeschlossen ist in K, ist $\complement_K V$ offen in K. Sei $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von V. Dann ist $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ zusammen mit $\complement_K V$ eine offene Überdeckung von K. Sei

$$E_{\alpha_1} \cup \cdots \cup E_{\alpha_n} \cup \complement_K V$$

eine endliche Teilüberdeckung von K. (Diese existiert, da K kompakt ist. Wenn $\complement_K V$ nicht Teil der endlichen Teilüberdeckung ist, können wir es in jedem Fall dazunehmen und erhalten wieder eine endliche Teilüberdeckung von K.) Da $\complement_K V \cap V = \emptyset$, ist $E_{\alpha_1} \cup \cdots \cup E_{\alpha_n}$ eine endliche Teilüberdeckung von V. □

Satz 3.3.9. Sei K kompakt und $E \subset K$ eine unendliche Teilmenge. Dann hat E einen Häufungspunkt in K.

Beweis. Angenommen, E hat keinen Häufungspunkt in K. Dann ist E abgeschlossen in K (jeder Häufungspunkt von E in K liegt in K). Also ist E selber kompakt (Satz 3.3.8). Für jedes $e \in E$ gibt es eine Umgebung U_e von e, sodass $U_e \cap E = \{e\}$ (oder e wäre ein Häufungspunkt von E). $\{U_e\}_{e\in E}$ ist eine offene Überdeckung von E. Aber $\{U_e\}_{e\in E}$ hat keine endliche Teilüberdeckung (Warum?). Widerspruch (zu "E ist kompakt"). □ ?

Satz 3.3.10. Seien I_n, $n \in \mathbb{N}$ nicht-leere geschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$, sodass $I_{n+1} \subset I_n$. Dann ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ nicht leer.

Beweis. Sei $I_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n \leq b_n$ (falls $a_n > b_n$ wäre I_n nach Definition leer). Setze $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Da $I_m \subset I_n$ für alle $m \geq n$ (warum?) gilt $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$. Somit ist jedes b_n eine obere Schranke für A. Ferner ist A nicht leer, also existiert $x = \sup A$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq x \leq b_n$ (Warum?). In anderen Worten, für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x \in I_n$. □ ?

■ Für offene Intervalle gilt die Aussage im obigen Satz nicht. (Können Sie ein Gegenbeispiel angeben?) ?

Definition 3.3.11. Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine k-Zelle ist eine Untermenge von $\mathbb{R}^k$ der Form $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $a_i < b_i$.

■ Ausgeschrieben heisst dies, dass $I \subset \mathbb{R}^k$ eine k-Zelle ist genau dann, wenn $a_i < b_i$ existieren, sodass

$$I = \left\{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \middle| \text{ für alle } 1 \leq i \leq k \text{ gilt } a_i \leq x_i \leq b_i\right\} .$$

Eine k-Zelle ist nie leer.

Beispiel 3.3.12. Eine 1-Zelle ist ein (nicht-leeres) geschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$, eine 2-Zelle ist ein Rechteck in $\mathbb{R}^2$, eine 3-Zelle ist ein Quader in $\mathbb{R}^3$.

Satz 3.3.13. Sei $k \in \mathbb{N}$ fix und I_n, $n \in \mathbb{N}$ k-Zellen, sodass $I_{n+1} \subset I_n$. Dann ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ nicht leer.

Beweis. Sei $I_n = [a(n)_1, b(n)_1] \times \cdots \times [a(n)_k, b(n)_k]$. Die Bedingung $I_{n+1} \subset I_n$ impliziert $[a(n+1)_i, b(n+1)_i] \subset [a(n)_i, b(n)_i]$. Nach Satz 3.3.10 gibt es $x_i \in \mathbb{R}$, sodass $a(n)_i \leq x_i \leq b(n)_i$. Also $(x_1, \ldots, x_k) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. □

Satz 3.3.14. Jede k-Zelle ist kompakt.

Beweis. Sei I eine k-Zelle. Angenommen, $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ist eine offene Überdeckung von I, die keine endliche Teilüberdeckung enthält. Sei $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$. Setze

$$\delta = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_k - a_k)^2}\ .$$

Dann gilt für $x, y \in I$, dass

$$|x - y| = \sqrt{(x_1{-}y_1)^2 + \cdots + (x_k{-}y_k)^2} \leq \sqrt{(b_1{-}a_1)^2 + \cdots + (b_k{-}a_k)^2} = \delta\ ,$$

da $(x_i - y_i)^2 \leq (b_i - a_i)^2$. Setze $c_i = \frac{a_i+b_i}{2}$. Die Intervalle $[a_i, c_i]$ und $[c_i, b_i]$ geben 2^k k-Zellen Q_j mit $\bigcup_j Q_j = I$. Mindestens ein Q_j hat keine endliche Teilüberdeckung von $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Definiere I_1 als dieses Q_j. Für $x, y \in I_1$ gilt $|x - y| \leq \frac{1}{2}\delta$. Wiederhole die obige Konstruktion mit I_1 statt I. Man erhält rekursiv Intervalle I_n, $n \in \mathbb{N}$, mit
1) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$,
2) I_n hat keine endliche Teilüberdeckung von $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$,
3) $x, y \in I_n \ \Rightarrow\ |x - y| \leq 2^{-n}\delta$.
Sei $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ (existiert nach Satz 3.3.13). Es gibt ein $\alpha \in A$, sodass $p \in E_\alpha$ (existiert, da $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ die k-Zelle I überdeckt). Es gibt $r > 0$, sodass $U_r(p) \subset E_\alpha$ (da E_α offen ist in $\mathbb{R}^k$). Wähle $n \in \mathbb{N}$, sodass $2^{-n}\delta < r$. Es gilt $I_n \subset E_\alpha$, da

$$x \in I_n \ \Rightarrow\ |x - p| \leq 2^{-n}\delta \ \Rightarrow\ |x - p| < r \ \Rightarrow\ x \in U_r(p) \ \Rightarrow\ x \in E_\alpha\ ,$$

Widerspruch (zu „I_n hat keine endliche Teilüberdeckung“). □

Definition 3.3.15. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $V \subset X$ ist *beschränkt* genau dann, wenn es ein $q \in X$ und ein $R \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $d(v, q) < R$ für alle $v \in V$.

■ In Quantorenschreibweise liest sich die Definition so:

$$V \text{ beschränkt} \quad \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \quad \Big(\exists q \in X, R \in \mathbb{R} \ :\ v \in V \ \Rightarrow\ d(v, q) < R\Big)\ .$$

Man zeigt (Wie?), dass auch gilt: ?

$$V \text{ beschränkt} \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\forall q \in X\ \exists R \in \mathbb{R} \ :\ v \in V \ \Rightarrow\ d(v, q) < R\Big)\ .$$

Beispiel 3.3.16.

(1) $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt ($q = 0$, $R = 2$).

(2) $\mathbb{R}$ ist nicht beschränkt.

(3) $D = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ ist beschränkt, aber $L = \{z \in \mathbb{C} | 0 < \operatorname{Re} z \leq 1\}$ ist nicht beschränkt.

(4) Jede k-Zelle ist beschränkt (Warum?). ?

Satz 3.3.17. Sei $E \subset \mathbb{R}^k$. Es sind äquivalent:

(i) E ist abgeschlossen und beschränkt.

(ii) E ist kompakt.

(iii) Jede unendliche Untermenge von E hat einen Häufungspunkt in E.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii):
E ist beschränkt. Also gibt es eine k-Zelle I, sodass $E \subset I$. Damit ist E eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge I (Satz 3.3.14). Nach Satz 3.3.8 ist E kompakt.
(ii) $\Rightarrow$ (iii):
Satz 3.3.9.
(iii) $\Rightarrow$ (i):
Angenommen, E sei nicht beschränkt. Dann gibt es $x_n \in E$, $|x_n| > n$. Sei $A = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$. A ist unendlich und hat keine Häufungspunkte in $\mathbb{R}^k$ (Warum?). Widerspruch zur Voraussetzung in (iii). Also ist E beschränkt. ?

Angenommen, E sei nicht abgeschlossen. Dann gibt es $p \in \mathbb{R}^k$, $p \notin E$, sodass p ein Häufungspunkt von E ist. Dann gilt $U_r(p) \cap E \neq \emptyset$ für alle $r > 0$. Also gibt es für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $x_m \in E$, sodass $|x_m - p| \leq \frac{1}{m}$. Sei $A = \{x_m | m \in \mathbb{N}\} \subset E$. A ist unendlich (Warum?). Sei q ein Häufungspunkt ? von A in E (existiert nach Voraussetzung in (iii)). Wir werden zeigen, dass $p = q$, im Widerspruch zu $p \notin E$. Es folgt dann, dass E abgeschlossen ist, was (iii)$\Rightarrow$(i) beweist.
Angenommen $p \neq q$. Wähle m, sodass $\frac{1}{m} < \frac{1}{2}|p-q|$. Wegen der Dreiecksungleichung gilt $d(p,q) \leq d(p,x_n) + d(x_n,q)$, und somit auch $|p-q| - d(p,x_n) \leq d(x_n,q)$. Für alle $n \geq m$ folgt dann, dass $|p-q| - \frac{1}{2}|p-q| \leq d(x_n,q)$, da $d(p,x_n) \leq \frac{1}{2}|p-q|$. Somit gilt für alle $n \geq m$, dass $d(x_n,q) \geq \frac{1}{2}|p-q|$. Es kann also höchstens endlich viele x_n geben mit $d(x_n,q) < \frac{1}{2}|p-q|$, also ist q kein Häufungspunkt von A (Warum?), Widerspruch. □ ?

■ Die Äquivalenz von (i) und (ii) heisst auch „Satz von Heine-Borel“.

Satz 3.3.18. (Weierstraß) Jede beschränkte unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}^k$ hat einen Häufungspunkt in $\mathbb{R}^k$.

Beweis. (Siehe auch [Satz 2.42 aus Rudin].) Sei A die Menge. Dann $A \subset I$ für eine k-Zelle I (da A beschränkt). I ist kompakt, also gilt (ii) von Satz 3.3.17, und somit auch (iii). Also hat A einen Häufungspunkt in I. □

4 Folgen und Reihen

Einige Beispiele von Reihen, die wir im Laufe der Vorlesung behandeln werden.

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$
2. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$
3. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2.$
4. $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{1}{2} \ln 2.$
5. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$
6. $\zeta(s) = (2^{1-s} - 1)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$ für $s \in \mathbb{C}$ und $\operatorname{Re} s > 0$, $s \neq 1$.
   (Eigentlich ist ζ definiert als $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ für $\operatorname{Re} s > 1$ und dann als „analytische Fortsetzung“, aber dann kann man die Vermutung unten nicht so einfach formulieren.)

■ Vermutung: Für $s \in \mathbb{C}$ und $\operatorname{Re} s > 0$ gilt: $\zeta(s) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ (Riemann Vermutung, siehe www.claymath.org/millennium-problems).

4.1 Konvergenz

Definition 4.1.1. Sei X eine Menge. Eine *Folge (in X)* ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \to X$.

Wir schreiben $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, oder (f_n), oder $f_1, f_2, f_3, \ldots$ statt $f : \mathbb{N} \to X$.

Definition 4.1.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_n) *konvergiert (in X)* genau dann, wenn ein $p \in X$ mit folgender Eigenschaft existiert: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ gilt

$$d(x_n, p) < \varepsilon \ .$$

Wir sagen (x_n) *konvergiert gegen* p und schreiben $x_n \to p$, oder

$$\lim_{n \to \infty} x_n = p \ .$$

In diesem Fall nennen wir p den *Grenzwert* der Folge.

Falls (x_n) nicht konvergiert, sagen wir (x_n) *divergiert.*

■ Wir schreiben die Definition 4.1.2 noch einmal mit Formeln auf:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert in } X \quad \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists\, p \in X \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \geq N \;:\; d(x_n, p) < \varepsilon \quad .$$

und

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } p \in X \quad \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \geq N \;:\; d(x_n, p) < \varepsilon \quad .$$

(Wie lauten die Negationen dieser Aussagen? – Diese sagen dann, wie man beweist, dass eine Folge *nicht* (gegen p) konvergiert.) ?
(Was passiert, wenn man die Quantoren anders setzt? Gibt es z.B. Folgen, die der Bedingung „$\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : d(x_n, p) < \varepsilon$“ gehorchen, aber nicht konvergieren?) ?
■ Bei der Definition einer konvergenten Folge kommt es nicht nur auf die Menge X, sondern auch auf die Metrik d an.

Satz 4.1.3. Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (X, d). $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen ein $p \in X$, wenn *jede* Umgebung von p bis auf endlich viele Ausnahmen *alle* Glieder von $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält.

Beweis. Siehe [Satz 3.2 (a) aus Rudin]. (In der Vorlesung wurde „$\Rightarrow$“ angeschrieben. Wie geht „$\Leftarrow$“?) ? □

Mit diesem Satz machen wir uns klar, was Konvergenz einer Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ bedeutet:

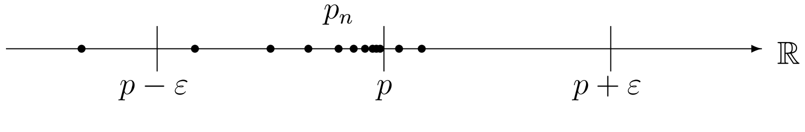
Beispiel 4.1.4. Sei $X = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit der Betragsmetrik

$$d(x, y) \;=\; |x - y| \quad \text{für} \quad x, y \in X \quad .$$

(1) $X = \mathbb{R}$: Für $p \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$U_\varepsilon(p) \;=\; (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$$

und “$\lim_{n\to\infty} p_n \;=\; p$” besagt:

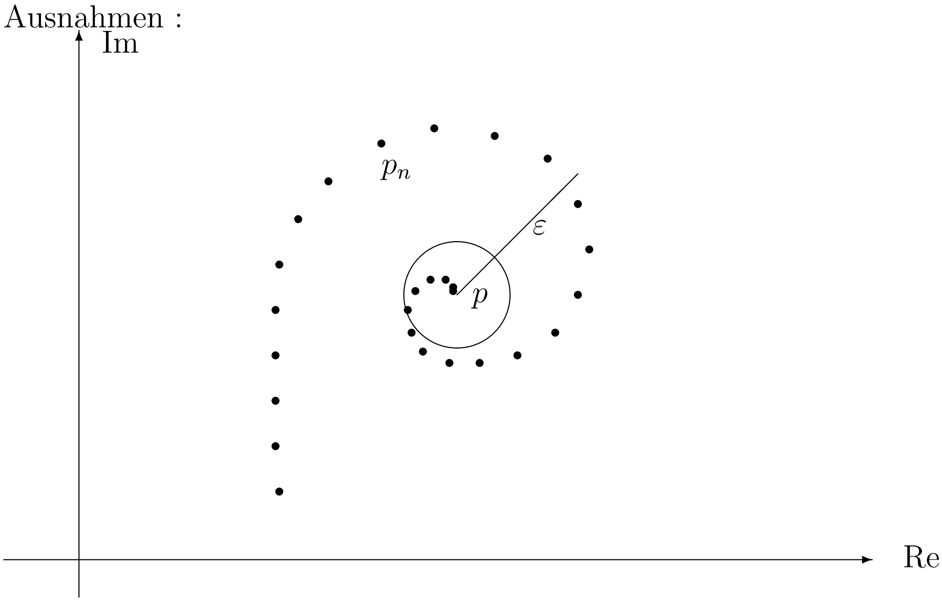


Egal, wie klein Sie das ε (mit $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$) wählen: Im Intervall $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ liegen alle Folgenglieder mit Ausnahme höchstens endlich vieler, nämlich derjenigen mit einem Index $n < N$, wobei das N von ε abhängt.

(2) $X = \mathbb{C}$: Umgebungen sind von der Form

$$U_\varepsilon(p) = \{ y \in \mathbb{C} \mid |p - y| < \varepsilon \} ,$$

also der Kreis um p mit Radius ε in der komplexen Ebene. Die Aussage „ $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ “ bedeutet: In jedem noch so kleinen Kreis um p mit Radius $\varepsilon > 0$ liegen alle Folgenglieder, mit höchstens endlich vielen Ausnahmen :



Satz 4.1.5. Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (X, d), und seien p, $p' \in X$. Konvergiert $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowohl gegen p als auch gegen p', dann ist $p = p'$. Mit anderen Worten: Der Grenzwert von $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, wenn er existiert, eindeutig bestimmt.

