Vollständige Theorien und Löwenheim-Skolem-Sätze

Lisa Friedl

19.9.2025

Vollständige Theorien

Definition 1.1

Eine $\mathcal{L}$ -Theorie T wird als vollständig bezeichnet, wenn für jede $\mathcal{L}$ -Aussage ϕ entweder $T \models \phi$ oder $T \models \neg\phi$ gilt.

Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$ -Struktur, dann ist

$$\text{Th}(\mathcal{M}) = \{\phi : \phi \text{ ist ein } \mathcal{L}\text{-Aussage und } \mathcal{M} \models \phi\}$$

eine vollständige Theorie.

Proposition 1.2

Sei T eine $\mathcal{L}$ -Theorie mit unendlichen Modellen. Ist κ eine unendliche Kardinalzahl und $\kappa \geq |\mathcal{L}|$, dann gibt es ein Modell von T der Kardinalität κ .

Beweis.

Sei $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{c_\alpha : \alpha < \kappa\}$, wobei jedes c_α ein neues Konstantensymbol ist, und sei $T^* = T \cup \{c_\alpha \neq c_\beta : \alpha, \beta < \kappa, \alpha \neq \beta\}$ eine $\mathcal{L}^*$ -Theorie.

Wenn ein Modell $\mathcal{M} \models T^*$, dann ist $\mathcal{M}$ eindeutig ein Modell von T mit Kardinalität mindestens κ . Somit reicht es gemäß Theorem 2.1.11 aus zu zeigen, dass T^* endlich erfüllbar ist.

Aber wenn $\Delta \subset T^*$ endlich ist, dann gilt

$\Delta \subseteq T \cup \{c_\alpha \neq c_\beta : \alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in I\}$, wobei I eine endliche Teilmenge von κ ist.

Sei $\mathcal{M}$ ein unendliches Modell von T . Wir können die Symbole $\{c_\alpha : \alpha \in I\}$ als $|I|$ verschiedene Elemente von $\mathcal{M}$ interpretieren. Da $\mathcal{M} \models \Delta$, ist T^* endlich erfüllbar. □

Definition 1.3

Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und sei T eine Theorie mit Modellen der Größe κ . Wir sagen, dass T κ -kategorisch ist, wenn zwei beliebige Modelle von T der Kardinalität κ isomorph sind.

Definition 1.4

ACF_p ist die Theorie algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik p , wobei p entweder 0 oder eine Primzahl ist.

Proposition 1.5

ACF_p ist κ -kategorisch für alle überabzählbaren Kardinalzahlen κ .

Beweis.

Zwei algebraisch abgeschlossene Körper sind genau dann isomorph, wenn sie die gleiche Charakteristik und den gleichen Transzendenzgrad haben. Ein algebraisch abgeschlossener Körper mit Transzendenzgrad λ hat die Kardinalität $\lambda + \aleph_0$.

Wenn $\kappa > \aleph_0$ ist, so hat ein algebraisch abgeschlossener Körper der Kardinalität κ auch den Transzendenzgrad κ . Somit sind zwei beliebige algebraisch abgeschlossene Körper mit derselben Charakteristik und derselben überzählbaren Kardinalität isomorph. $\square$

Beispiele

Wir geben zwei einfache Beispiele:

- 1) Sei $\mathcal{L}$ die leere Sprache. Dann ist die Theorie einer unendlichen Menge κ -kategorisch für alle Kardinalzahlen κ .
- 2) Sei $\mathcal{L} = \{E\}$, wobei E eine binäre Relation ist und sei T die Theorie einer Äquivalenzrelation mit genau zwei Klassen, die beide unendlich sind. Es ist leicht zu sehen, dass je zwei beliebige abzählbare Modelle von T isomorph sind. Andererseits ist T nicht κ -kategorisch für $\kappa > \aleph_0$. Um dies zu sehen, sei $\mathcal{M}_0$ ein Modell, in dem beide Klassen die Kardinalität κ haben, und sei $\mathcal{M}_1$ ein Modell, in dem eine Klasse die Kardinalität κ und die andere die Kardinalität $\aleph_0$ hat. Es ist klar, dass $\mathcal{M}_0$ und $\mathcal{M}_1$ nicht isomorph sind.