Beweis. Siehe [Satz 3.2 (b) aus Rudin]. □

Definition 4.1.6. Eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum X heißt *beschränkt*, wenn die Menge $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in X beschränkt ist.

Beispiel 4.1.7. Betrachte Folgen in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ mit Metrik $d(x, y) = |x - y|$:

(1) Für $s_n := \frac{1}{n}$ gilt $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ (Warum?) ?

(2) Die Folge $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Beweis. Wir müssen die Negation der Konvergenzaussage zeigen:

$$\forall\, p \in \mathbb{C}\, \exists\, \varepsilon > 0\, \forall\, N \in \mathbb{N}\, \exists\, n \geq N \,:\, |n^2 - p| \geq \varepsilon \,.$$

Sei also $p \in \mathbb{C}$, dann nehmen wir $\varepsilon := 1$. Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$n \geq \max\{\sqrt{|p|+1}, N\} .$$

Dann $n \geq N$ und $n \geq \sqrt{|p|+1}$. Somit auch

$$|n^2 - p| \;\geq\; \big|n^2 - |p|\big| \;=\; n^2 - |p| \;\geq\; |p| + 1 - |p| \;=\; 1 .$$

□

Kürzer wird der Beweis der Divergenz mit dem folgenden Satz 4.1.8 (c), denn die Menge $\{ n^2 \mid n \in \mathbb{N} \}$ ist unbeschränkt.

(3) Die Folge $\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$.

Beweis. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann nehmen wir uns ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ gilt

$$\left|1 - \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)\right| = \frac{|(-1)^n|}{n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon .$$

□

Dabei gilt: Die Menge $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ ist beschränkt und unendlich.

(4) Die Folge $(i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und divergent. Die Menge

$$\{ i^n \mid n \in \mathbb{N} \} \quad \text{ist endlich, also beschränkt.}$$

(5) Die Folge $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1.

Satz 4.1.8. Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (X, d). Dann gilt:

(i) Wenn $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

(ii) Ist $E \subset X$ und p ein Häufungspunkt von E, dann existiert eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E mit $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.

Beweis. siehe [Satz 3.2 (c), (d) aus Rudin]. □

Bei Folgen in $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ versucht man, den Grenzwert, statt direkt mit Definition 4.1.2, mit folgenden Rechenregeln zu berechnen:

Satz 4.1.9. Seien $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen komplexer Zahlen mit

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \quad , \quad \lim_{n\to\infty} t_n = t \quad .$$

Dann gilt:

(i) $\lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = s + t$.

(ii) Für jedes $c \in \mathbb{C}$ gilt $\lim_{n\to\infty} cs_n = cs$, $\lim_{n\to\infty}(c + s_n) = c + s$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} s_n \cdot t_n = s \cdot t$.

(iv) Wenn $s \neq 0$ ist und für alle $n \in \mathbb{N} : s_n \neq 0$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{s} \quad .$$

Beweis. siehe [Satz 3.3 aus Rudin]. □

Satz 4.1.10. Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, und sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K^d. Schreibe $P_n = (p_{n,1}, \dots, p_{n,d})$ mit $p_{n,i} \in K$. Es sind äquivalent:

(i) $\lim_{n\to\infty} P_n = Q$ mit $Q = (q_1, \dots, q_d)$.

(ii) Für $i = 1, \dots, d$ gilt: $\lim_{n\to\infty} p_{n,i} = q_i$.

(→ Beweis als Übung.)

Definition 4.1.11. Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum X, und sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen, sodass $n_1 < n_2 < \dots$. Dann heißt $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von (p_n). Falls (p_{n_k}) konvergiert, so nennt man den Grenzwert einen *Teilfolgengrenzwert*.

Beispiel 4.1.12.

(1) Für $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $p_n = \frac{1}{n}$ und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_k = 2^k$ ist $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (2^{-k})_{k\in\mathbb{N}}$.

(2) Für $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $p_n = (-1)^n$ und und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_k = 2k + 1$ ist $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (-1)_{k\in\mathbb{N}}$.

(3) Sei (p_n) eine Folge. Dann $p_n \to p$ genau dann, wenn $p_{n_k} \to p$ für jede Teilfolge von (p_n). (Warum? Dürfte da auch stehen „…für *mindestens eine* Teilfolge von (p_n)“?f) ?

Satz 4.1.13.

(i) Jede Folge in einem kompakten metrischen Raum X enthält eine in X konvergente Teilfolge.

(ii) Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^d$ enthält eine konvergente Teilfolge.

Beweis. siehe [Satz 3.6 aus Rudin]. □

(Können Sie Gegenbeispiele finden für „Jede Folge in einem metrischen Raum entält eine konvergente Teilfolge“ und für „Jede beschränkte Folge in einem metrischen Raum enthält eine konvergente Teilfolge“?) ?

4.2 Cauchy Folgen

Definition 4.2.1. Eine Folge (p_n) in einem metrischen Raum X heißt *Cauchy Folge*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $m, n \geq N$ gilt:

$$d(p_m, p_n) < \varepsilon \ .$$

(Können Sie eine Folge $\mathbb{R}$ finden, für die gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N$: $d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon$, aber die trotzdem keine Cauchy-Folge ist?) ?

Beispiel 4.2.2.

(1) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent in $\mathbb{R}$ und eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. (Für alle $\varepsilon > 0$ wähle $N > \frac{2}{\varepsilon}$, dann gilt für $m, n \geq N$ dass $|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}| \leq |\frac{1}{m}| + |\frac{1}{n}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.)

(2) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht konvergent in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, aber es ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(3) Sei (x_n) rekursiv definiert durch $x_1 = 2$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + x_n^{-1}$. Diese Folge ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, nicht konvergent in $\mathbb{Q}$, aber konvergent in $\mathbb{R}$ (gegen $\sqrt{2}$, $\rightarrow$ Übung).

Satz 4.2.3. Sei X ein metrischer Raum und (p_n) eine Cauchy-Folge in X. Dann ist (p_n) beschränkt.

Beweis. Wähle $\varepsilon = 1$. Da (p_n) eine Cauchy-Folge ist, gibt es $N > 0$, sodass für alle $m, n \geq N$ gilt $d(p_m, p_n) < 1$. Wähle $q = p_N$ und

$$R = \max(d(p_1, q), d(p_2, q), \ldots, d(p_{N-1}, q), 1) + 1$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Falls $n < N$, dann $d(p_n, q) < R$ (nach Konstruktion von R). Falls $n \geq N$, dann $d(p_n, q) \leq 1$ (nach Konstruktion von N). Da $R > 1$ gilt somit für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $d(p_n, q) < R$. Somit ist (p_n) beschränkt. □

Satz 4.2.4. Sei X ein metrischer Raum.

(i) Jede in X konvergente Folge ist eine Cauchy Folge.

(ii) Ist X kompakt und (p_n) eine Cauchy Folge in X, so konvergiert (p_n) gegen einen Punkt aus X.

(iii) In $\mathbb{R}^k$ konvergiert jede Cauchy Folge.

Beweis. wie in [Satz 3.11 aus Rudin], ausser:
(ii) Nach Satz 4.1.13 (a) gibt es eine Teilfolge (p_{n_k}) von (p_n) und $q \in X$ sodass

$$\lim_{k\to\infty} p_{n_k} = q$$

Wir werden zeigen, dass sogar $\lim_{n\to\infty} p_n = q$. Sei $\varepsilon > 0$. Da $p_{n_k} \to q$ gibt es $K > 0$, sodass für alle $k \geq K$ gilt, dass $d(p_{n_k}, q) < \frac{\varepsilon}{2}$. Da (p_n) eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $M > 0$, sodass

$$\forall n, m \geq M : d(p_m, p_n) < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Wähle $N = \max(M, n_K)$. Für alle $n \geq N$ gilt: es gibt $l \geq K$, sodass $n_l \geq n$, und mit diesem n_l gilt weiter

$$d(p_n, q) \leq d(p_n, p_{n_l}) + d(p_{n_l}, q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

□

Definition 4.2.5. Ein metrischer Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, heißt *vollständig.*

Beispiel 4.2.6.

(1) $\mathbb{R}$ ist vollständig. $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig.

(2) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nicht vollständig. $\mathbb{R} \setminus (0, 1)$ ist vollständig. (Warum?) ?

(3) $\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{C}^k$ sind vollständig.

(4) Jeder kompakte Raum ist vollständig.

(5) Eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raumes ist vollständig. (Warum? Was ist mit offenen Teilmengen? Sind diese immer / manchmal / nie vollständig?) ?

4.3 Monotone Folgen, einige Grenzwerte

Definition 4.3.1. Eine Folge (s_n) von reellen Zahlen heißt

(i) *monoton steigend*, falls $s_n \leq s_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(ii) *monoton fallend*, falls $s_n \geq s_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(iii) *monoton*, falls sie monoton steigend oder monoton fallend ist.

Satz 4.3.2. Eine monotone Folge in $\mathbb{R}$ konverigert genau dann, wenn sie beschränkt ist.

Beweis. siehe [Satz 3.14 aus Rudin]. □

Lemma 4.3.3. Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Sei (v_n) eine Folge in K^d und (s_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Angenommen, es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ gilt

$$|v_n| \leq s_n \ .$$

Falls $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$, dann auch $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

Der Beweis ist →Übung.

Beispiel 4.3.4. Betrachte die Folge $v_n = (i^n/n, (-1)^n/n^2) \in \mathbb{C}^2$. Dann

$$|v_n| = \sqrt{n^{-2} + n^{-4}} = \frac{\sqrt{1+n^{-2}}}{n} \leq \frac{2}{n} \ .$$

Mit $s_n = \frac{2}{n}$ sehen wir also, dass die Folge (v_n) gegen 0 konvergiert.

Satz 4.3.5.

(i) Für $p > 0$ ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

(ii) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Beweis.

(i) Zettel 2, Aufgabe 4.2: Für $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Fall 1: $p > 1$. Setze $x_n = \sqrt[n]{p} - 1$. Dann $x_n > 0$ (Warum?). Dann auch $p = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n$ und somit ?

$$x_n \leq \frac{p-1}{n} \ .$$

Mit Lemma 4.3.3 folgt $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, und daher auch $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

Fall 2: $p = 1$. Klar.

Fall 3: $0 < p < 1$. Dann $q := 1/p > 1$ und mit Satz 4.1.9 folgt Fall 3 aus Fall 1. (Details?) ?

(ii) Setze $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Dann wieder $x_n \geq 0$ und wir schätzen ab: Für $n \geq 2$ gilt

$$n = (1+x_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_n^k \geq 1+nx_n+\frac{n(n-1)}{2}x_n^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 .$$

Dann aber auch (für $n \geq 2$)

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} ,$$

Lemma 4.3.3 gibt $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, also auch $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

□

4.4 Limes Superior und Limes Inferior

Definition 4.4.1. Sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Wir schreiben

(i) $x_n \to \infty$ („die Folge divergiert gegen $+\infty$), falls gilt: Für jedes $M \in \mathbb{R}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n > M$ für alle $n \geq N$.

(ii) $x_n \to -\infty$ („die Folge divergiert gegen $-\infty$), falls gilt: Für jedes $M \in \mathbb{R}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n < M$ für alle $n \geq N$.

■ Falls für eine Folge gilt, dass $x_n \to \pm\infty$, so bedeutet dies insbesondere, dass die Folge *nicht* konvergiert. Das ist nicht zu verwechseln mit $x_n \to x$ für ein $x \in \mathbb{R}$, was bedeutet, dass die Folge gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

■ Wir ordnen die Menge $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $-\infty < x < +\infty$. Wir legen fest, dass eine Menge, die $+\infty$ (bzw. $-\infty$) enthält, nicht nach oben (bzw. unten) beschränkt ist. Für eine nicht-leere Teilmenge $E \subset \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ definieren wir

$$\sup(E) = \begin{cases} +\infty & \text{falls } E \text{ nicht nach oben beschränkt} \\ \sup(E \setminus \{-\infty\}) & \text{falls } E \text{ nach oben beschränkt und } E \\ & \qquad \text{mindestens eine reele Zahl enthält} \\ -\infty & \text{falls } E = \{-\infty\} \end{cases}$$

und genauso

$$\inf(E) = \begin{cases} -\infty & \text{falls } E \text{ nicht nach unten beschränkt} \\ \inf(E \setminus \{+\infty\}) & \text{falls } E \text{ nach unten beschränkt und } E \\ & \qquad \text{mindestens eine reele Zahl enthält} \\ +\infty & \text{falls } E = \{+\infty\} \end{cases}$$

■ Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und

$$E := \{x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \mid \text{ es gibt eine Teilfolge } (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ mit } x_{n_k} \to x \}$$

(Hierbei sind $\pm\infty$ als Werte für x im Sinne der obigen Definition erlaubt.)

Beispiel 4.4.2.

(1) Für $x_n = \frac{1}{n}$ gilt $E = \{0\}$.

(2) Für $x_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$ gilt $E = \{+1, -1\}$.

(3) Für $x_n = n$ gilt $E = \{\infty\}$.

(4) Für $x_n = (-1)^n\, n$ gilt $E = \{+\infty, -\infty\}$.

(5) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ eine bijektive Abbildung. Setze $x_n = f(n)$. Dann gilt $E = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. (Warum?) ?

Lemma 4.4.3. E ist nicht leer.

Beweis. Falls die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt ist, gibt es eine Teilfolge x_{n_k} mit entweder $x_{n_k} \to \infty$ oder $x_{n_k} \to -\infty$. Wenn die Folge beschränkt ist, dann hat sie eine konvergente Teilfolge nach Satz 4.1.13. □

Definition 4.4.4. Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und E wie oben definieren wir

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \sup(E) \qquad , \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n = \inf(E)\ .$$

Beispiel 4.4.5. Mit der gleichen Nummerierung wie oben gilt:

(1) $\limsup_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\liminf_{n\to\infty} x_n = 0$.

(2) $\limsup_{n\to\infty} x_n = 1$ und $\liminf_{n\to\infty} x_n = -1$.

(3) $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \infty$.

(4) $\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty$ und $\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

(5) $\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty$ und $\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

4.5 Reihen

Definition 4.5.1. Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K^d. Definiere eine neue Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K^d durch

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ .$$

(i) Statt $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schreiben wir auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

und nennen dies eine *unendliche Reihe* oder auch kurz *Reihe*. Manchmal schreiben wir auch kurz nur $\sum a_k$.

Die s_n heißen *Partialsummen der Reihe*. Die a_k heißen *Summanden* oder *Glieder der Reihe*.

(ii) Falls die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, mit Grenzwert s, so schreiben wir

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ .$$

Wir nennen s die *Summe der Reihe*. Divergiert die Folge (s_n), so sagen wir, die *Reihe ist divergent*.

■ *Achtung:* Die Schreibeweise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ macht noch keine Aussage über die Konvergenz. Die Aussage $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bedeutet also 1) die Reihe konvergiert, und 2) ihre Summe ist s.
■ Anstelle von K^n kann man in der Definition oben genausogut einen beliebigen K-Vektorraum V nehmen, der gleichzeitig ein metrischer Raum ist.

Beispiel 4.5.2.

(1) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert. (Siehe Kapitel 0.)

(2) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

(Denn nach Zettel 1, Aufgabe 3 ist die Folge (s_n) der Partialsummen nach oben beschränkt. Überdies ist die Folge (s_n) monoton steigend, und damit konvergent nach Satz 4.3.2).

(3) Für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ ($\rightarrow$ Übung).

(4) Mit (3) dann z.B. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$ (also auch $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$, wie in Kapitel 0 behauptet). Oder auch

$$0,9999\ldots \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} \;=\; 9 \cdot \Big(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\Big) \;=\; 1\;.$$

(5) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ divergiert.

Satz 4.5.3. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe in K^d.

(i) (Cauchy-Kriterium für Reihen) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall m \geq n \geq N \;\; : \;\; \Big|\sum_{k=n}^{m} a_k\Big| < \varepsilon\;.$$

(ii) Falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Der Beweis ist zum selber Überlegen (siehe [Satz 3.22 und 3.23 aus Rudin]). (Details?) ?

■ Die Umkehrung von Teil (ii) gilt nicht, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Satz 4.5.4. Eine Reihe mit nichtnegativen (rellen) Summanden konvergiert genau dann, wenn ihre Partialsummen eine beschränkte Folge bilden.

Der Beweis ist zum selber Überlegen (siehe [Satz 3.24 aus Rudin]). (Details?) ?

Satz 4.5.5. (Majorantenkriterium)

(i) Sei $\sum a_n$ eine Reihe in K^d (mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, wie gehabt), und sei $\sum c_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}$. Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n| \leq c_n$ für alle $n \geq N$, und konvergiert $\sum c_n$, dann konvergiert auch $\sum a_n$.

(ii) Seien $\sum b_n$ und $\sum c_n$ Reihen in $\mathbb{R}$. Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $b_n \geq c_n \geq 0$ für alle $n \geq N$, und divergiert $\sum c_n$, so divergiert auch auch $\sum b_n$.

Beweis. Siehe [Satz 3.25 aus Rudin]. □

■ Mit der Notation aus Satz 4.5.5: Aus $|a_n| \geq c_n$ und $\sum c_n$ divergent folgt *nicht*, dass auch $\sum a_n$ divergiert: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$. (Warum ist das ein Gegenbeispiel?) ?

Satz 4.5.6. Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$, sodass $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum a_n$ genau dann, wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$$

konvergiert.

Beweis. Siehe [Satz 3.27 aus Rudin]. □

(Allerdings sind die Summen der Reihen $\sum a_n$ und $\sum 2^k a_{2^k}$ im Allgemeinen verscheiden. Können Sie ein Beispiel angeben?) ?

■ Sei $p \in \mathbb{Q}$, $p > 0$ mit $p = a/b$, $a, b \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Definiere

$$x^p := \left(x^{\frac{1}{b}}\right)^a = \left(x^a\right)^{\frac{1}{b}} .$$

(Warum gilt die Gleichheit? Warum ist die Definition von der Wahl von a und b in $\mathbb{N}$ mit $p = a/b$ unabhängig?) ?
Wenn wir die Exponentialfunktion und Logarithmen behandelt haben (in Kapitel 5), können wir dies auch für $p \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren.

Satz 4.5.7. Sei $p \in \mathbb{Q}$, $p > 0$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergiert für $p > 1$ und divergiert für $p \leq 1$.

Beweis. Siehe [Satz 3.28 aus Rudin]. □

4.6 Wurzel- und Quotientenkriterium

Lemma 4.6.1. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $\limsup_{n\to\infty} x_n = \alpha \in \mathbb{R}$. Dann gibt es für alle $\beta > \alpha$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall n \geq N : x_n < \beta .$$

Beweis. Angenommen, $x_n \geq \beta$ für unendlich viele n. Dann gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \geq \beta$ für alle k. Da $\limsup_{n\to\infty} x_n \neq \infty$ ist (x_{n_k}) nach oben beschränkt.

Sei R eine obere Schranke. Dann $x_{n_k} \in [\beta, R]$ und nach Satz 4.1.13 gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l}} \in [\beta, R] ,$$

im Widerspruch zu $\alpha = \limsup_{n\to\infty} x_n$ und $\alpha < \beta$. □

Satz 4.6.2. (Wurzelkriterium) Sei $\sum a_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}^d$. Setze

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \ \in \ \mathbb{R} \cup \{\infty\} \ .$$

Dann gilt:

(i) Für $\alpha < 1$ konvergiert $\sum a_n$.

(ii) Für $\alpha > 1$ divergiert $\sum a_n$.

(iii) Für $\alpha = 1$ gibt es Reihen, die konvergieren, und Reihen, die divergieren.

Beweis. (i) Wähle $\beta \in \mathbb{R}$, sodass $\alpha < \beta < 1$. Nach Lemma 4.6.1 gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq N : \sqrt[n]{|a_n|} < \beta$. Dann $|a_n| < \beta^n$. Da $\beta < 1$ konvergiert $\sum \beta^n$ (geometrische Reihe) und nach dem Majorantenkriterium (Satz 4.5.5) auch $\sum a_n$.

(ii) Setze $x_n = \sqrt[n]{|a_n|}$.

Beh.: Es gibt ein $\beta > 1$ und eine Teilfolge x_{n_k}, sodass $x_{n_k} \to \beta$ (wobei $\beta = \infty$ zugelassen ist).
Bew.: Da $\alpha > 1$ und da α das Supremum aller Teilfolgengrenzwerte ist, gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \to \beta$ für ein β mit $\alpha \geq \beta > 1$ (oder 1 wäre bereits eine obere Schranke der Teilfolgengrenzwerte).

(Man hätte auch eine Teilfolge mit $x_{n_k} \to \alpha$ nehmen knnen, aber dann muss man erst zeigen, dass es eine solche gibt. Warum gibt es die? Anders gesagt: Warum enthält die Menge der Teilfolgengrenzwerte ihr Supremum?) ?

Es folgt, dass $x_n > 1$ für unendlich viele n. Also auch $(x_n)^n > 1$ für unendlich viele n. Da $(x_n)^n = |a_n|$ kann somit nicht gelten, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Nach Satz 4.5.3 (ii) divergiert $\sum a_n$.

(iii) $\sum 1/n$ und $\sum(-1)^n/n$ geben Beispiele. In beiden Fällen ist $\alpha = 1$, da $\lim_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{n} = 1$ (Satz 4.3.5). (Warum muss man hier keinen lim sup ausrechnen?) ?

□

Satz 4.6.3. (Quotientenkriterium) Sei $\sum a_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}^d$ mit $a_n \neq 0$ für alle n. Es gilt:

(i) Falls $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}| / |a_n| < 1$, so konvergiert die Reihe.

(ii) Falls es ein N gibt, sodass $|a_{n+1}| / |a_n| \geq 1$ für alle $n \geq N$, so divergiert die Reihe.

Beweis. Siehe [Satz 3.34 aus Rudin]. □

Beispiel 4.6.4.

(1) Sei $a_n = 2^{-n}$. Dann $\sqrt[n]{a_n} = 1/2$ und $a_{n+1}/a_n = 1/2$. Also konvergiert $\sum a_n$ sowohl nach dem Wurzelkriterium als auch nach dem Quotientenkriterium.

(2) Sei

$$x_n = \begin{cases} 2^{-n} & ;\ n \text{ gerade} \\ 3^{-n} & ;\ n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots$$

Dann

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \begin{cases} \frac{1}{2} & ;\ n \text{ gerade} \\ \frac{1}{3} & ;\ n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \begin{cases} \frac{1}{3}(2/3)^n & ;\ n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2}(3/2)^n & ;\ n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Also

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \infty\ .$$

Somit konvergiert die Reihe $\sum x_n$ nach dem Wurzelkriterium. Das Quotientenkriterium zeigt die Konvergenz nicht an. Die Divergenzaussage im Quotientenkriterium ist nicht anwendbar, da es kein N gibt mit $|x_{n+1}/x_n| \geq 1$ für alle $n \geq N$.

Bemerkung 4.6.5.

(1) Zu Teil (ii) von Satz 4.6.3: Aus $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}| \,/\, |a_n| \geq 1$ können wir nicht schließen, dass $\sum a_n$ divergiert, siehe Beispiel 4.6.4 (2).

Auch aus $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}| \,/\, |a_n| > 1$ kann man nicht auf Divergenz schließen. Ein Gegenbeispiel ist die Reihe $\sum a_n$ mit $a_{2k-1} = 2k^{-2}$ und $a_{2k} = k^{-2}$. Die Reihe konvergiert (und ist gleich $3\sum n^{-2}$), und es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}| \,/\, |a_n| = 2\ .$$

(2) Angenommen, der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}| \,/\, |a_n| =: \alpha$ existiert. Dann kann man das Quotientenkriterium ähnlicher zum Wurzelkriterium formulieren:

  (i) Für $\alpha < 1$ konvergiert $\sum a_n$.

  (ii) Für $\alpha > 1$ divergiert $\sum a_n$.

(iii) Für $\alpha = 1$ gibt es Reihen, die konvergieren, und Reihen, die divergieren.

(Wie folgt dies aus dem Quotientenkriterium? Warum ist Teil 1 jetzt kein Gegenbeispiel mehr?) ?

Nebenbemerkung zur Information: Das Quotientenkriterium lässt sich zwar leichter anwenden, aber das Wurzelkriterium ist besser. Genauer gesagt: Falls die Reihe $\sum a_n$ nach QK konvergiert, so konvergiert sie auch nach dem WK. Wenn das WK keine Konvergenzaussage über $\sum a_n$ macht, so macht auch das QK keine Konvergenzaussage. Dies folgt aus [Satz 3.37 aus Rudin].

4.7 Potenzreihen

Definition 4.7.1. Sei (c_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und sei $z \in \mathbb{C}$. Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n$$

heißt *Potenzreihe*, und die c_n heißen *Koeffizienten der Potenzreihe.*

■ Für eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ betrachte

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \ \in \ \mathbb{R} \cup \{\infty\} \ .$$

Wir vereinbaren, dass $1/\infty = 0$ und $1/0 = \infty$, und dass $x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Setze $R := \alpha^{-1} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Satz 4.7.2. Mit der Notation wie oben: Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ konvergiert für $|z| < R$ und divergiert für $|z| > R$.

Beweis. Siehe [Satz 3.39 aus Rudin]. □

■ R heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe. Für $|z| = R$ können wir keine allgemeine Aussage machen, ob die Reihe konvergiert oder divergiert hängt von den Koeffizienten der Potenzreihe ab, siehe Beispiele unten.

Bemerkung 4.7.3. Aus Satz 4.7.2 erhält man folgende Aussage:

> Angenommen, für ein $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Dann gilt für den Konvergenzradius, dass $R \geq |z|$.

(Warum? Und warum $\geq$ und nicht $>$?) ?

Beispiel 4.7.4.

(1) Die Potenzreihe $\sum n^n z^n$ hat Konvergenzradius $R = 0$.

(2) $\sum z^n/n!$ hat $R = \infty$
(Warum? Können Sie R über $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ berechnen? Wie kann ?
man $R = \infty$ einfach mit dem Quotientenkriterium beweisen?)

(3) Bei $|z| = R$ kann alles passieren:

   (a) $\sum z^n$ hat $R = 1$, und für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ divergiert die Reihe.

   (b) $\sum z^n/n$ hat $R = 1$, und für $z = 1$ divergiert die Reihe, aber für $z = -1$ konvergiert die Reihe.

   (c) $\sum z^n/n^2$ hat $R = 1$, und für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ konvergiert die
   Reihe. (Wie sieht man $R = 1$? Warum konvergiert die Reihe wie ?
   angegeben?)

4.8 Alternierende Reihen

Satz 4.8.1. Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und (b_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

(i) Die Folge (A_n) mit $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ist beschränkt.

(ii) Die Folge (b_n) ist monoton fallend und es gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \ .$$

Beweis. Siehe [Satz 3.41 und 3.42 aus Rudin]. □

Beispiel 4.8.2.

(1) *(Alternierende Reihen)* Sei (b_n) eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$, sodass $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \ .$$

Z.B. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ oder $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

(2) *(Potenzreihen am Rand der Konvergenz)* Sei $\sum c_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1. Die Folge (c_n) der Koeffizienten sei reell, monoton fallend, und erfülle $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, $z \neq 1$.

(Benutze Satz 4.8.1. Für $z \neq 1$ gilt $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, was beschränkt ist wegen $|z| = 1$.)

Z.B. $\sum z^n/n$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und $z \neq 1$.

4.9 Absolute Konvergenz und Umordnung

Definition 4.9.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^k$ oder $\mathbb{C}^k$. Wir sagen $\sum a_n$ *konvergiert absolut*, falls die Reihe $\sum |a_n|$ konvergiert.

Satz 4.9.2. Falls $\sum a_n$ absolut konvergiert, so konvergiert $\sum a_n$.

Beweis zum selber überlegen, siehe [Satz 3.45 aus Rudin]. (Details?) ?

Beispiel 4.9.3.

(1) $\sum(-1)^n/n^2$ konvergiert absolut, $\sum(-1)^n/n$ konvergiert nicht absolut, aber beide Reihen konvergieren.

(2) Reihen, die nach dem Majorantenkriterium, Wurzelkriterium oder Quotientenkriterium konvergieren, konvergieren auch absolut. Reihen, die nach Satz 4.8.1 konvergieren (z.B. alternierende Reihen) konvergieren nicht unbedingt absolut. (Warum gilt das alles?) ?

(3) Sei $\sum c_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ konvergiert die Reihe absolut. (Warum?) ?

Definition 4.9.4. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Setze $b_n := a_{k(n)}$. Dann nennt man die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine *Umordnung der Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beispiel 4.9.5. Umordnungen von Reihen können gegen verscheidene Werte konvergieren. Ein Beispiel ist $\sum(-1)^n/n$ und die Umordnung, die immer zwei ungerade und dann einen geraden Term nimmt ($\to$ Übung):

$$-1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{6} - \dots$$

Nebenbemerkung zur Information: Man kann zeigen [Satz 3.54 aus Rudin]: Sei $\sum a_n$ eine Reihe reeller Zahlen, die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Für jedes $p \in \mathbb{R}$ kann man eine Umordnung $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ finden, sodass $\sum a_{k(n)} = p$. Z.B. gibt es eine Umordnung von $\sum(-1)^n/n$, die gegen 2019 konvergiert.

Satz 4.9.6. Sei $\sum a_n$ eine absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen. Dann ist auch jede Umordnung dieser Reihe absolut konvergernt, und alle Umordnungen ergeben die gleiche Summe.

Beweis. Siehe [Satz 3.55 aus Rudin]. □

Bemerkung 4.9.7. Eine Anwendung von Satz 4.9.6: Sei $A \subset \mathbb{C}$ eine abzählbare Teilmenge mit folgender Eigenschaft: Es gibt ein $S \in \mathbb{R}$, sodass für jede *endliche* Teilmenge $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset A$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq S \ .$$

Sei nun $f : \mathbb{N} \to A$ eine Bijektion. Schreibe f_k statt $f(k)$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ absolut konvergent, und ihre Summe hängt nicht von der Wahl der Bijektion $f : \mathbb{N} \to A$ ab. Die Summe hängt somit nur von A ab, und wir können schreiben

$$\sum_{a \in A} a \ .$$

Wenn die Bedingung oben nicht erfüllt ist, macht diese Schreibweise keinen Sinn. (Warum gilt das alles? Was ist ein Beispiel, das die „macht keinen Sinn“ Behauptung illustriert?) ?

Nebenbemerkung zur Information: Den Satz oben nennt man auch den „kleinen Umordnungssatz“. Es gibt auch den „großen Umordnungssatz“. Dieser sagt folgendes: Sei $\{A_i\}_{i \in I}$ eine endliche oder abzählbare Familie von Teilmengen von $\mathbb{N}$, die disjunkt sind, und die $\bigcup_{i \in I} A_i = \mathbb{N}$ erfüllen. Sei $\sum a_n$ eine absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen mit $a = \sum a_n$. Dann ist auch jede Reihe $\sum_{n \in A_i} a_n$ absolut konvergent. Mit

$$b_i = \sum_{n \in A_i} a_n$$

gilt dann ferner

$$a = \sum_{i \in I} b_i \ ,$$

wobei auch diese Reihe absolut konvergent ist. Z.B. gilt also für eine absolut konvergente Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n \text{ gerade}}^{\infty} a_n + \sum_{n \text{ ungerade}}^{\infty} a_n \ ,$$

was man aus Satz 4.9.6 nicht folgern kann. Den großen Umordnungssatz versteht man am besten mit Maßtheorie und Lebesque-Integration, siehe [Satz 11.24 aus Rudin]. (Eine Summe oder eine Reihe ist ein Spezialfall von Lebesque-Integration für einen geeignet gewählten Maßraum.)

4.10 Produkte von Reihen

Gegeben zwei konvergente Folgen $c_n \to c$ und $d_n \to d$ in $\mathbb{C}$, so können wir leicht eine Folge angeben, die gegen cd konvergiert, nämlich $(c_n d_n)$ (Satz 4.1.9). Gegeben zwei konvergente Reihen $a = \sum a_n$ und $b = \sum b_n$, können wir eine Reihe angeben, die gegen ab konvergiert? Zumindest $\sum a_n b_n$ funktioniert im Allgemeinen nicht (Gegenbeispiel?). ?

Definition 4.10.1. Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Setze

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ nennt man das *Cauchy-Produkt (oder kurz Produkt) der Reihen* $\sum a_n$ *und* $\sum b_n$.