Vollständige Theorien

Satz 1.6 (Vaught-Test)

Sei T eine erfüllbare Theorie ohne endliche Modelle, die für eine unendliche Kardinalzahl $\kappa \geq |\mathcal{L}|$ κ -kategorisch ist. Dann ist T vollständig.

Beweis.

Angenommen, T ist nicht vollständig. Dann gibt es eine Aussage ϕ , sodass $T \not\models \phi$ und $T \not\models \neg\phi$. Da $T \models \psi$ für eine Aussage ψ genau dann gilt, wenn $T \cup \{\neg\psi\}$ erfüllbar ist, sind die Theorien $T_0 = T \cup \{\phi\}$ und $T_1 = T \cup \{\neg\phi\}$ erfüllbar. Da T keine endlichen Modelle hat, besitzen sowohl T_0 als auch T_1 unendliche Modelle.

Nach Proposition 1.2 können wir Modelle $\mathcal{M}_0$ und $\mathcal{M}_1$ der Kardinalität κ mit $\mathcal{M}_i \models T_i$ finden. Da $\mathcal{M}_0$ und $\mathcal{M}_1$ hinsichtlich ϕ nicht übereinstimmen, sind sie nicht elementar äquivalent und daher gemäß Theorem 1.1.10 nicht isomorph. Da T κ -kategorisch, ist dies ein Widerspruch. □

Definition 1.7

Wir sagen, dass eine $\mathcal{L}$ -Theorie T entscheidbar ist, wenn es einen Algorithmus gibt, der für eine $\mathcal{L}$ -Aussage ϕ entscheidet, ob $T \models \phi$.

Lemma 1.8

Sei T eine rekursiv vollständige erfüllbare Theorie in einer rekursiven Sprache $\mathcal{L}$. Dann ist T entscheidbar.

Beweis.

Da T erfüllbar ist, sind $A = \{\phi : T \models \phi\}$ und $B = \{\phi : T \models \neg\phi\}$ disjunkt. Da T konsistent ist, ist $A \cup B$ die Menge aller $\mathcal{L}$ -Aussagen. Nach dem Vollständigkeitsatz ist $A \Leftrightarrow \{\phi : T \vdash \phi\}$ und $B \Leftrightarrow \{\phi : T \vdash \neg\phi\}$. Nach Proposition 2.1.1 sind A und B rekursiv abzählbar. Aber jede rekursiv abzählbare Menge mit einem rekursiv abzählbaren Komplement ist rekursiv. □

Informell: Um zu entscheiden, ob ϕ eine logische Konsequenz einer vollständigen erfüllbaren rekursiven Theorie T ist, beginnen wir mit der Suche nach möglichen Beweisen aus T , bis wir entweder einen Beweis für ϕ oder einen Beweis für $\neg\phi$ finden. Da T erfüllbar ist, werden wir nicht beide Beweise finden. Da T vollständig ist, werden wir letztendlich einen Beweis für das eine oder das andere finden.

Korollar 1.9

Für $p = 0$ oder p Primzahl, ist ACF_p entscheidbar. Insbesondere ist $Th(\mathbb{C})$, die Theorie erster Ordnung des Körpers der komplexen Zahlen, entscheidbar.

Korollar 1.10

Sei ϕ eine Aussage in der Sprache der Ringe. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

i) ϕ ist in den komplexen Zahlen wahr.

ii) ϕ ist in jedem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null wahr.

iii) ϕ ist in einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null wahr.

iv) Es gibt beliebig große Primzahlen p , sodass ϕ in einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p wahr ist.

v) Es gibt ein m , sodass ϕ für alle $p > m$ in allen algebraisch abgeschlossenen Körpern der Charakteristik p wahr ist.