Bemerkung 4.10.2. Betrachte den Spezialfall, dass es N gibt mit $a_n = b_n = 0$ für alle $n \geq N$. Dann sind die c_n eindeutig dadurch festgelegt, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \ .$$

Hier sind wegen unserer Annahme alle Summen endlich. (Warum gilt die Formel oben?) Z.B. finden wir für die ersten paar z-Potenzen: ?

$$\begin{aligned}&\big(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\big)\big(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots\big)\\ &\quad = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) z^2 + \dots\end{aligned}$$

Für $z = 1$ erhält man das Cauchy-Produkt.

Satz 4.10.3. Seien $\sum a_n$ und $\sum b_n$ Reihen in $\mathbb{C}$. Es gelte

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut und hat die Summe A.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert und hat die Summe B.

Dann konvergiert das Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ der beiden Reihen, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB \ .$$

Beweis. Siehe [Satz 3.50 aus Rudin]. □

Nebenbemerkung zur Information: Wenn man im Satz oben die Bedingung weglässt, dass eine der beiden Reihen absolut konvergiert, dann kann das Cauchy-Produkt zweier konvergenter Reihen auch divergieren, siehe [Beispiel 3.49 aus Rudin]. Wenn aber alle drei Reihen konvergieren, dann gilt immer auch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$, siehe [Satz 3.51 aus Rudin].

Satz 4.10.4. Sei R_a der Konvergenzradius der Reihe $\sum a_n z^n$ und R_b der Konvergenzradius der Reihe $\sum b_n z^n$. Betrachte die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad \text{mit} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \ .$$

Dann:

(i) Der Konvergenzradius R_c der Reihe $\sum c_n z^n$ erfüllt $R_c \geq \min(R_a, R_b)$.

(ii) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \min(R_a, R_b)$ gilt

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \ .$$

Beweis. Für $|z| < \min(R_a, R_b)$ konvergieren die Reihen $\sum a_n z^n$ und $\sum b_n z^n$ absolut (Beispiel 4.9.3). Satz 4.10.3 (mit Ersetzungen $a_n \rightsquigarrow a_n z^n$ und $b_n \rightsquigarrow b_n z^n$) gibt die Behauptung in Teil (ii). Aus Bemerkung 4.7.3) folgt dann $R_c \geq |z|$ für alle $|z| < \min(R_a, R_b)$. Das impliziert Teil (i). □

■ Das Beispiel $A = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1-z)$ (Konvergenzradius $R_a = 1$) und $B = 1 - z$ (endliche Summe, also $B = \sum b_n z^n$ mit $b_n = 0$ für $n \geq 2$, Konvergenzradius $R_b = \infty$) zeigt, dass der Konvergenzradius des Produktes größer sein kann als $\min(R_a, R_b)$. Denn hier gilt $AB = 1 = \sum c_n$ mit $c_0 = 1$, $c_n = 0$ für $n \geq 1$, also $R_c = \infty$.

4.11 exp, sin, cos

Die *Exponentialreihe* ist definiert als

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

und hat Konvergenzradius ∞ (Beispiel 4.7.4). Also definiert $\exp(z)$ eine Funktion

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad x \longmapsto \exp(z) \ ,$$

die *Exponentialfunktion*. Bislang kennen wir nur den Wert $\exp(0) = 1$. Wir definieren die *Eulersche Zahl*

$$e := \exp(1) \ .$$

Über e können wir zumindest sagen, dass $e \in \mathbb{R}$ und $e > 1$. (Warum?) Aber Ihr Taschenrechner weiss schon mehr: $e = 2,71828\ldots$. ?

Satz 4.11.1. Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(x)\exp(y) = \exp(x + y)$.

Beweis. Da $\exp(x)$ und $\exp(y)$ absolut konvergieren, gilt nach Satz 4.10.3, dass

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} x^k y^{n-k} \Big) \ .$$

Für den Term in Klammern gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}(x+y)^n \ .$$

Somit erhalten wir

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n = \exp(x+y) \ .$$

□

Satz 4.11.2. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

(i) $\exp z \neq 0$,

(ii) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp z}$.

Der Beweis ist eine →Übung.

Korollar 4.11.3. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) > 0$ und $|\exp(ix)| = 1$.

Beweis. Falls $x \geq 0$ sind alle Summanden positiv, also $\exp(x) > 0$. Falls $x < 0$ haben wir $\exp(x) = 1/\exp(-x) > 0$.

Sei $z = \exp(ix)$. Dann $\bar{z} = \exp(\overline{ix}) = \exp(-ix)$. Somit $|z|^2 = z\bar{z} = \exp(ix)\exp(-ix) = 1$. □

Definiere die Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch, für $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos(z) \;=\; \frac{1}{2}\big(\exp(iz) + \exp(-iz)\big) \;, \quad \sin(z) \;=\; \frac{1}{2i}\big(\exp(iz) - \exp(-iz)\big) \;.$$

Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
&\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots \;, \\
&\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \;, \\
&\sin(z)^2 + \cos(z)^2 = 1 \;.
\end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}$ sind $\sin(x), \cos(x) \in \mathbb{R}$ und es gilt

$$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x) \quad , \quad |\sin(x)| \leq 1 \quad , \quad |\cos(x)| \leq 1 \;.$$

(Warum gilt das alles?) ?

5 Stetigkeit

Wir definieren Stetigkeit zunächst allgemein für Funktionen zwischen metrischen Räumen, dadurch werden die Begriffe klarer.

5.1 Grenzwerte von Funktionen

Erinnerung: Sei (X, d_X) ein metrischer Raum und $E \subset X$. Ein Element $p \in X$ heißt Häufungspunkt von E, falls in jeder Umgebung von p in X ein Element $e \in E$ liegt, sodass $e \neq p$. Oder äquivalent: In jeder Umgebung von p in X liegen unendlich viele Elemente von E.

Definition 5.1.1. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $E \subset X$ und

$$f \,:\, E \longrightarrow Y\,.$$

Sei p ein Häufungspunkt von E. Wenn es ein $q \in Y$ gibt, sodass gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in E \,:\, (0 < d_X(x,p) < \delta \implies d_Y(f(x), q) < \varepsilon)$$

dann schreiben wir

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \quad , \quad \text{oder}$$

$$f(x) \to q \quad \text{für} \quad x \to p$$

und sagen: *f hat an der Stelle p den Grenzwert q.*

(Für jedes $>$ und $<$ in der Definition oben kann man sich fragen, was passiert, wenn man statt dessen $\geq$ bzw. $\leq$ schreibt. Erhält man dann eine äquivalente Definition oder nicht? Schauen Sie sich insbesondere an, was passiert, wenn man $0 \leq d_X(x,p) < \delta$ betrachtet.) ?

Bemerkung 5.1.2.

(1) In der Definition ist $p \in X$, aber nicht unbedingt $p \in E$. Z.B. $X = Y = \mathbb{C}$ und $E = \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Betrachte $f : E \to \mathbb{C}$, $f(x) = (1-x^3)/(1-x)$. Für $p = 1$ gilt $p \notin E$ und

$$\lim_{x \to p} f(x) = 3\,.$$

(Warum?) ?

(2) Falls $p \in E$, kann trotzdem gelten, dass $\lim_{x \to p} f(x) \neq f(p)$. Z.B. betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $f(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 1$. Für $p = 0$ haben wir $f(p) = 1$, aber $\lim_{x \to p} f(x) = 0$.

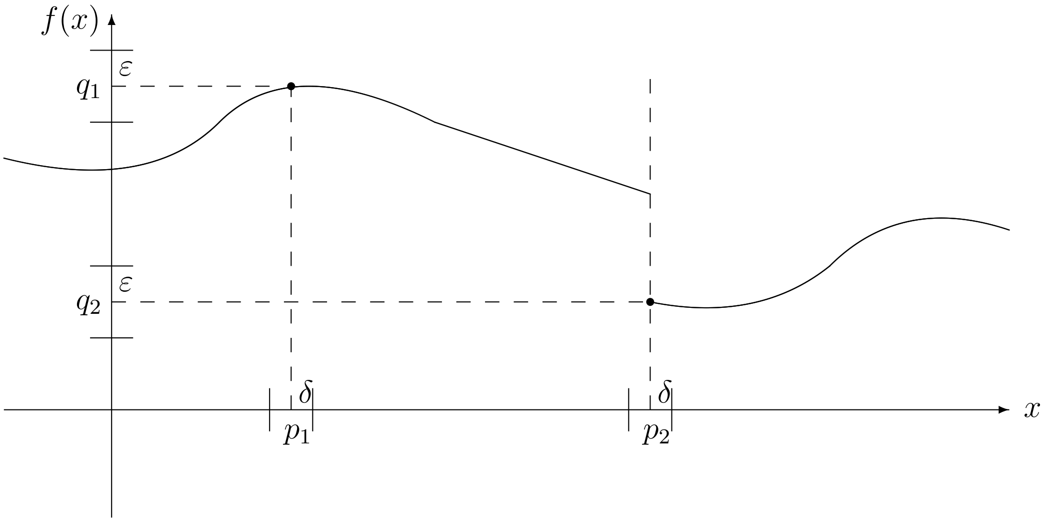


Abbildung 5.1.1: Betrachte den Fall $X = Y = \mathbb{R}$ mit $d(x, x') = |x - x'|$, und eine Funktion $f : X \to Y$ wie oben gezeichnet. Dann gilt $\lim_{x \to p_1} f(x) = q_1$, aber nicht $\lim_{x \to p_2} f(x) = q_2$. In der Tat existiert in diesem Beispiel $\lim_{x \to p_2} f(x)$ nicht.

Satz 5.1.3. Seien X, Y, E, f und p wie in der Definition, und sei $q \in Y$. Es sind äquivalent:

(i) $\lim\limits_{x \to p} f(x) = q$

(ii) Für jede Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E mit $p_n \neq p$ für alle n gilt

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} f(p_n) = q \quad .$$

Beweis. Siehe [Satz 4.2 aus Rudin]. □

Korollar 5.1.4. Wenn f an der Stelle p einen Grenzwert hat, so ist dieser eindeutig bestimmt.

Beweis. Das folgt aus Teil (2) des Satzes, und daraus, dass der Grenzwert einer Folge eindeutig bestimmt ist, siehe Satz 4.1.5. □

Definition 5.1.5. Sei X ein metrischer Raum, $E \subset X$, und sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Betrachte Funktionen

$$f, g : E \longrightarrow K \ .$$

Schreibe $\Box$ für eine der Rechenoperationen $+$, $\cdot$, $-$. Wir definieren die Funktion $f \Box g : E \to K$ durch

$$(f \Box g)(x) := f(x) \Box g(x) \ .$$

Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in E$, definieren wir die Funktion $f/g : E \to K$ durch

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \ .$$

■ Für Funktionen $f, g : E \to K^d$ und $c \in K$ kann man $f + g$ und cf genauso definieren wie oben.

Satz 5.1.6. Mit der Notation wie in Definition 5.1.5: Sei p ein Häufungspunkt von E und es gelte $F = \lim_{x \to p} f(x)$, $G = \lim_{x \to p} g(x)$. Dann auch

$$\lim_{x \to p} (f \Box g)(x) = F \Box G \ ,$$

und, falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in E$ und $G \neq 0$,

$$\lim_{x \to p} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{F}{G} \ .$$

(Insbesondere existieren alle diese Grenzwerte.)

Beweis. Dies folgt aus Satz 5.1.3 (Grenzwerte von Funktionen vs. Grenzwerte von Folgen) zusammen mit Satz 4.1.9 (Rechenoperationen für Folgengrenzwerte). (Details?) $\Box$?

Beispiel 5.1.7. Betrachte $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$, $f(x) = (1 - x^3)/(1 - x)$ wie in Bemerkung 5.1.2. Man muss nur einmal nachrechnen, dass

$$\lim_{z \to p} z = p$$

gilt. (Wie folgt dies genau aus der Definition?) Dann z.B. $\lim_{x \to 2} f(x) =$? $(1 - 2^3)/(1 - 2) = 7$, aber auf $\lim_{x \to 1} f(x)$ kann man die Rechenregeln oben nicht direkt anwenden, da $\lim_{x \to 1}(1 - x) = 0$. (Aber es gilt trotzdem, dass $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$.)

5.2 Stetigkeit von Funktionen

Definition 5.2.1. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, sei $E \subset X$, und sei $f : E \to Y$ eine Funktion.

(i) f heißt *stetig an der Stelle* $p \in E$, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in E \; : \; d_X(x,p) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon \; .$$

(ii) f heißt *stetig auf* E, wenn f an allen $p \in E$ stetig ist.

Bemerkung 5.2.2.

(1) Die Aussage „f ist stetig in p“ ist nur definiert, falls $p \in E$. Das ist also anders als bei Grenzwerten von Funktionen, wo p nur ein Häufungspunkt von E sein musste (siehe Definition 5.1.1).

(2) Es gilt: An isolierten Punkten ist eine Funktion immer stetig.
Denn: Ist $p \in E$ kein Häufungspunkt von E (also ist p ein isolierter Punkt von E), dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$U_\delta(p) \cap E \;=\; \{p\} \; .$$

Dann folgt aus $x \in E$ und $d_X(x,p) < \delta$, dass $x = p$. Also insbesonere auch $d_Y(f(x), f(p)) = 0 < \varepsilon$. Somit ist f stetig in p.

Beispiel 5.2.3.

(1) Sei (X,d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$, und sei $f : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = d(x_0, x)$.

Beh.: f stetig auf X.

Bew.: Sei $p \in X$ beliebig. Wir zeigen, dass f in p stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta = \varepsilon$. Sei $x \in X$ beliebig, sodass $d(x,p) < \delta$. Es gilt

$$d(x_0, x) \le d(x_0, p) + d(p, x) \quad \text{und} \quad d(x_0, p) \le d(x_0, x) + d(x, p)$$

Also insgesamt $|d(x_0, x) - d(x_0, p)| \le d(x,p)$. Somit

$$|f(x) - f(p)| = |d(x_0, x) - d(x_0, p)| \le d(x,p) < \delta = \varepsilon \; .$$

(2) Aus dem vorherigen Beispiel: Die Funktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist stetig auf $\mathbb{R}$. Die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 0 & ; x \le 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases}$$

ist stetig für jedes $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Warum?) ?

Beh.: g ist nicht stetig in 0.

Bew.: Wir zeigen die Negation der Stetigkeitsaussage

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \in E \text{ mit } d_X(x,p) < \delta\ :\ d_Y(f(x), f(p)) \geq \varepsilon\ .$$

Hier $p = 0$. Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{1}{2}\delta$. Dann $d(x,p) = |x| < \delta$ und $|g(x) - g(0)| = |1 - 0| = 1 \geq \varepsilon$.

Satz 5.2.4. Seien X, Y metrische Räume, $E \subset X$, und $f : E \to Y$. Für jeden Häufungspunkt $p \in E$ von E gilt:

$$f \text{ stetig in } p \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to p} f(x) \;=\; f(p) \quad .$$

Beweis. Man muss nur die beiden Definitionen nebeneinander schreiben. (Details? Warum ist der Fall $d_X(x,p) = 0$ in der Richtung „$\Leftarrow$“ mit abgedeckt?) ? □

Bemerkung 5.2.5. Wenn man (den Beweis von) Satz 5.1.3 mit Satz 5.2.4 verbindet, erhält man folgende Aussage: Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$. Sei (p_n) eine Folge in X mit $p_n \to p$ (aber nicht unbedingt $p_n \neq p$). Wenn f an der Stelle p stetig ist, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(p_n) = f(\lim_{n\to\infty} p_n)\ .$$

Man kann in diesem Fall also Grenzwert und die Anwendung von f vertauschen. (Details des Beweises? Was ist, wenn p kein Häufungspunkt von X ist? Können Sie ein Gegenbeispiel angeben, wenn Sie „f ist stetig in p“ weglassen?) ?

Satz 5.2.6. („Verkettungen stetiger Funktionen sind stetig“) Seien X, Y, Z metrische Räume, $E \subset X$, $p \in E$,

$$f\ :\ E \longrightarrow Y \qquad , \qquad g\ :\ f(E) \longrightarrow Z \quad .$$

Sei f stetig in p und g stetig in $f(p)$, dann ist $g \circ f$ stetig in p . (Dabei ist $g \circ f$ definiert durch $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.)

Beweis. Siehe [Satz 4.7 aus Rudin] □

■ Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Für eine Teilmenge $M \subset Y$ defininiert man das *Urbild* $f^{-1}(M)$ *von* M *unter* f als

$$f^{-1}(M) = \{\, x \in X \mid f(x) \in M \,\}\ .$$

Achtung: f muss hier nicht invertierbar sein. Z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dann ist f nicht invertierbar, $f^{-1}(4)$ existiert also nicht, aber $f^{-1}(\{4\}) = \{\pm 2\}$.

Satz 5.2.7. („Urbilder offener Mengen sind offen“) Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$. Dann gilt:

$$f \text{ ist stetig auf } X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{l}\text{Für jede offene Menge } V \subset Y \text{ ist} \\ \text{das Urbild } f^{-1}(V) \text{ offen in } X\,.\end{array}$$

Beweis. Siehe [Satz 4.8 aus Rudin] □

■ Die zweite Aussage dieses Satzes erlaubt es, stetige Funktionen durch offene Mengen zu charakterisieren, ohne konkret die Metriken in X bzw. Y zu erwähnen.

Korollar 5.2.8. Mit der Notation aus Satz 5.2.7 gilt:

$$f \text{ ist stetig auf } X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{l}\text{Für jede abgeschlossene Menge } A \subset Y \text{ ist} \\ \text{das Urbild } f^{-1}(A) \text{ abgeschlossen in } X\,.\end{array}$$

Beweis. Dies folgt aus a) A ist abgeschlossen in X genau dann, wenn $\complement A$ offen in X ist (Satz 3.2.7), und b) $f^{-1}(\complement E) = \complement f^{-1}(E)$. (Details? Warum gilt (b)?) □ ?

Satz 5.2.9. Sei X ein metrischer Raum, K sei $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und $f, g : X \to K$ seien stetige Funktionen. Dann sind auch $f \pm g$, fg stetig. Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so ist f/g stetig.

Beweis. Sei $p \in X$. Falls p ein isolierter Punkt ist, so ist die Behauptung klar. (Warum?) Falls p ein Häufungspunkt ist, folgt die Behauptung aus Satz 5.1.6 („Rechenoperationen für Grenzwerte von Funktionen“). □ ?

Satz 5.2.10. Sei X ein metrischer Raum, und sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Betrachte Funktionen $f_1, \dots, f_d : X \to K$ und setze

$$F : X \to K^d \quad , \quad x \mapsto (f_1(x), \dots, f_d(x)) \; .$$

Dann ist F genau dann stetig, wenn alle f_i stetig sind.

Der Beweis ist eine →Übung.

■ Seien X, Y metrische Räume und $E \subset X$. Oben haben wir manchmal Funktionen $f : X \to Y$ betrachtet, und manchmal Funktionen $f : E \to Y$. Für den Stetigkeitsbegriff ist der umgebende Raum aber irrelevant, d.h. die Aussage „$f : E \to Y$ is stetig auf E“ hängt nicht davon ab, ob E als Untermenge des metrischen Raumes X aufgefasst wird, oder ob E selber als metrischer Raum aufgefasst wird. (Warum?) ?

Beispiel 5.2.11. Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

(1) *(Identitätsfunktion)* Für jeden metrischen Raum X ist die Identitätsfunktion $id : X \to X$, $x \mapsto x$ stetig. (Warum? Prüfen Sie dies direkt mit der ε-δ-Definition.) ?

(2) *(Koordinatenfunktionen)* Die Funktionen $\phi_j : K^d \to K$, $(x_1, \ldots, x_d) \mapsto x_j$ sind stetig. (Denn $\mathrm{id} : K^d \to K^d$ ist stetig nach (1) und damit auch alle Komponentenfunktionen nach Satz 5.2.10.)

(3) *(Monome)* Für $n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}_0$ sei $M : K^d \to K$ die Funktion $M\big((x_1, \ldots, x_d)\big) = x_1^{n_1} \cdots x_d^{n_d}$. Dann ist M stetig auf K^d (wegen (2) und Satz 5.2.10).

(4) *(Polynome)* Sei $P : K^d \to K$ von der Form

$$M\big((x_1, \ldots, x_d)\big) = \sum_{n_1,\ldots,n_d=0}^{S} c_{n_1,\ldots,n_d} x_1^{n_1} \cdots x_d^{n_d} \ ,$$

wobei $c_{n_1,\ldots,n_d} \in K$ und $S \in \mathbb{N}$.

(5) *(Rationale Funktionen)* Seien $P, Q : K^d \to K$ polynomiale Funktionen wie in (4). Sei $E \subset K^d$ gegeben durch

$$E = \big\{x \in K^d \,\big|\, Q(x) \neq 0\big\} \ .$$

Dann ist die Funktion $P/Q : E \to K$ stetig. Solche Funktionen heißen *rationale Funktionen*.

Satz 5.2.12. (Zwischenwertsatz) Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = \gamma$.

Beweis. (Dies ist aus [Abschnitt 7.4 aus Königsberger] und [§11 Satz 1 aus Forster].)

Sei $f(a) \leq f(b)$ (für $f(a) > f(b)$ geht der Beweis genauso). Dann gilt per Annahme

$$f(a) \leq \gamma \leq f(b) \ .$$

Wir konstruieren nicht-leere Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ mit den Eigenschaften

1. $I_{n+1} \subset I_n$,
2. $f(a_n) \leq \gamma \leq f(b_n)$,
3. $b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$.

Setze $I_1 = [a,b]$. Angenommen, I_n sei konstruiert. Sei $x = (a_n + b_n)/2$. Definiere

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, x] & ; \gamma \le f(x) \\ [x, b_n] & ; f(x) < \gamma \end{cases}$$

Die so gewonnenen I_n erfüllen 1.–3.

Nach Satz 3.3.10 ist $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ nicht leer, und wegen 3. besteht der Durchschnitt aus genau einem Punkt,

$$\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\} ,$$

für ein $c \in I_1$. Es gilt (wegen 3. und da per Definition $c \in I_n$ für alle n)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = c .$$

Da f stetig ist, gilt (Satz 5.1.3)

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) ,$$

und wegen 2. weiterhin

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \le \gamma \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) \ge \gamma .$$

Insgesamt also $\gamma = f(c)$. □

Beispiel 5.2.13. Man kann mit dem Zwischenwertsatz z.B. folgende Frage beantworten: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2019} - x^{12} + 24$. Gibt es ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = 0$? Die Antwort ist „Ja.“. Denn: Es gibt ein $a < 0$ mit $f(a) < 0$ und ein $b > 0$ mit $f(b) > 0$ (da das führende Monom eine ungerade Potenz ist). Wende dann den Zwischenwertsatz auf die Einschränkung $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ an, mit $\gamma = 0$. Der Beweis des Zwischenwertsatzes gibt sogar ein interatives Verfahren, eine solche Nullstelle zu finden.

5.3 Stetig und kompakt

Satz 5.3.1. Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Falls X kompakt ist, dann ist auch $f(X)$ kompakt.

Beweis. Sei $\{V_\alpha\}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$. Setze $U_\alpha := f^{-1}(V_\alpha)$. Nach Satz 5.2.7 („Urbilder offener Mengen sind offen“) ist U_α offen in X. Somit ist $\{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung von X (Warum ist es eine Überdeckung?). ?

Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ von X. Es gilt einerseits, dass $f(U_\alpha) \subset V_\alpha$ (Warum? Gilt immer „=“ oder manchmal auch „$\subsetneq$“?), und andererseits, dass $f(X) = f(U_{\alpha_1}) \cup \dots \cup f(U_{\alpha_1})$. Also auch ?

$$f(X) \subset V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_1} \ .$$

Insgesamt haben wir also in $\{V_\alpha\}$ eine endliche Teilüberdeckung von $f(X)$ gefunden. □

■ Bei offenen Mengen waren Urbilder wieder offen, Bilder aber nicht unbedingt. Bei kompakten Mengen sind Bilder kompakt, Urbilder aber nicht unbedingt. (Beispiel?) ?

Definition 5.3.2. Sei X eine Menge und $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : X \to K^d$ heißt *beschränkt*, falls es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in X$ gilt.

Aus Satz 5.3.1 und der Charakterisierung kompakter Mengen in K^d (Satz 3.3.17) folgt:

Korollar 5.3.3. Sei X ein kompakter metrischer Raum und $f : X \to K^d$ stetig. Dann ist f beschränkt.

Beispiel 5.3.4. Es gibt keine surjektive stetig Abbildung $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, oder $g : [0,1] \to (-1,1]$. Denn dann wäre z.B. $f([0,1]) = \mathbb{R}$, aber $[0,1]$ ist kompakt und $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt. (Es gibt aber nicht-stetige surjektive Abbildungen. ? Fällt Ihnen eine ein?)

Satz 5.3.5. (Satz vom Minimum und Maximum)
Sei $X \neq \emptyset$ ein kompakter metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $p, q \in X$, sodass für alle $x \in X$ gilt:

$$f(p) \ \leq \ f(x) \ \leq \ f(q) \ .$$

Beweis. Da $X \neq \emptyset$ ist $f(X)$ nicht leer. Nach Korollar 5.3.3 ist $f(X)$ beschränkt. Also existieren $\sup f(X)$ und $\inf f(X)$. Des weiteren gilt (Warum?) ?

$$\sup f(X), \inf f(X) \ \in \ \overline{f(X)}$$

(hier ist $\overline{f(X)}$ der Abschluss von $f(X)$, siehe Definition 3.2.13). Nach Satz 5.3.1 (und Satz 3.3.7) ist $f(X)$ abgeschlossen, und somit

$$\sup f(X), \inf f(X) \in f(X) \ .$$

Also gibt es $p, q \in X$ mit $f(p) = \inf f(X)$ und $f(q) = \sup f(X)$. □

Bemerkung 5.3.6.

(1) Im Beweis haben wir gesehen, dass man kann die Aussage auch so formulieren: Setze $M = \sup f(X)$ und $m = \inf f(X)$. Dann gibt es $p, q \in X$ mit $p, q \in X$ mit $f(p) = m$ und $f(q) = M$.

(2) Wenn X nicht kompakt ist, gilt die Aussage nicht mehr. Z.B. $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Oder $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{1+|x|}$. (Warum sind dies Gegenbeispiele?) ?

Satz 5.3.7. Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Angenommen, X ist kompakt, und f ist bijektiv. Dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ stetig.

Beweis. Siehe [Satz 4.17 aus Rudin]. □

Beispiel 5.3.8.

(1) Kompaktheit ist eine notwendige Voraussetzung in Satz 5.3.7: Die Menge $[0,1] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}$ ist kompakt (Satz 3.3.17). Lassen wir nun den Punkt 2 weg und betrachten

$$X = [0,1] \cup (2,3] \ .$$

Diese Menge ist nicht kompakt (da nicht abgeschlossen). Betrachte die Funktion

$$f : X \to [0,2] \quad f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \le x \le 1 \\ x-1 & ; 2 < x \le 3 \end{cases} .$$

f ist stetig (Warum?) und bijektiv, aber f^{-1} ist nicht stetig in 1, da $f^{-1}(1) = 1$, aber $f^{-1}(1+x) = 2+x$ für jedes noch so kleine $x > 0$. ?

(2) Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Funktionen

$$f, g : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0} \quad , \quad f(x) = x^n \quad , \quad g(x) = \sqrt[n]{x} \ .$$

Dann ist g die Umkehrfunktion von f.

Beh.: g ist stetig.

Wir können Satz 5.3.7 nicht direkt anwenden, da $\mathbb{R}_{\ge 0}$ nicht kompakt ist. Aber folgendes geht: sei $L > 0$ beliebig. Da $0 \le x \le L$ äquivalent ist zu $0 \le \sqrt[n]{x} \le \sqrt[n]{L}$, ist $g : [0,L] \to [0, \sqrt[n]{L}]$ eine Bijektion mit Umkehrfunktion f. Da $[0, \sqrt[n]{L}]$ kompakt ist, und f stetig ist, folgt, dass g auf $[0,L]$ stetig ist. Da L beliebig war, ist g auch auf $\mathbb{R}_{\ge 0}$ stetig. (Warum?) ?

Definition 5.3.9. Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion. Wir sagen, dass f *gleichmäßig stetig* ist, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$\forall x, x' \in X \ : \ d_X(x, x') < \delta \ \Rightarrow \ d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon \ .$$

Bemerkung 5.3.10. Vergleiche „stetig“ und „gleichmäßig stetig“:

$$\begin{aligned}
&f \text{ ist stetig} && \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} && \forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x' \in X : \\
& && && \quad d_X(x, x') < \delta \ \Rightarrow \ d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon \ . \\
&f \text{ ist gleichm. stetig} && \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} && \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, x' \in X : \\
& && && \quad d_X(x, x') < \delta \ \Rightarrow \ d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon \ .
\end{aligned}$$

Somit folgt aus gleichmäßiger Stetigkeit insbesondere Stetigkeit. Die Umkehrung gilt nicht, wie das nächste Beispiel zeigt.

Beispiel 5.3.11.

(1) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dann ist f stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Denn: Wähle $\varepsilon = 1$. Sei $\delta > 0$ beliebig. Wähle $x = 4/\delta$ und $x' = x + \delta/2$. Dann

$$|x^2 - (x')^2| = |x - x'| \, |x + x'| = \frac{\delta}{2} \frac{4}{\delta} = 2 > 1 \ .$$

(2) Sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = x^2$. Dann ist f stetig und gleichmäßig stetig. Denn: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta = \varepsilon/2$. Seien $x, x' \in [0, 1]$ gegeben mit $|x - x'| < \delta$. Dann gilt:

$$|x^2 - (x')^2| = |x - x'| \, |x + x'| \le 2 \, |x - x'| < 2\delta = \varepsilon \ .$$

Satz 5.3.12. Eine stetige Abbildung von einem kompakten metrischen Raum in einen metrischen Raum ist gleichmäßig stetig.

Beweis. Siehe [Satz 4.19 aus Rudin]. □

5.4 Monotone Funktionen

Definition 5.4.1. [§12 aus Forster] Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

$$f \text{ heisst } \begin{cases} \textit{monoton steigend} \\ \textit{streng monoton steigend} \\ \textit{monoton fallend} \\ \textit{streng monoton fallend} \end{cases} \quad \text{falls } \begin{cases} f(x) \le f(y) \\ f(x) < f(y) \\ f(x) \ge f(y) \\ f(x) > f(y) \end{cases}$$

für alle $x, y \in D$ mit $x < y$. Gilt eine dieser Bedingungen (streng), so sagen wir f ist *(streng) monoton.*

Bemerkung 5.4.2.

(1) Ist f streng monoton, so ist f injektiv. Sei z.B. f streng monoton steigend, und sei $x \neq y$. Sei o.B.d.A. $x < y$. Dann folgt $f(x) < f(y)$, also insbesondere $f(x) \neq f(y)$.

(2) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ streng monoton. Setze $E := f(D)$. Dann ist $f : D \to E$ eine bijektive Abbildung, d.h. es gibt eine Umkehrfunktion $f^{-1} : E \to D$.

Satz 5.4.3. (Stetigkeit der Umkehrfunktion)
Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend (bzw. fallend) und stetig. Setze $V := f(U)$. Dann ist $V \subset \mathbb{R}$ offen und $f^{-1} : V \to U$ ist streng monoton steigend (bzw. fallend) und stetig.

Beweis. (Siehe auch [§12 Satz 1 aus Forster].) Wir zeigen die Aussage für f streng monoton steigend. Für streng monoton fallend ist der Beweis analog.

■ *f^{-1} ist stetig:* (Für $U = \emptyset$ ist nichts zu zeigen. Sei also $U \neq \emptyset$.) Sei $q \in V$ beliebig. Wir zeigen, dass f^{-1} in q stetig ist. Sei $p = f^{-1}(q)$. Da U offen ist, gibt es $r > 0$, sodass $U_r(p) \subset U$. Setze $I = [a, b]$ mit $a = p - \frac{r}{2}$, $b = p + \frac{r}{2}$. Dann $I \subset U$ und I ist kompakt. Setze $c = f(a)$, $d = f(b)$ und $J = [c, d]$. Da $a < b$, gilt auch $c < d$.

Beh.: $f(I) = J$

Bew.: Aus $a \leq x \leq b$ folgt, dass $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, sodass $f(I) \subset J$. Sei $y \in J$ beliebig. Da $f(a) \leq y$ und $f(b) \geq y$, gibt es nach dem Zwischenwertsatz (Satz 5.2.12) ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$. Also auch $f(I) \supset J$.