Beweis.

Die Äquivalenz von i) - iii) ist lediglich die Vollständigkeit von ACF_0 und v) $\Rightarrow$ iv) ist offensichtlich.

Für ii) $\Rightarrow$ v) nehmen wir an, dass $ACF_0 \models \phi$. Nach Lemma 2.1.14 gibt es ein endliches $\Delta \subset ACF_0$, sodass $\Delta \models \phi$. Wenn wir also p groß genug wählen, dann gilt $ACF_p \models \Delta$. Somit gilt $ACF_p \models \phi$ für alle ausreichend großen Primzahlen p . Für iv) $\Rightarrow$ ii) nehmen wir an, dass $ACF_0 \not\models \phi$. Da ACF_0 vollständig ist, gilt $ACF_0 \models \neg\phi$. Nach der obigen Argumentation gilt $ACF_p \models \neg\phi$ für ausreichend große p ; somit wäre iv) falsch, was zu einem Widerspruch führt. □

Aufwärts und Abwärts: Löwenheim-Skolem-Sätze

Definition 2.1

Wenn $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ $\mathcal{L}$ -Strukturen sind, dann wird eine $\mathcal{L}$ -Einbettung $j: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ als elementare Einbettung bezeichnet, wenn

$$\mathcal{M} \models \phi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathcal{N} \models \phi(j(a_1), \dots, j(a_n))$$

für alle $\mathcal{L}$ -Formeln $\phi(v_1, \dots, v_n)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{M}$ gilt. Wenn $\mathcal{M}$ eine Unterstruktur von $\mathcal{N}$ ist, sagen wir, dass es sich um eine elementare Unterstruktur handelt und schreiben $\mathcal{M} < \mathcal{N}$, wenn die Inklusionsabbildung elementar ist. Wir sagen auch, dass $\mathcal{N}$ eine elementare Erweiterung von $\mathcal{M}$ ist.

Beispiel

Isomorphismen sind elementare Abbildungen.

Definition 2.2

Angenommen, $\mathcal{M}$ ist eine $\mathcal{L}$ -Struktur. Sei $\mathcal{L}_M$ die Sprache, in der wir zu $\mathcal{L}$ für jedes Element von M Konstantensymbole m hinzufügen. Das atomare Diagramm von $\mathcal{M}$ ist

$\{\phi(m_1, \dots, m_n) : \phi \text{ ist entweder eine atomare L-Formel oder die Negation einer atomaren L-Formel und } \mathcal{M} \models \phi(m_1, \dots, m_n)\}$.

Das elementare Diagramm von $\mathcal{M}$ ist

$$\{\phi(m_1, \dots, m_n) : \mathcal{M} \models \phi(m_1, \dots, m_n), \phi \text{ ist } \mathcal{L}\text{-Formel}\}.$$

Wir bezeichnen $Diag(\mathcal{M})$ und $Diag_{el}(\mathcal{M})$ als das atomare bzw. elementare Diagramm von $\mathcal{M}$.

Lemma 2.3

- i) Angenommen, $\mathcal{N}$ ist eine $\mathcal{L}_M$ -Struktur und $\mathcal{N} \models \text{Diag}(\mathcal{M})$; dann gibt es, wenn man $\mathcal{N}$ als $\mathcal{L}$ -Struktur betrachtet, eine $\mathcal{L}$ -Einbettung von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{N}$.
- ii) Wenn $\mathcal{N} \models \text{Diag}_{el}(\mathcal{M})$, dann gibt es eine elementare Einbettung von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{N}$.

Beweis.