Sei $F : I \to J$ die Einschränkung von f auf I. Dann ist F bijektiv und $F^{-1} : J \to I$ ist die Einschränkung von f^{-1} auf J.

Da I kompakt ist, und F stetig ist, ist auch F^{-1} stetig (Satz 5.3.7). Da J eine (in $\mathbb{R}$) offene Umgebung $U_s(q)$ von q enthält, und F^{-1} auf dieser mit f^{-1} übereinstimmt, ist auch f^{-1} auf $U_s(q)$ stetig ($\to$Übung), und somit insbesondere stetig in q.

Da f^{-1} in jedem $q \in V$ stetig ist, ist f^{-1} auf V stetig.

■ *V ist offen:* Wir haben oben gesehen, dass $U_s(q) \subset J \subset V$.

■ *f^{-1} ist streng monoton steigend:* Seien $c, d \in V$ mit $c < d$. Setze $a = f^{-1}(c)$ und $b = f^{-1}(d)$. Angenommen, dass $a > b$ (Warum tritt $a = b$ nicht auf?). ? Aus $b < a$ folgt $f(b) < f(a)$, also $d < c$, Widerspruch. □

■ Wenn wir die Bedingung „$U \subset \mathbb{R}$ offen“ im Satz oben weglassen, dann gibt Beispiel 5.3.8 ein Gegenbeispiel.

Satz 5.4.4. Betrachte die Einschränkung $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gilt:

(i) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

(ii) $\exp x \geq 1 + x$ für alle $x \geq 0$.

(iii) $\exp x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(iv) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist streng monoton steigend und bijektiv.

Beweis.

(i) Aus →Übung: Es ist sogar $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig.

(ii) $\exp(x) = 1 + x + R_2(x)$ und alle Summanden der Reihe $R_2(x)$ sind nicht-negativ.

(iii) Für $x \geq 0$ folgt dies aus (ii) und für $x < 0$ aus $\exp(x) = 1/\exp(-x)$.

(iv) *Streng monton steigend:* Sei $y > x$. Dann

$$\exp(y) = \exp(y - x)\exp(x) \geq (1 + (y - x))\exp(x) > \exp(x) \ ,$$

wobei die erste Ungleichung aus (ii) folgt, und die zweite aus $y - x > 0$ und $\exp(x) > 0$.

Bijektiv: Es genügt, zu zeigen, dass $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$ (Warum?). ?

Nach (iii) gilt $\exp(x) > 0$, also $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_{>0}$.

Sei $a \geq 1$. Wegen (1) gibt es ein $y > 0$, sodass $\exp(y) \geq a$. Also gilt $1 = \exp(0) \leq a \leq \exp(y)$. Nach dem Zwischenwertsatz 5.2.12 gibt es ein $x \in [0, y]$ mit $\exp(x) = a$. Sei $0 < a < 1$. Dann gibt es $b \in \mathbb{R}$, sodass $\exp(b) = 1/a$, also $\exp(-b) = a$. Somit gilt auch $\mathbb{R}_{>0} \subset \exp(\mathbb{R})$.

□

Definition 5.4.5. Der *(natürliche) Logarithmus* $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$.

Satz 5.4.6. Es gilt:

(i) log ist stetig und streng monoton steigend.

(ii) Für $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

(iii) Für $q \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $x^q = \exp(q \log x)$.

Beweis.

(i) Folgt aus Satz 5.4.4 und Satz 5.4.3.

(ii) Da exp bijektiv ist, folgt die Aussage aus $\exp(\log(xy)) = \exp(\log(x) + \log(y))$.

(iii) Sei $q = m/n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Per Definition ist dann $x^q = \sqrt[n]{x^m}$. Es genügt, zu zeigen, dass für alle $y > 0$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt[n]{y} = \exp(\tfrac{1}{n} \log y) \quad , \quad y^n = \exp(n \log y) \ .$$

Z.B. $y^n = y \cdots y = \exp(\log(y)) \cdots \exp(\log(y)) = \exp(\log(y) + \cdots + \log(y)) = \exp(n \log(y))$. (Wie geht der Beweis für $\sqrt[n]{y}$? Und warum zeigt das die Behauptung aus Teil (iii)?) ?

□

■ Wegen Teil (iii) macht es Sinn, für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $z \in \mathbb{C}$ zu definieren:

$$a^z := \exp(z \log a) \ .$$

5.5 Grenzwerte und Unendlich

Sei $a \in \mathbb{R}$. Genauso wie offene Mengen der Form $(a - r, a + r)$ für $r > 0$ Umgebungen von a hießen (siehe Definition 3.2.1), so nennen wir

$$\begin{aligned} (-\infty, a) &:= \{x \in \mathbb{R} | x < a\} && \text{eine } \textit{Umgebung von } -\infty\text{, und} \\ (a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} | x > a\} && \text{eine } \textit{Umgebung von } \infty. \end{aligned}$$

Definition 5.5.1. Sei $E \subset \mathbb{R}$ und sei $f : E \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Seien $p, A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, wobei wir verlangen, dass in jeder Umgebung von p mindestens ein Punkt aus $E \setminus \{p\}$ enthalten ist. Wir schreiben

$$f(x) \to A \quad \text{für} \quad x \to p \ ,$$

falls es für jede Umgebung U von A eine Umgebung V von p gibt mit

$$\text{für alle } x \in V \cap E,\ x \neq p : f(x) \in U \ .$$

■ Statt $f(x) \to \pm\infty$ für $x \to p$ schreibt man auch

$$\lim_{x \to p} f(t) = \pm\infty$$

und sagt „für x gegen p hat f den *uneigentlichen Grenzwert* $\pm\infty$“.

Notationsfalle: Falls $\lim_{x \to p} f(x) = \pm\infty$, so existiert der Grenzwert von f an der Stelle p *nicht*. Daher der Zusatz „uneigentlich“.

Beispiel 5.5.2. Die folgenden Beispiele zeigen, wie sich Definition 5.5.1 durch Ungleichungen ausdrücken lässt.

(1) $p, A \in \mathbb{R}$: Zunächst muss p ein Häufungspunt von E sein. (Wo steht das in der Definition?) Dann heißt $\lim_{x \to p} f(x) = A$: für jedes $\varepsilon > 0$ (es ist $U = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ Umgebung von A) gibt es ein $\delta > 0$ (es ist $V = (p - \delta, p + \delta)$ Umgebung von p), sodass für alle $x \in E$, ?

$$0 < |x - p| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - A| < \varepsilon \; .$$

(Warum ist das äquivalent zu $\forall t \in V \cap E$ s.d. $t \neq x : f(t) \in U$?) ?

In diesem Fall ist Definition 5.5.1 also äquivalent zur ursprünglichen Definition 5.1.1, sodass die Notation Sinn macht.

(2) $p \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von E, $A = \infty$: $\lim_{x \to p} f(x) = A$ heisst: für jedes $c \in \mathbb{R}$ (es ist $U = (c, \infty)$ Umgebung von ∞) gibt es ein $\delta > 0$ (es ist $V = (p - \delta, p + \delta)$ Umgebung von p), sodass für alle $x \in E$,

$$0 < |x - p| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > c \; .$$

Z.B.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty \; .$$

(aber der uneigentliche Grenzwert $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ existiert nicht (zumindest wenn wir $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ als Definitionsbereich nehmen)). (Warum hängt das vom Definitionsbereich ab?) ?

(3) $p = \infty$, $A = \infty$: Zunächst muss E nach oben unbeschränkt sein. (Wo steht das in der Definition?). Dann heißt $\lim_{x \to p} f(x) = A$: für jedes $c \in \mathbb{R}$ (es ist $U = (c, \infty)$ Umgebung von ∞) gibt es ein $d \in \mathbb{R}$ (es ist $V = (d, \infty)$ Umgebung von ∞), sodass für alle $x \in E$, ?

$$x > d \;\Rightarrow\; f(x) > c \; .$$

Z.B.

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty \; .$$

Beispiel 5.5.3. Für $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ und $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ gilt (mit $n \in \mathbb{N}$):

$$\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \exp x = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} x^n \exp(-x) = 0$$
$$\lim_{x\to 0} \log(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} \log(x) = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} x^{-n} \log(x) = 0$$

Der Beweis ist eine →Übung.

Satz 5.5.4. (Reduktionslemma) Sei $E \subset \mathbb{R}$ nach oben nicht beschränkt und $f : E \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Setze $D = \{x \in \mathbb{R}_{>0} | x^{-1} \in E\}$ und

$$\varphi : D \to \mathbb{R} \quad , \quad \varphi(\xi) = f(\xi^{-1}) \ .$$

Dann gilt: $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert genau dann, wenn auch $\lim_{\xi\to 0} \varphi(\xi)$ existiert, und in diesem Fall gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{\xi\to 0} \varphi(\xi) \ .$$

Beweis. (Siehe auch [Abschnitt 7.8 aus Königsberger])
$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists d \in \mathbb{R} \ \forall x \in E \ : \ x > d \ \Rightarrow \ |f(x) - a| < \varepsilon \ ,$$

und $\lim_{\xi\to 0} \varphi(\xi) = a$ bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \xi \text{ mit } \xi^{-1} \in E \ : \ 0 < \xi < \delta \ \Rightarrow \ |\varphi(\xi) - a| < \varepsilon \ .$$

Daraus folgt die Behauptung. (Warum?) □ ?

■ Analog gilt $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{\xi\to 0} \varphi(\xi)$, wobei φ jetzt auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}_{<0}$ definiert ist. (Details?) ?

Nebenbemerkung zur Information: Für Funktionen $f : (a, b) \to X$ definiert man auch *einseitige Grenzwerte*. Sei $c \in (a, b)$. Bezeichne mit $F_\pm$ die Einschränkungen $F_+ : (c, b) \to X$, $F_+(x) = f(x)$ für alle $x \in (c, b)$, und genauso für $F_- : (a, c) \to X$. Dann schreibt man

$$\lim_{x\searrow c} f(x) := \lim_{x\to c} F_+(x) \quad , \quad \lim_{x\nearrow c} f(x) := \lim_{x\to c} F_-(x) \ .$$

Z.B.

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{x}{|x|} = 1 \quad , \quad \lim_{x\nearrow 0} \frac{x}{|x|} = -1 \ .$$

Die Aussage von Satz 5.5.4 kann man dann auch so schreiben:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{\xi\searrow 0} \varphi(\xi) \ .$$

Mehr dazu in [Abschnitt 7.8 aus Königsberger] oder [Abschnitt 10 aus Forster].

6 Differentiation

6.1 Definition der Ableitung

In diesem Unterkapitel steht $[a, b] \subset \mathbb{R}$ für ein abgeschlossenes nichtentartetes Intervall, d.h. wir nehmen an, dass $a < b$.

Definition 6.1.1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Für $x \in [a, b]$ setze

$$\phi : [a, b] \setminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \ .$$

Wir sagen, f *ist an der Stelle* x *differenzierbar*, falls der Grenzwert $\lim_{t \to x} \phi(t)$ existiert. Den Grenzwert selber nennen wir die *Ableitung von* f *an der Stelle* x und schreiben

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \phi(t) \ .$$

Bemerkung 6.1.2.

(1) Statt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind auch andere Definitionsbereiche möglich, z.B. $f : U \to \mathbb{R}$ für $U \subset \mathbb{R}$ offen. Wichtig ist, dass jeder Punkt ein Häufungspunkt ist, sonst macht der Grenzwert in der Definition von Differenzierbarkeit keinen Sinn.

(2) Analog zur Stetigkeit (siehe Z11A2) gilt: „Gilt $f = g$ auf einer offenen Umgebung von x und ist g in x differenzierbar, so auch f mit gleichen Wert für die Ableitung.“ (Warum?) ?

(3) Bei den Randpunkten des abgeschlossenen Intervals gilt die Aussage aus Teil 2 nicht: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F = f|_{[a,b]}$ (das Symbol heißt: „f eingeschränkt auf $[a, b]$“). Dann kann es sein, dass F in a und b differenzierbar ist, f aber nicht. (Beispiel?) ?

Beispiel 6.1.3.

(1) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Dann

$$\phi(t) = \frac{(f(t) - f(x)}{t - x} = \frac{at + b - ax - b}{t - x} = a \ .$$

Also ist f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \phi(t) = a \ .$$

(2) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Dann ist f an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar:

$$\phi(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{|t|}{t} \ .$$

Der Grenzwert $t \to 0$ von $\phi(t)$ existiert nicht.

(3) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dann

$$\phi(t) = \frac{t^2 - x^2}{t - x} = t + x \ .$$

Also ist f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \phi(t) = 2x \ .$$

(4) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ an der Stelle p differenzierbar. Definiere $r : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch die Gleichung

$$f(x) = f(p) + f'(p) \cdot (x - p) + r(x) \ .$$

Dann gilt

$$\lim_{x \to p} \frac{r(x)}{x - p} = 0 \ .$$

(Warum?) Den Ausdruck für $f(x)$ oben kann man verstehen als „die beste lineare Approximation der Funktion f and er Stelle p“, denn der Rest $r(x)$ geht schneller als linear gegen 0, wenn man sich p annährt. ?

(5) [Bilder: Differenzenquotient, Illustration der drei Beispiele oben]

Satz 6.1.4. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $p \in [a, b]$. Dann ist f stetig in p.

Beweis. Klar aus Beispiel (4) oben, da $\lim_{x \to p} r(x) = 0$ (Warum?). Damit folgt $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) + 0 + 0$, also ist f stetig in p nach Satz 5.2.4. □ ?

■ Die Umkehrung ist falsch. Beispiel (2) oben ist ein Gegenbeispiel.

Satz 6.1.5. Die Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar an einer Stelle $p \in [a, b]$. Dann gilt

(i) $f + g$ ist differenzierbar in p mit Ableitung $(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p)$.

(ii) fg ist differenzierbar in p mit Ableitung $(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$.

(iii) Falls $g(x) \neq 0$ auf $[a,b]$, so ist f/g differenzierbar in p mit Ableitung

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{g(p)f'(p) - f(p)g'(p)}{g(p)^2} \ .$$

Beweis. Siehe [Satz 5.3 aus Rudin]. □

Beispiel 6.1.6.

(1) $(x^n)' = nx^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$: Dies folgt induktiv mit dem vorherigen Satz, z.B.

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = x'x + xx' = 2x \ .$$

(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$ für $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$: Induktiv, z.B.

$$(x^{-1})' = (1/x)' = (x \cdot 0 - 1 \cdot 1)/x^2 = (-1)x^{-2} \ .$$

Satz 6.1.7. (Kettenregel) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [c,d] \to \mathbb{R}$, sodass $f([a,b]) \subset [c,d]$. Angenommen, f ist an der Stelle $x \in [a,b]$ differenzierbar und g ist an der Stelle $f(x) \in [c,d]$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ an der Stelle x differenzierbar, und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \ .$$

Beweis. Siehe [Satz 5.5 aus Rudin]. □

Beispiel 6.1.8.

(1) Mit der Restgliedabschätzung zeigt man, dass für $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1 \ .$$

(Details?) ?

Eingeschränkt auf $\mathbb{R}$ ist das gerade die Aussage, dass $\exp'(0) = 1$.

(2) Beh.: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp'(x) = \exp(x)$.

Bew.: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Setze $f(x) = x - x_0$ und $g(y) = \exp(x_0)\exp(y)$. Dann $g(f(x)) = \exp(x)$ und nach der Kettenregel:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = \exp(x_0)\exp'(0) \cdot 1 \ .$$

(3) Ebenfalls direkt mit der Restgliedabschätzung bekommt man, dass $\sin(x)$ und $\cos(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar sind, und das gilt:

$$\sin' = \cos \quad , \quad \cos' = -\sin$$

(Details?) ?

Achtung: Um z.B. $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ abzuleiten, können wir nicht Teil 2 benutzen, da die Ableitung von $\exp(ix)$ noch nicht definiert ist (da sie Werte in $\mathbb{C}$ annimmt). Siehe Kapitel 6.5.

Satz 6.1.9. (Ableitung der Umkehrfunktion)
Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend (bzw. fallend) und stetig. Sei $V = f(U)$ und $g : V \to U$ die Umkehrfunktion von f. Sei $y \in V$. Ist f in $g(y)$ differenzierbar mit $f'(g(y)) \neq 0$, so ist g in y differenzierbar mit

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \ .$$

Beweis. (Siehe auch [Aufgabe 5.2 aus Rudin] und [§15 Satz 3 aus Forster].) Setze $p = g(y)$ und

$$\psi(s) = \begin{cases} \frac{f(s)-f(p)}{s-p} & ; s \neq p \\ f'(p) & ; s = p \end{cases} \ .$$

Dann $\lim_{s\to p} \psi(s) = f'(p) = \psi(p)$, also ist ψ stetig in p. Für alle $s \in U$ gilt $\psi(s) \neq 0$. (Warum?) ?