- i) Sei $j : M \rightarrow N$, $j(m) = m^N$, d.h. $j(m)$ ist die Interpretation des Konstantenzeichen m in N . Sind m_1, m_2 verschiedene Elemente von M , dann ist $m_1 \neq m_2 \in \text{Diag}(\mathcal{M})$; somit ist $j(m_1) \neq j(m_2)$, sodass j eine Einbettung ist. Wenn f ein Funktionssymbol von $\mathcal{L}$ ist und $f^M(m_1, \dots, m_n) = m_{n+1}$, dann ist $f(m_1, \dots, m_n) = m_{n+1}$ eine Formel in $\text{Diag}(\mathcal{M})$ und $f^N(j(m_1), \dots, j(m_n)) = j(m_{n+1})$. Wenn R ein Relationssymbol und $\bar{m} \in R^M$ ist, dann ist $R(m_1, \dots, m_n) \in \text{Diag}(\mathcal{M})$ und $(j(m_1), \dots, j(m_n)) \in R^N$. Daher ist j eine $\mathcal{L}$ -Einbettung.
- ii) Wenn $N \models \text{Diag}_{el}(\mathcal{M})$, dann ist die obige Abbildung j elementar. $\square$

Satz 2.4 (Aufsteigender Löwenheim-Skolem-Satz)

Sei $\mathcal{M}$ eine unendliche $\mathcal{L}$ -Struktur und κ eine unendliche Kardinalzahl mit $\kappa \geq |\mathcal{M}| + |\mathcal{L}|$. Dann gibt es eine $\mathcal{L}$ -Struktur $\mathcal{N}$ der Kardinalität κ und die Abbildung $j : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ist elementar.

Beweis.

Da $\mathcal{M} \models \text{Diag}_{el}(\mathcal{M})$, ist $\text{Diag}_{el}(\mathcal{M})$ erfüllbar. Nach Satz 2.1.11 gibt es $\mathcal{N} \models \text{Diag}_{el}(\mathcal{M})$ mit der Kardinalität κ . Nach Lemma 2.3 gibt es eine elementare Abbildung $j : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$. □

Proposition 2.5 (Tarski-Vaught Test)

Angenommen, $\mathcal{M}$ ist eine Unterstruktur von $\mathcal{N}$. Dann ist $\mathcal{M}$ genau dann eine elementare Unterstruktur, wenn für jede Formel $\phi(v, \bar{w})$ und $\bar{a} \in M$ gilt: Wenn es $b \in N$ gibt, sodass $\mathcal{N} \models \phi(b, \bar{a})$ ist, dann gibt es $c \in M$, sodass $\mathcal{N} \models \phi(c, \bar{a})$.

Beweis

Wenn $\mathcal{N}$ eine elementare Erweiterung von $\mathcal{M}$ ist, ist die Bedingung offensichtlich wahr. Um das Umgekehrte zu beweisen, müssen wir zeigen, dass für alle $\bar{a} \in M$ und alle $\mathcal{L}$ -Formeln $\psi(\bar{a})$ gilt

$$\mathcal{M} \models \psi(\bar{a}) \iff \mathcal{N} \models \psi(\bar{a}).$$

Wir beweisen dies durch Induktion über den Formelaufbau. In Proposition 1.1.8 haben wir gezeigt, dass, wenn $\phi(\bar{v})$ quantorenfrei ist, dann $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ genau dann, wenn $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a})$. Somit gilt die Behauptung für alle atomaren Formeln. Wenn die Behauptung für ψ gilt, dann

$$\mathcal{M} \models \neg\psi(\bar{a}) \iff \mathcal{M} \not\models \psi(\bar{a}) \iff \mathcal{N} \not\models \psi(\bar{a}) \iff \mathcal{N} \models \neg\psi(\bar{a}).$$

Beweis.

Ähnlich, wenn die Behauptung für ψ und θ gilt, dann

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \models (\psi \wedge \theta)(\bar{a}) &\iff \mathcal{M} \models \psi(\bar{a}) \text{ und } \mathcal{M} \models \theta(\bar{a}) \\ &\iff \mathcal{N} \models \psi(\bar{a}) \text{ und } \mathcal{N} \models \theta(\bar{a}) \\ &\iff \mathcal{N} \models (\psi \wedge \theta)(\bar{a}).\end{aligned}$$

Angenommen, die Behauptung ist für $\psi(v, \bar{w})$ wahr. Sei $\bar{a} \in M$. Wenn $\mathcal{M} \models \exists v \psi(v, \bar{a})$, dann gibt es $b \in M$, sodass $\mathcal{M} \models \psi(b, \bar{a})$. Nach unserer Induktionsannahme $\mathcal{N} \models \psi(b, \bar{a})$ und somit $\mathcal{N} \models \exists v \psi(v, \bar{a})$. Wenn andererseits $\mathcal{N} \models \exists v \psi(v, \bar{a})$ gilt, dann gibt es gemäß unseren Annahmen ein $c \in N$, sodass $\mathcal{N} \models \psi(c, \bar{a})$. Durch Induktion gilt $\mathcal{M} \models \psi(c, \bar{a})$ und $\mathcal{M} \models \exists v \psi(v, \bar{a})$. □

Skolem-Funktionen

Wir sagen, dass eine $\mathcal{L}$ -Theorie T eingebaute Skolem-Funktionen hat, wenn es für alle $\mathcal{L}$ -Formeln $\phi(v, w_1, \dots, w_n)$ ein Funktionssymbol f gibt, sodass $T \models \forall \bar{w}((\exists v \phi(v, \bar{w})) \rightarrow \phi(f(\bar{w}), \bar{w}))$. Mit anderen Worten, es gibt genügend Funktionssymbole in der Sprache, um alle Existenzaussagen zu bezeugen.

Lemma 2.6

Sei T eine $\mathcal{L}$ -Theorie. Es gibt $\mathcal{L}^* \supseteq \mathcal{L}$ und $T^* \supseteq T$ wobei T^* eine $\mathcal{L}^*$ -Theorie ist, sodass T^* eingebaute Skolem-Funktionen hat, und wenn $\mathcal{M} \models T$, dann können wir $\mathcal{M}$ zu $\mathcal{M}^* \models T^*$ erweitern. Wir können $\mathcal{L}^*$ so wählen, dass $|\mathcal{L}^*| = |\mathcal{L}| + \aleph_0$.

Wir nennen T^* dann eine Skolemisierung von T .

Beweis

Zur Erweiterung von $\mathcal{M}$ müssen wir alle Symbole in $\mathcal{L}^* \setminus \mathcal{L}$ interpretieren, damit $\mathcal{M}$ ein Modell von T ist. Wir bauen eine Folge von Sprachen $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \dots$ und $\mathcal{L}_i$ -Theorien T_i , mit $T = T_0 \subseteq T_1 \subseteq \dots$. Gegeben sei $\mathcal{L}_i$, dann sei $\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{L} \cup \{f_\phi : \phi(v, w_1, \dots, w_n) \text{ eine } \mathcal{L}_i\text{-Formel, } n = 1, 2, \dots\}$ wobei f_ϕ ein n -stelliges Funktionssymbol ist. Für die $\mathcal{L}_i$ -Formel $\phi(v, \bar{w})$ sei ψ_ϕ die Aussage

$$\forall \bar{w} \left((\exists v \phi(v, \bar{w})) \rightarrow \phi(f_\phi(\bar{w}), \bar{w}) \right)$$

und sei $T_{i+1} = T_i \cup \{\psi_\phi : \phi \text{ eine } \mathcal{L}_i\text{-Formel}\}$.

Aufwärts und Abwärts

Beweis.