Setze $s = g(t)$, $t \in V$. Dann gilt für $t \neq y$,

$$\frac{1}{\psi(g(t))} = \frac{g(t) - g(y)}{t - y} \ .$$

g ist stetig in y (Satz 5.4.3 „Stetigkeit der Umkehrfunktion“) und ψ ist stetig in $p = g(y)$ und $\psi(p) \neq 0$. Also gilt (Satz 5.1.6 „$1/\psi$ ist stetig“ und Satz 5.2.6 „Verkettung ist stetig“)

$$\lim_{t\to y} \frac{1}{\psi(g(t))} = \frac{1}{\psi(p)} = \frac{1}{f'(p)} \ .$$

□

■ Wenn wir schon wissen, dass die Umkehrfunktion g von f differenzierbar ist, dann folgt die Formel für die Ableitung auch aus der Ableitung von $f(g(x)) = x$ mit der Kettenregel. Der Vorteil des vorherigen Satzes ist, dass er gleich auch die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion beweist.

Beispiel 6.1.10.

(1) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $f, g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = x^n$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Dann $f'(x) = nx^{n-1} > 0$ und somit

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} .$$

(2) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = \exp(x)$ und $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log(x)$. Dann $f'(x) = \exp(x)$ und somit

$$\log'(y) = g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{\exp(\log(y))} = \frac{1}{y} .$$

(3) *Ableitung reeller Potenzen*: Für $c \in \mathbb{R}$ betrachte die Funktion $f(x) = x^c$ auf $\mathbb{R}_{>0}$. Mit der Definition von a^z am Ende von Abschnitt 5.4 gilt

$$f(x) = \exp(c\log(x))$$

und

$$f'(x) = \exp(c\log(x))\frac{c}{x} = c\exp(c\log(x))\exp(-\log(x)) = cx^{c-1} .$$

(4) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, ist bijektiv mit Umkehrfunktion

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{|x|} & ; x < 0 . \end{cases}$$

Aber $g(x)$ ist in 0 nicht differenzierbar. (Warum ist das kein Widerspruch zum Satz oben?) ?

6.2 Mittelwertsätze

Definition 6.2.1. Sei X ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$.

(i) Wir sagen, dass f an der Stelle $p \in X$ ein *lokales Maximum* hat, wenn es eine Umgebung U von p gibt, sodass $f(x) \leq f(p)$ für alle $x \in U$.

(ii) Ein *lokales Minimum* definiert man entsprechend.

(iii) Hat eine Funktion in p ein lokales Minimum oder Maximum, so sagen wir, f hat in p ein *lokales Extremum*.

Satz 6.2.2. Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ habe in $p \in (a,b)$ ein lokales Extremum. Dann gilt: falls $f'(p)$ existiert, so ist $f'(p) = 0$.

Beweis. Siehe [Satz 5.8 aus Rudin]. □

(Der Satz falsch ist, wenn man $p \in [a,b]$ zulässt anstatt $p \in (a,b)$. Fällt Ihnen dazu ein Beispiel ein? Es kann sein, dass $f'(p)$ in einem lokalen Extremum gar nicht existiert. Fällt Ihnen ein Beispiel ein?) ?

Satz 6.2.3. Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann gibt es ein $p \in (a,b)$, sodass

$$(f(b) - f(a))g'(p) = (g(b) - g(a))f'(p)$$

Beweis. Siehe [Satz 5.9 aus Rudin]. □

(Es ist nicht gefordert, dass f in a oder b differenzierbar ist. Fällt Ihnen ein Beispiel für eine Funktion ein, auf die man die Satz anwenden kann, und die z.B. in a nicht differenzierbar ist?) ?

Satz 6.2.4. (Mittelwertsatz)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann gibt es ein $p \in (a,b)$, sodass

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(p) \ .$$

Beweis. Setze $g(x) = x$ in Satz 6.2.3. □

(Gilt der Satz noch, wenn f an einem einzelnen Punkt $x_0 \in (a,b)$ nicht differenzierbar ist?) ?

Beispiel 6.2.5. (1) Mit dem Mittelwertsatz kann man Funktionen abschätzen: Sei f wie in Satz 6.2.4. Angenommen es gilt $u \leq f'(x) \leq v$. Dann auch

$$(b-a)\, u \ \leq \ f(b) - f(a) \ \leq \ (b-a)\, v \ .$$

Denn $f(b) - f(a) = (b-a)f'(p) \leq (b-a)v$ und dito für die andere Abschätzung. Z.B. gilt für $t > 0$ und $x \in [t+1, t]$, dass $(t+1)^{-1} \leq x^{-1} \leq t^{-1}$. Mit $\log'(x) = x^{-1}$ erhält man

$$\frac{1}{t+1} \ \leq \ \log(t+1) - \log(t) \ \leq \ \frac{1}{t} \ .$$

(2) Eine einfache aber wichtige Anwendung ist: Sei f wie in Satz 6.2.4. Angenommen, $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist f auf $[a,b]$ konstant.

(3) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und erfülle $f'(x) = cf(x)$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f(x) = A\exp(cx)$ für ein $A \in \mathbb{R}$. Dies sieht man so:
Setze $F(x) = f(x)e^{-cx}$. F ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und

$$F'(x) = f'(x)e^{-cx} + f(x)e^{-cx}(-c) = cf(x)e^{-cx} + f(x)e^{-cx}(-c) = 0 ,$$

also ist $F(x) = A$ für eine Konstante $A \in \mathbb{R}$ (Teil 2).

Satz 6.2.6. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Gilt für alle $x \in (a, b)$, dass

$$f'(x) \begin{cases} > 0 \\ \geq 0 \\ = 0 \\ \leq 0 \\ < 0 \end{cases} \text{, dann ist } f(x) \begin{cases} \text{streng monoton steigend.} \\ \text{monoton steigend.} \\ \text{konstant.} \\ \text{monoton fallend.} \\ \text{streng monoton fallend.} \end{cases}$$

Beweis. Seien $x, y \in [a, b]$, mit $x < y$. Dann $f(y) - f(x) = (y - x)f'(p)$ für ein $p \in (x, y)$ (Satz 6.2.4). Da $y - x > 0$ folgen die Aussagen hieraus. □

■ Die Umkehrung des Satzes gilt nur für die nicht-strengen Fälle. Z.B. ist $f(x) = x^3$ streng monoton steigend auf ganz $\mathbb{R}$, aber $f'(0) = 0$.

Bemerkung 6.2.7.

(1) Die Ableitung von differenzierbaren Funktionen muss nicht stetig sein:
Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ x^2 \sin(x^{-1}) & ; x > 0 \end{cases}$$

Dann ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ 2x \sin(x^{-1}) - \cos(x^{-1}) & ; x > 0 \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ ergibt sich das aus Produkt– und Kettenregel, bei $x = 0$ muss man direkt den Grenzwert des Differenzenquotienten $\phi(t) = f(t)/t$ berechnen. (Details?) ?

Die Funktion $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in 0 nicht stetig

(2) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ differenzierbar. Obwohl die Ableitung $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ nicht stetig sein muss, erfüllt sie folgende Zwischenwerteigenschaft (vergleiche mit Satz 5.2.12 „Zwischenwertsatz“):

Beh.: Für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ echt zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ gibt es ein $c \in (a,b)$, sodass $f'(c) = \gamma$.

Bew.: Betrachte $g(t) = f(t) - \gamma t$. Dann $g'(a) < 0$, also $g(\alpha) < g(a)$ für ein $\alpha > a$ und $g'(b) > 0$, also gibt es ein $\beta < b$ mit $g(\beta) < g(b)$ (Warum?). ?
Nach Satz 5.3.5 „Minimum und Maximum“ nimmt g sein Minimum an einem Punkt c an, und c muss im offenen Intervall (a,b) liegen (Warum?). ?
Nach Satz 6.2.3 gilt $g'(c) = 0$.

(3) Betrachte die Funktion $h : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases}$$

Nach Teil 2 gibt es keine Funktion $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$, die auf $[-1,1]$ differenzierbar ist, und die für alle $x \in [-1,1]$ erfüllt, dass $F'(x) = h(x)$.

6.3 Die l'Hospitalsche Regel

Satz 6.3.1. (Regel von l'Hospital)
Für $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a,b). Ferner sei $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Sei $p = a$ oder $p = b$. Für ein $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ gelte

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A \text{ für } x \to p\ .$$

Falls eine der Bedingungen

(i) $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ für $x \to p$, oder

(ii) $g(x) \to \infty$ oder $g(x) \to -\infty$ für $x \to p$ (und keine Annahme an $f(x)$)

gilt, dann auch

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to A \text{ für } x \to a\ .$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage nur für den Fall $p = a$, und für Bedingung (ii) betrachten wir nur den Fall $g(x) \to \infty$. Die anderen Fälle gehen ähnlich.

Betrachte die folgenden zwei Behauptungen:

1. Sei $-\infty \leq A < \infty$. Für jedes $q \in \mathbb{R}$ mit $A < q$ gibt es ein c mit $a < c < b$, sodass
$$x \in (a, c) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} < q$$
2. Sei $-\infty < A \leq \infty$. Für jedes $p \in \mathbb{R}$ mit $p < A$ gibt es ein c' mit $a < c' < b$, sodass
$$x \in (a, c') \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} > p$$

Wir zeigen gleich Behauptung 1. Der Beweis von Behauptung 2 ist so ähnlich und wird weggelassen. Vorher wollen wir sehen, wie aus Behauptung 1 und 2 die Aussage des Satzes folgt.

Seien z.B. $a, A \in \mathbb{R}$ (also nicht $\pm\infty$). Die Aussage $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$ bedeuted dann:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in (a, a+\delta) : \frac{f(x)}{g(x)} \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon) \; .$$

Wähle $q = A + \varepsilon$ in Behauptung 1 und $p = A - \varepsilon$ in Behauptung 2. Setze $\delta = a - \min(c, c')$. Dann folgt aus Behauptung 1 und 2, dass $p < f(x)/g(x) < q$.

Die anderen Fälle (also $a = -\infty$ und/oder $A = \pm\infty$) gehen so ähnlich. (Details?) ?

Beweis von Behauptung 1:
Sei $q \in \mathbb{R}$ gegeben mit $A < q$. Wähle r, sodass $A < r < q$. Da $f'(x)/g'(x) \to A$ für $x \to a$, gibt es ein $d \in (a, b)$, sodass

$$\forall x \in (a, d) : \frac{f'(x)}{g'(x)} < r \; .$$

Sei $x \in (a, d)$ und $z \in (a, x)$. (Also bislang insgesamt $a < z < x < d < b$.) Nach Satz 6.2.3 gibt es $t \in (z, x)$, sodass

$$(f(x) - f(z))g'(t) = (g(x) - g(z))f'(t) \; .$$

Nach dem Mittelwertsatz (Satz 6.2.4) gilt überdies $g(x) - g(z) = (x - z)g'(\xi)$ für ein $\xi \in (x, z)$. Da $x \neq y$ und per Annahme $g'(y) \neq 0$ für alle y, folgt $g(x) - g(y) \neq 0$. Wir können also umformen:

$$\frac{f(x) - f(z)}{g(x) - g(z)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r \; . \qquad (*)$$

Für den Rest des Beweises von Behauptung 1 müssen wir unterschiedlich vorgehen, je nachdem, ob Bedingung (i) oder (ii) aus dem Satz erfüllt ist.

(i) Wähle $c = d$. Dann gilt für alle $x \in (a, c)$:

$$\lim_{z \to a} \frac{f(x) - f(z)}{g(x) - g(z)} \overset{\text{Bed. (i)}}{=} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} \overset{(*)}{\leq} r < q \ .$$

(ii) (Hier betrachten wir nur den Fall, dass $g(x) \to \infty$ für $x \to a$.) Da $g(x) \to \infty$, gibt es ein d' mit $a < d' < b$, sodass

$$x \in (a, d') \quad \Rightarrow \quad g(x) > 0 \ .$$

Wähle $z, x \in \mathbb{R}$, sodass $a < z < x < \min(d, d')$. Wenn man $(*)$ mit $(g(z) - g(x))/g(z)$ multipliziert, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(x)}{g(z)} &= \frac{f'(t)}{g'(t)} \cdot \frac{g(z) - g(x)}{g(z)} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{f'(t)}{g'(t)} \Big(1 - \frac{g(x)}{g(z)}\Big) + \frac{f(x)}{g(z)} \ . \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der zweiten Gleichung ist $f'(t)/g'(t) < r$, und die beiden Terme $g(x)/g(z)$ und $f(x)/f(z)$ gehen gegen 0 für $x \to a$. Also gibt es in c mit $a < c < \min(d, d')$, sodass

$$\forall z \in (a, c) : \frac{f(z)}{g(z)} < q \ .$$

(Warum muss man hier q nehmen und nicht r?) ?

□

Beispiel 6.3.2.

(1) Es gilt

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{5x^4}{2x - 1} = 5 \ ,$$

was wir schon wissen, wegen $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + \cdots + 1)$ und $x^2 - x = (x-1)x$. Die Bedingung (i), (ii) aus dem Satz kann man nicht weglassen. Z.B.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^5 - 1}{x^2 - x} = -1 \quad \text{aber} \quad \lim_{x \to -1} \frac{5x^4}{2x - 1} = -\frac{5}{3} \ .$$

(2) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt (siehe auch Beispiel 5.5.3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} x^{-n} \log(x) &= \lim_{x \to \infty} \frac{\log(x)}{x^n} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{-1}}{n x^{n-1}} = 0 \ , \\ \lim_{x \to 0} x^n \log(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{\log(x)}{x^{-n}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{-1}}{-n x^{-n-1}} = 0 \ . \end{aligned}$$

6.4 Der Taylorsche Satz

Definition 6.4.1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $[a, b]$, und die Ableitung $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei ebenfalls auf $[a, b]$ differenzierbar. Für die Ableitung von f' schreiben wir $f'' : [a, b] \to \mathbb{R}$ und nennen dies *die zweite Ableitung von* f. Iterativ erhält man:

$$f \ , \quad f' \ , \quad f'' = f^{(2)} \ , \quad f^{(3)} \ , \ldots , \ f^{(n)} \ , \ldots$$

Wir nennen $f^{(n)}$ die *n-te Ableitung von f*. Man schreibt auch $f = f^{(0)}$ (die nullte Ableitung) und $f' = f^{(1)}$. Für $n \geq 2$ nennt man die $f^{(n)}$ auch *Ableitungen höherer Ordnung.*

■ Man muss nicht fordern, dass alle höheren Ableitungen auf ganz $[a, b]$ existieren. Aber damit man $f^{(n)}$ an einer Stelle $p \in [a, b]$ definieren kann, muss $f^{(n-1)}$ zumindest in einer Umgebung von p (in $[a, b]$) existieren.

Beispiel 6.4.2.

(1) Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$

Dann existiert f' auf ganz $\mathbb{R}$ und es gilt $f'(x) = 2|x|$. (Warum? Insbesondere: Warum stimmt das bei $x = 0$?) ?

Die zweite Ableitung f'' ist nur auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert und ist gegeben durch

$$f''(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

Damit sind alle $f^{(n)}$ für $n > 2$ auch nur auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert, und es gilt $f^{(n)}(x) = 0$.

(2) Für die Ableitung von $f(x) = \sin(x)$ gilt: Alle $f^{(n)}$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und gegeben durch:

n	0 (mod 4)	1 (mod 4)	2 (mod 4)	3 (mod 4)
$f^{(n)}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$

(3) Für $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(x)$ gilt $f'(x) = 1/x$. Alle $f^{(n)}$ sind auf $\mathbb{R}_{>0}$ definiert und, für $n \geq 2$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2) \cdots (-n + 1)\, x^{-n} = (n - 1)!\, (-1)^{n-1}\, x^{-n} \ .$$

■ Beliebig oft differenzierbare Funktionen nennt man auch *glatte Funktionen*.