Behauptung: Wenn $\mathcal{M} \models T_i$, dann können wir die Funktionssymbole von $\mathcal{L}_{i+1} \setminus \mathcal{L}_i$ so interpretieren, dass $\mathcal{M} \models T_{i+1}$. Sei c ein festes Element von M . Wenn $\phi(v, w_1, \dots, w_n)$ eine $\mathcal{L}_i$ -Formel ist, finden wir eine Funktion $g : M^n \rightarrow M$, sodass wenn $\bar{a} \in M^n$ und $X_{\bar{a}} = \{b \in M : \mathcal{M} \models \phi(b, \bar{a})\} \neq \emptyset$, dann ist $g(\bar{a}) \in X_{\bar{a}}$, und wenn $X_{\bar{a}} = \emptyset$, dann ist $g(\bar{a}) = c$ (c beliebig). Wenn also $\mathcal{M} \models \exists v \phi(v, \bar{a})$, dann $\mathcal{M} \models \phi(g(\bar{a}), \bar{a})$. Wenn wir f_ϕ als g interpretieren, gilt $\mathcal{M} \models \psi_\phi$. Sei $\mathcal{L}^* = \bigcup \mathcal{L}_i$ und $T^* = \bigcup T_i$. Wenn $\phi(v, \bar{w})$ eine $\mathcal{L}^*$ -Formel ist, dann gilt $\phi \in \mathcal{L}_i$ für ein bestimmtes i und $\psi_\phi \in T_{i+1} \subseteq T^*$, sodass T^* über integrierte Skolem-Funktionen verfügt. Durch Wiederholung dieser Aussage sehen wir, dass wir für jedes $\mathcal{M} \models T$ die Symbole von $\mathcal{L}^* \setminus \mathcal{L}$ so interpretieren können, dass $\mathcal{M} \models T^*$ gilt. Da wir für jede $\mathcal{L}_i$ -Formel ein Funktionssymbol zu $\mathcal{L}_{i+1}$ hinzugefügt haben, gilt $|\mathcal{L}_{i+1}| = |\mathcal{L}_i| + \aleph_0$, sodass $\mathcal{L}^*$ die gewünschte Kardinalität hat. $\square$

Satz 2.7 (Löwenheim-Skolem-Satz)

Angenommen, $\mathcal{M}$ ist eine $\mathcal{L}$ -Struktur und $X \subseteq M$, dann gibt es ein elementares Untermodell $\mathcal{N}$ von $\mathcal{M}$, sodass $X \subseteq N$ und $|\mathcal{N}| \leq |X| + |\mathcal{L}| + \aleph_0$.

Beweis

Nach Lemma 2.6 können wir annehmen, dass $Th(\mathcal{M})$ über integrierte Skolem-Funktionen verfügt. Sei nun $X_0 = X$. Für gegebenes X_i sei $X_{i+1} = X_i \cup \{f^{\mathcal{M}}(\bar{a}) : f \text{ ein } n\text{-stelliges Funktionssymbol, } \bar{a} \in X_i^n \text{ und } n = 1, 2, \dots\}$. Sei $N = \bigcup X_i$, dann gilt $|N| \leq |X| + |\mathcal{L}| + \aleph_0$.

Beweis.

Wenn f ein n -stelliges Funktionssymbol von $\mathcal{L}$ ist und $\bar{a} \in N^n$, dann gilt $\bar{a} \in X_i^n$ für ein bestimmtes i und $f^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \in X_{i+1} \subseteq N$. Damit ist $f^{\mathcal{M}}|N : N^n \rightarrow N$. Somit können wir f als $f^{\mathcal{N}} = f^{\mathcal{M}}|N^n$ interpretieren.

Für ein n -stelliges Relationssymbol R ist, sei $R^{\mathcal{N}} = R^{\mathcal{M}} \cap N^n$. Wenn c ein Konstantensymbol von $\mathcal{L}$ ist, gibt es eine Skolem-Funktion $f \in \mathcal{L}$, sodass $f(x) = c^{\mathcal{M}}$ für alle $x \in M$ gilt (zum Beispiel ist f die Skolem-Funktion für die Formel $v = c$). Somit ist $c^{\mathcal{M}} \in N$. Sei $c^{\mathcal{N}} = c^{\mathcal{M}}$. Dadurch wird N zu einer $\mathcal{L}$ -Struktur $\mathcal{N}$, die eine Unterstruktur von $\mathcal{M}$ ist.

Wenn $\phi(v, \bar{w})$ eine beliebige $\mathcal{L}$ -Formel ist, $\bar{a}, b \in M$ und $\mathcal{M} \models \phi(b, \bar{a})$, dann gilt $\mathcal{M} \models \phi(f(\bar{a}), \bar{a})$ für ein Funktionssymbol f von $\mathcal{L}$.

Konstruktionsbedingt ist $f^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \in N$. Somit gilt gemäß Satz 2.5 $\mathcal{N} < \mathcal{M}$. □

Definition 2.8

Eine universelle Aussage ist eine Aussage der Form $\forall \bar{v} \phi(\bar{v})$, wobei ϕ quantorenfrei ist. Wir sagen, dass eine $\mathcal{L}$ -Theorie T eine universelle Axiomatisierung hat, wenn es eine Menge universeller $\mathcal{L}$ -Aussagen Γ gibt, sodass $\mathcal{M} \models \Gamma$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{M} \models T$ für alle $\mathcal{L}$ -Strukturen $\mathcal{M}$ gilt.

Satz 2.9

Eine $\mathcal{L}$ -Theorie T hat genau dann eine universelle Axiomatisierung, wenn $\mathcal{M} \models T$ und $\mathcal{N}$ eine Unterstruktur von $\mathcal{M}$ ist, dann gilt $\mathcal{N} \models T$. Mit anderen Worten: Eine Theorie bleibt unter einer Unterstruktur genau dann erhalten, wenn sie eine universelle Axiomatisierung hat.

Beweis

Sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$. In Satz 1.1.8 haben wir gezeigt, dass, wenn $\phi(\bar{v})$ eine quantorenfreie Formel ist und $\bar{a} \in \mathcal{N}$, dann $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a})$ genau dann, wenn $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$. Wenn also $\mathcal{M} \models \forall \bar{v} \phi(\bar{v})$, dann gilt dies auch für $\mathcal{N}$.

Angenommen, T bleibt unter Unterstrukturen erhalten. Sei $\Gamma = \{\phi : \phi \text{ ist universell und } T \models \phi\}$. Es ist klar, dass, wenn $\mathcal{N} \models T$, dann auch $\mathcal{N} \models \Gamma$. Für die andere Richtung nehmen wir an, dass $\mathcal{N} \models \Gamma$. Wir behaupten, dass $\mathcal{N} \models T$.

Beweis.

Behauptung: $T \cup \text{Diag}(\mathcal{N})$ ist erfüllbar. Angenommen, dies ist nicht der Fall. Dann gibt es gemäß des Kompaktheitssatzes ein endliches $\Delta \subseteq \text{Diag}(\mathcal{N})$, sodass $T \cup \Delta$ nicht erfüllbar ist. Sei $\Delta = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$. Seien $\bar{c}$ die neuen Konstanten aus N , die in $\psi_1, \dots, \psi_n$ verwendet werden, und sei $\psi_i = \phi_i(\bar{c})$, wobei ϕ_i eine quantorenfreie $\mathcal{L}$ -Formel ist. Da die Konstanten in $\bar{c}$ nicht in T vorkommen, wenn $T \cup \{\exists v \wedge \phi_i(\bar{v})\}$ ein Modell hat, dann wäre $T \cup \Delta$ erfüllbar.

Somit gilt $T \models \forall \bar{v} \bigvee \neg \phi_i(\bar{v})$. Da die letztere Formel universell ist, gilt $\forall \bar{v} \bigvee \neg \phi_i(\bar{v}) \in \Gamma$, was im Widerspruch zu $\mathcal{N} \models \Gamma$ steht.