Satz 6.4.3. (Taylorscher Satz)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$, sodass

- $f^{(n)}$ existiert und auf $[a, b]$ stetig ist, und
- $f^{(n+1)}$ auf (a, b) existiert.

Sei $p \in [a, b]$. Setze $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k \ .$$

Es gilt: Für jedes $x \in [a, b]$ gibt es ein t zwischen x und p, sodass

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-p)^{n+1} \ .$$

Beweis. Siehe [Satz 5.15 aus Rudin]. □

Bemerkung 6.4.4.

(1) Die Funktion P aus dem Satz nennt man das *n-te Taylorpolynom von f im Punkt p*. Es ist das eindeutige Polynom P, so dass

- $f^{(k)}(p) = P^{(k)}(p)$ für $k = 0, 1, \ldots, n$, und
- $P^{(k)}(x) = 0$ für alle $k > n$ und $x \in \mathbb{R}$.

(Warum?) ?

(2) Für $n = 0$ ist der Taylorsche Satz gerade der Mittelwertsatz: $f(x) = f(p) + f'(t)(x-p)$.

(3) Wenn man eine Abschätzung der Form $|f^{(n+1)}(x)| \leq C$ für alle $x \in (a, b)$ finden kann, so erhält man:

$$|f(x) - P(x)| \ \leq \ \tfrac{C}{(n+1)!}\,|x-p|^{n+1} \ .$$

Insbesondere geht der Fehler, den man bei der Annährung von f durch das n-te Taylorpolynom P macht, schneller gegen 0 als $|x-p|^n$.

Beispiel 6.4.5.

(1) Für $f(x) = \sin(x)$ und $p = 0$ ist das $(2m+1)$-ste Taylorpolynom gegeben durch

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \ .$$

(Warum?) Da $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ für alle n und x erhalten wir die Abschätzung ?

$$|\sin(x) - P(x)| \leq \frac{1}{(2m+2)!}|x|^{2m+2} \ ,$$

gültig für alle $x \in \mathbb{R}$.

(2) Für $f(x) = \log(x)$ und $p = 1$ gilt $f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ und das n-te Taylorpolynom ist

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k \ .$$

Für ein t zwischen $x = 1 + y$ und $p = 1$ gilt nach dem obigen Satz, dass

$$\log(1+y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} y^k \ + \ \frac{(-1)^n}{n+1} t^{-n-1} y^{n+1} \ .$$

Für $-\frac{1}{2} < y < 1$ gilt in jedem Fall $|y/t|^{n+1} < 1$ (Warum?). Im Grenzübergang $n \to \infty$ folgt (für $-\frac{1}{2} < y < 1$) ?

$$\log(1+y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} y^k \ .$$

(Dies gilt sogar für alle $|y| < 1$, aber man braucht dann einen anderen Beweis.)

(3) Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

Die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ existiert auf ganz $\mathbb{R}$. Mit $g(x) = \exp(-1/x)$ gilt, dass $f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$ für $x > 0$ und $f^{(n)}(x) = 0$ für $x \leq 0$.

(Warum? Und insbesondere, warum gilt das bei 0? *Hinweis:* Aus Beispiel 5.5.3: Für $h : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^{-n}\exp(-1/x)$ gilt, dass $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$). ?

Das n-te Taylorpolynom bei $p = 0$ ist daher $P(x) = 0$, obwohl $f(x) > 0$ für jedes $x > 0$.

(4) In Teil 2 konnten wir zeigen: Das Taylorpolynom wird im Grenzübergang zu einer Potenzreihe (der *Taylorreihe*), und diese Potenzreihe konvergiert in einem gewissen Bereich gegen die ursprüngliche Funktion. In Teil 3 haben wir gesehen: Es kann sein, dass die Taylorreihe konvergiert, aber nur in einem Punkt mit der ursprünglichen Funktion übereinstimmt.

6.5 Vektorwertige Funktionen

Definition 6.1.1 funktioniert genauso für Funktionen, die Werte in $\mathbb{R}^d$ annehmen:

Definition 6.5.1. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$. Für $x \in [a,b]$ setze

$$\phi : [a,b] \setminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{R}^d \quad , \quad \phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \ .$$

Wir sagen, *f ist an der Stelle x differenzierbar*, falls der Grenzwert $\lim_{t\to x} \phi(t)$ existiert. Den Grenzwert selber nennen wir die *Ableitung von f an der Stelle x* und schreiben

$$f'(x) = \lim_{t\to x} \phi(t) \ .$$

Satz 6.5.2. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$, $f = (f_1, \ldots, f_d)$, wobei $f_d : [a,b] \to \mathbb{R}$ die Komponentenfunktionen sind. Es sind äquivalent

(i) f ist differenzierbar in x mit Ableitung $f'(x) = (v_1, \ldots, v_d)$,

(ii) f_i ist differenzierbar in x mit Ableitung $f_i'(x) = v_i$ für jedes $i = 1, \ldots, d$.

Beweis. Für $t \in [a,b]$, $t \neq x$ setze

$$\phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \in \mathbb{R}^k \quad \text{und} \quad \phi_i(t) = \frac{f_i(t) - f_i(x)}{t - x} \in \mathbb{R} \ .$$

wobei $i = 1, \ldots, d$. Für (i)$\Rightarrow$(ii) benutzt man für jedes $i = 1, \ldots, d$ die Abschätzung

$$|\phi_i(t) - v_i| \ \leq \ |\phi(t) - v| \ .$$

Dass (ii)$\Rightarrow$(i) gilt, folgt aus der Abschätzung

$$|\phi(t) - v| \leq \sqrt{k} \max\left\{|\phi_i(t) - v_i| \text{ für } i = 1, \ldots, k\right\} \ .$$

(Details für diese Richtung?) $\square$?

Bemerkung 6.5.3.

1. Da $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$: Die Ableitung von $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ und von $F : [a,b] \to \mathbb{C}^d$ ist nun auch definiert. (Aber nicht die Ableitung von $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^d$.)

2. Die Aussagen (i)–(iii) von Satz 6.1.5 (Rechenregeln für Ableitungen) gelten auch für $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$, mit dem gleichen Beweis. (Details?). ?

3. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Da $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{mn}$: Ableitung von $F : [a,b] \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ist definiert.

   Für $F : [a,b] \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $G : [a,b] \to \mathrm{Mat}_{l\times m}(\mathbb{K})$ haben wir eine Produktregel für Matrixprodukte:

   $$(G(x)F(x))' = G'(x)F(x) + G(x)F'(x) \ .$$

   (Details?) Für Produkte von Matrix und Vektor gilt die Produktregel analog. ?

Beispiel 6.5.4.

(1) Sei $c \in \mathbb{C}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \exp(cx)$.

Um $f'(x)$ zu berechnen, kann man *nicht* die Kettenregel anwenden, denn $f(x) = (\exp \circ h)(x)$ mit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto cx$, und $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, und wir können (noch) keine Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ableiten.

Also benutzen wir direkt die Definition:

$$\phi(t) = \frac{e^{ct} - e^{cx}}{t - x} = c\, e^{cx}\, \frac{e^{c(t-x)} - 1}{c(t-x)} \ ,$$

Mit der Restgliedabschätzung erhält man

$$f'(x) = \lim_{t\to x} \phi(t) = c\, e^{cx} \ .$$

(Details?) ?

(2) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = e^{ix}$. Dann $f'(x) = ie^{ix}$, und mit

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

und Satz 6.5.2 zeigt dies nochmal (aber einfacher), dass $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.

(3) Der Mittelwertsatz gilt nicht für Funktionen $[a,b] \to \mathbb{C}$ (oder für $[a,b] \to \mathbb{R}^d$, $d > 1$). Z.B. $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $f(x) = e^{ix}$. Dann $|f'(x)| = 1$ für alle x, aber $f(2\pi) - f(0) = 0 \neq (2\pi - 0)f'(t)$, egal welches t man nimmt. Aber Satz 6.5.6 unten ist ein Ersatz.

■ Für $v, w \in \mathbb{R}^d$ schreibe $\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + \cdots + v_d w_d$. Dann gilt insbesondere, dass $|v|^2 = \langle v, v \rangle$.

Lemma 6.5.5. (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)
Für $v, w \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\big|\langle v, w \rangle\big| \leq |v|\,|w| \ ,$$

und Gleichheit gilt nur, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis. Für $v = 0$ ist die Aussage wahr. Sei $v \neq 0$. Setze

$$x = w - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle} v \ .$$

Die Aussage folgt, wenn man x in $\langle x, x \rangle$ einsetzt, da $\langle x, x \rangle \geq 0$, und da $\langle x, x \rangle = 0$ nur für $x = 0$ (Details?). □ ?

Satz 6.5.6. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ stetig auf $[a, b]$ und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es ein $p \in (a, b)$, sodass

$$|f(b) - f(a)| \leq (b - a)\,|f'(p)| \ .$$

Beweis. Siehe [Satz 5.19 aus Rudin]. □

6.6 Fundamentalsatz der Algebra

(Dieses Unterkapitel hätte auch schon am Ende von Kapitel 5 kommen können.)

Satz 6.6.1. (Polardarstellung komplexer Zahlen)

(i) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gibt es $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\phi \in \mathbb{R}$, so dass $z = re^{i\phi}$.

(ii) Seien $r, r' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\phi, \phi' \in \mathbb{R}$, sodass $re^{i\phi} = r'e^{i\phi'}$. Dann folgt $r = r'$ und, falls $r, r' > 0$, auch $\phi - \phi' \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Beweis. (i) Wir können $z \neq 0$ annehmen. Dann $r = |z|$, und es bleibt, ein ϕ zu finden mit $e^{i\phi} = z/|z|$. Dazu zeigt man mit Z12A3 (2), dass cos die Werte ± 1 annimmt, und mit dem Zwischenwertsatz, dass auch alle Werte dazwischen angenommen werden. Da $e^{i\phi} = cos(\phi) + i\sin(\phi)$, gibt es somit ein ϕ, sodass der Realteil von $e^{i\phi}$ mit dem von $z/|z|$ übereinstimmt. Der Imaginärteil muss dann bis auf Vorzeichen stimmen. Das Vorzeichen wiederum kann man durch Ersetzen $\phi \rightsquigarrow -\phi$ anpassen. (Details?) ?

(ii) Dass $r = r'$ sieht man durch Betrag-nehmen. Das $\phi - \phi' \in 2\pi\mathbb{Z}$ folgt aus Z12A3 (4).

$\square$

Satz 6.6.2. (Fundamentalsatz der Algebra)
Sei $n \geq 1$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$. Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, z^k \ .$$

Dann gibt es ein $z \in \mathbb{C}$, sodass $P(z) = 0$.

■ In Worten: „Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle.“ Wenn man oben alle $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt, ist die Aussage falsch. (Gegenbeispiel? Welche Nullstellen hat Ihr Gegenbeispiel in $\mathbb{C}$?) ?

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $a_n = 1$ (Warum?). Setze ?

$$\mu := \inf \big\{ |P(z)| \, \big| \, z \in \mathbb{C} \big\} \ .$$

(Existiert, da die Menge durch 0 nach unten beschränkt ist.)

Beh.: Es gibt $R_0 > 0$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R_0$ gilt, dass $|P(z)| > \mu$.

Bew.: Für $z \in \mathbb{C}$ schreibe $R = |z|$. Dann

$$\begin{aligned} |P(z)| &= \Big| z^n - \Big(- \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \Big) \Big| \geq R^n - \Big| - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \Big| \\ &\geq R^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^k = R^n \Big(1 - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^{k-n} \Big) \ . \end{aligned}$$

Der Term in Klammern geht gegen 1 für $R \to \infty$ (da $k - n < 0$), und der Vorfaktor geht gegen unendlich. Somit gibt es ein R_0, sodass gilt:

$$\forall R > R_0 : R^n \Big(1 - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^{k-n} \Big) > \mu \ .$$

Dann auch $|P(z)| > \mu$ für alle z mit $|z| > R_0$.

Sei $D = \{ z \in \mathbb{C} \, | \, |z| \leq R_0 \}$ die abgeschlossene Kreisscheibe von Radius R_0. Da $|P(z)| > \mu$ für $z \notin D$ folgt

$$\mu = \inf \{ |P(z)| \, | \, z \in D \} \ .$$

Aber D ist kompakt und P ist stetig, also gibt es nach Satz 5.3.5 („Min und Max wird angenommen“) ein $z_0 \in D$ mit $|P(z_0)| = \mu$.

Nach Konstruktion gilt auch $|P(z)| \geq \mu$ für alle $z \in \mathbb{C}$ (nicht nur in D). P hat also genau dann eine Nullstelle, wenn $\mu = 0$, und in diesem Fall ist z_0 eine Nullstelle von P.

Beh.: $P(z_0) = 0$.

Bew.: Wir müssen zeigen, dass $\mu = 0$. Dazu machen wir einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass $\mu > 0$.

Dann ist $P(z_0) \neq 0$ (da $|P(z_0)| = \mu > 0$) und wir definieren ein neues Polynom $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ als

$$Q(z) = \frac{1}{P(z_0)} P(z + z_0) \ .$$

Es gilt $Q(0) = 1$, Q ist nicht konstant, und $Q(z) \geq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ (Warum?). ?
Schreibe

$$Q(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n \ .$$

Per Konstruktion ist $b_n \neq 0$ (Warum stimmt das, obwohl wir $P(z+z_0)/P(z_0)$?
betrachten?) Sei $1 \leq k \leq n$ minimal, so dass $b_k \neq 0$. Dann gilt also, dass

$$Q(z) = 1 + b_k z^k + \cdots + b_n z^n \ .$$

Nach der Polardarstellung von komplexen Zahlen gibt es ein $\varphi \in \mathbb{R}$, so dass $-b_k = |b_k| e^{i\varphi}$. Mit $\theta = -\varphi/k$ erhält man

$$e^{ik\theta} b_k = -|b_k| \ .$$

Für jedes $r > 0$ mit $r^k |b_k| < 1$ gilt dann

$$\left|1 + r^k e^{ik\theta} b_k\right| = \left|1 - r^k |b_k|\right| = 1 - r^k |b_k| \ .$$

(Ohne unsere spezielle Wahl von r und θ hätten wir hier nur eine Ungleichung mit „$\geq$“.) Damit rechnen wir weiter

$$\begin{aligned}
|Q(re^{i\theta})| &= \left|1 + b_k r^k e^{ik\theta} + \sum_{m=k+1}^{n} b_m r^m e^{im\theta}\right| \\
&\leq \left|1 + b_k r^k e^{ik\theta}\right| + \left|\sum_{m=k+1}^{n} b_m r^m e^{im\theta}\right| \\
&\leq 1 - |b_k| r^k + \sum_{m=k+1}^{n} |b_m| r^m \\
&= 1 - |b_k| r^k \Big(1 - \sum_{m=k+1}^{n} |b_m|/|b_k| r^{m-k}\Big) \ .
\end{aligned}$$

Da in der Summe im letzten Ausdruck nur positive r-Potenzen stehen, geht der Term in der Klammer gegen 1 für $r \to 0$. Somit gibt es ein r_0, sodass:

$$\forall r < r_0 \ : \ 1 - \sum_{m=k+1}^{n} |b_m|/|b_k| r^{m-k} \geq \frac{1}{2} \ .$$

Für solche r gilt dann aber auch $|Q(re^{i\theta})| \leq 1 - |b_k| r^k \frac{1}{2} < 1$. Widerspruch zu $|Q(z)| \geq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Bemerkung 6.6.3. Für ein beliebiges Polynom $P(z)$ von Grad ≥ 1 (also ist das Polynom nicht konstant) und für ein beliebiges $c \in \mathbb{C}$ können wir mittels Polynomdivision schreiben

$$P(z) = (z - c)F(z) + d \ ,$$

wobei $d \in \mathbb{C}$ eine Konstante ist. F ist wieder ein Polynom, aber der Grad von F ist um Eins kleiner als der von P. Sei nun z_0 eine Nullstelle von P, also $P(z_0) = 0$. Dann ergibt Polynomdivision, dass $P(z) = (z - z_0)F(z)$.

Wendet man den Fundamentalsatz wiederholt an, so erhält man Konstantanten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (nicht notwendigerweise alle verschieden), so dass

$$P(z) = a_n \cdot (z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n) \ .$$

(Details?) Also gilt: „Jedes nicht-konstante komplexe Polynom zerfällt in Linearfaktoren.“ Man überlegt sich weiter, dass die λ_i bis auf Reihenfolge eindeutig sind. ?

Index