Nach Lemma 2.3 gibt es $\mathcal{M} \models T$ mit $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{N}$. Da T unter der Unterstruktur erhalten bleibt, gilt $\mathcal{N} \models T$ und Γ ist eine universelle Axiomatisierung von T . □

Definition 2.10

Angenommen $(I, <)$ ist eine lineare Ordnung. Sei $\mathcal{M}_i$ eine $\mathcal{L}$ -Struktur für $i \in I$. Wir sagen, dass $(\mathcal{M}_i : i \in I)$ eine Kette von $\mathcal{L}$ -Strukturen ist, wenn $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}_j$ für $i < j$ gilt.

Wenn $\mathcal{M}_i < \mathcal{M}_j$ für $i < j$ ist, nennen wir $(\mathcal{M}_i : i \in I)$ eine elementare Kette.

Wenn $(\mathcal{M}_i : i \in I)$ eine nicht leere Kette von Strukturen ist, dann können wir $\mathcal{M} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$, die Vereinigung der Kette, wie folgt definieren.

Die Trägermenge von $\mathcal{M}$ ist $M = \bigcup_{i \in I} M_i$. Wenn c eine Konstante in der Sprache ist, dann ist $c^{\mathcal{M}_i} = c^{\mathcal{M}_j}$ für alle $i, j \in I$, also $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}_i}$.

Angenommen, $\bar{a} \in M$. Da I linear geordnet ist, können wir $i \in I$ finden, sodass $\bar{a} \in M_i$. Wenn f ein Funktionssymbol von $\mathcal{L}$ ist und $i < j$, dann ist $f^{\mathcal{M}_i}(\bar{a}) = f^{\mathcal{M}_j}(\bar{a})$. Somit ist $f^{\mathcal{M}} = \bigcup_{i \in I} f^{\mathcal{M}_i}$ eine wohldefinierte Funktion.

Ähnlich gilt: Wenn R ein Relationssymbol von $\mathcal{L}$ ist und $i < j$, dann gilt $\bar{a} \in R^{\mathcal{M}_i}$ genau dann, wenn $\bar{a} \in R^{\mathcal{M}_j}$. Sei $R^{\mathcal{M}} = \bigcup_{i \in I} R^{\mathcal{M}_i}$. Nun ist leicht zu sehen, dass $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}$ für alle $i \in I$ gilt.

Proposition 2.11

Angenommen $(I, <)$ ist eine lineare Ordnung und $(\mathcal{M}_i : i \in I)$ ist eine elementare Kette. Dann ist $\mathcal{M} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$ eine elementare Erweiterung von jedem $\mathcal{M}_i$.

Beweis.

Wir beweisen durch Induktion über Formelaufbau, dass

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) \iff \mathcal{M}_i \models \phi(\bar{a})$$

für alle $i \in I$, alle Formeln $\phi(\bar{v})$ und alle $\bar{a} \in M_i^n$ gilt. Da $\mathcal{M}_i$ eine Unterstruktur von $\mathcal{M}$ ist, gilt dies gemäß Satz 1.1.8 für alle atomaren ϕ . Es ist leicht zu sehen, dass, wenn dies für ϕ und ψ gilt, es auch für $\neg\phi$ und $\phi \wedge \psi$ zutrifft.

Angenommen, $\phi = \exists v \psi(v, \bar{w})$ und die Behauptung gilt für ψ . Wenn $\mathcal{M}_i \models \psi(b, \bar{a})$, dann gilt dies auch für $\mathcal{M}$. Wenn also $\mathcal{M}_i \models \phi(\bar{a})$, dann gilt dies auch für $\mathcal{M}$. Wenn andererseits $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$, gibt es $j \geq i$, sodass $b \in M_j$ gilt. Durch Induktion folgt $\mathcal{M}_j \models \psi(b, \bar{a})$, also gilt $\mathcal{M}_j \models \phi(\bar{a})$. Da $\mathcal{M}_i < \mathcal{M}_j$, erhalten wir $\mathcal{M}_i \models \phi(\bar{a})$, wie gewünscht. □

Danke für eure Aufmerksamkeit

Quellen: David Marker, Model Theory: an Introduction, Springer-Verlag