Löwenheim-Skolem-Sätze

Bem.: $L = (C, F, R, s)$ ist ein festes Vokabular.

Def.: Seien $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ L-Strukturen. Eine L-Einbettung $j : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ heißt <u>elementar</u>, wenn gilt: $\mathcal{M} \models \phi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathcal{N} \models \phi(j(a_1), \dots, j(a_n))$

für alle L-Formeln $\phi(v_1, \dots, v_n)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in M$.

Ist $\mathcal{M}$ eine Substruktur von $\mathcal{N}$, so nennen wir $\mathcal{M}$ eine <u>elementare Substruktur</u> von $\mathcal{N}$, i.Z. $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, wenn die Einbettung $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$ elementar ist.

$\mathcal{N}$ heißt auch eine <u>elementare Erweiterung</u> von $\mathcal{M}$.

Def.: Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur. Dann ist L_M das Vokabular, in dem wir zu L Konstantensymbole c_m $\forall m \in M$ hinzufügen.

Das <u>atomare Diagramm</u> von $\mathcal{M}$ ist

$$\mathrm{Diag}(\mathcal{M}) := \{ \phi(c_{m_1}, \dots, c_{m_n}) \mid \phi \text{ oder } \neg\phi \text{ atomare } L\text{-Formel}, \mathcal{M} \models \phi(m_1, \dots, m_n) \}$$

Das <u>elementare Diagramm</u> von $\mathcal{M}$ ist

$$\mathrm{Diag}_{el}(\mathcal{M}) := \{ \phi(c_{m_1}, \dots, c_{m_n}) \mid \phi \ L\text{-Formel}, \mathcal{M} \models \phi(m_1, \dots, m_n) \}.$$

Lemma: i) Sei $\mathcal{N}$ eine L_M-Struktur und $\mathcal{N} \models \mathrm{Diag}(\mathcal{M})$. Dann ex. eine L-Einbettung von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$, wobei man $\mathcal{N}$ dabei als L-Struktur betrachtet.

ii) Gilt $\mathcal{N} \models \mathrm{Diag}_{el}(\mathcal{M})$, so gibt es eine elementare Einbettung $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$.

Bew.:

i) $j: M \to N$, $j(m) = m^{\mathcal{N}}$

$\phi(x,y) = (x \neq y)$, wenn $m_1 \neq m_2$ in M

$\Rightarrow \phi(c_{m_1}, c_{m_2}) \in \mathrm{Diag}(\mathcal{M})$

$c_{m_1}^{\mathcal{N}} \neq c_{m_2}^{\mathcal{N}} \Rightarrow j$ Einbettung ✓

- $c \in C \Rightarrow c^{\mathcal{M}} = m$ für ein $m \in M$

$\phi(x) = (c = x) \Rightarrow \phi(c_m) \in \mathrm{Diag}(\mathcal{M})$

$\Rightarrow c^{\mathcal{N}} = c_m^{\mathcal{N}} = j(m) = j(c^{\mathcal{M}})$

- $f \in F$ und $f^{\mathcal{M}}(\overline{m}) = m_{n+1} \Rightarrow f(\overline{c_m}) = c_{m_{n+1}} \in \mathrm{Diag}(\mathcal{M})$

$\Rightarrow f^{\mathcal{N}}(\overline{c_m}^{\mathcal{N}}) = c_{m_{n+1}}^{\mathcal{N}} \Leftrightarrow f^{\mathcal{N}}(\overline{j(m)}) = j(m_{n+1})$

- $r \in R$ und $\overline{m} \in r^{\mathcal{M}} \Rightarrow r(\overline{c_m}) \in \mathrm{Diag}(\mathcal{M})$

$\Rightarrow (j(\overline{m})) \in r^{\mathcal{N}}$

$\Rightarrow j$ ist eine L-Einbettung.

ii) Gilt $\mathcal{N} \models \mathrm{Diag}_{el}(\mathcal{M}) \Rightarrow j$ elementar

$\phi(\overline{v})$ L-Formel, $\overline{m} \in M$. Dann gilt:

- $\mathcal{M} \models \phi(\overline{m}) \Leftrightarrow \phi(\overline{c_m}) \in \mathrm{Diag}_{el}(\mathcal{M}) \Rightarrow \mathcal{N} \models \phi(\overline{j(m)})$

- $\mathcal{N} \models \phi(\overline{j(m)})$. Ang. $\mathcal{M} \not\models \phi(\overline{m}) \Rightarrow \neg\phi(\overline{c_m}) \in \mathrm{Diag}_{el}(\mathcal{M})$

$\Rightarrow \mathcal{N} \models \neg\phi(\overline{j(m)})$ ↯

$\square$

Satz: Löwenheim-Skolem-Theorem nach oben

Sei $\mathcal{M}$ eine unendliche L-Struktur und κ eine unendliche Kardinalzahl mit $\kappa \geq |\mathcal{M}| + |L|$. Dann ex. eine L-Struktur $\mathcal{N}$ mit $|\mathcal{N}| = \kappa$ und eine elementare L-Einbettung $j: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$.

Bew.:

$\mathcal{M} \models \mathrm{Diag}_{el}(\mathcal{M}) \Rightarrow \mathrm{Diag}_{el}(\mathcal{M})$ erfüllbar.

$\Rightarrow$ Nach Satz 2.1.11 ex. $\mathcal{N} \models \mathrm{Diag}_{el}(\mathcal{M})$ mit $|\mathcal{N}| = \kappa$.

Obiges Lemma liefert ein elementares $j: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$.

$\square$

Satz: <u>Tarski-Vaught-Test</u>

Sei $\mathcal{M}$ eine Substruktur von $\mathcal{N}$. Dann ist $\mathcal{M}$ eine elementare Substruktur genau dann, wenn für jede Formel $\phi(v, \overline{w})$ und jedes $\overline{a} \in M$ gilt:

$\exists b \in N : \mathcal{N} \models \phi(b, \overline{a}) \Rightarrow \exists c \in M : \mathcal{N} \models \phi(c, \overline{a})$

Bew.: „$\Rightarrow$" klar, $\mathcal{M} \models \exists v \phi(v, \overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \exists v \phi(v, \overline{a})$

„$\Leftarrow$" z.z. $\forall$ L-Formeln $\phi(\overline{v})$, alle $\overline{a} \in M$ gilt

$\mathcal{M} \models \phi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi(j(\overline{a})) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi(\overline{a})$

Wir machen Induktion über den Formelaufbau.

- Satz 1.1.8 besagt: $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{M} \models \phi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi(\overline{a})$ für alle L-Formeln ϕ, die keine Quantoren enthalten.
  $\Rightarrow$ atomare Formeln ✓
- ϕ, ψ erfüllen unsere Beh.
  $\Rightarrow \mathcal{M} \models \neg\phi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \phi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \not\models \phi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \neg\phi(\overline{a})$
  $\Rightarrow \mathcal{M} \models (\phi \wedge \psi)(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models (\phi \wedge \psi)(\overline{a})$
- Ang. die Beh. für $\phi(v, \overline{u})$
  - $\mathcal{M} \models \exists v \phi(v, \overline{a}) \Rightarrow \exists b \in M \; \mathcal{M} \models \phi(b, \overline{a}) \Rightarrow \exists b \in N \; \mathcal{N} \models \phi(b, \overline{a})$
    $\Rightarrow \mathcal{N} \models \exists v \phi(v, \overline{a})$
  - $\mathcal{N} \models \exists v \phi(v, \overline{a}) \Rightarrow \exists b \in N \; \mathcal{N} \models \phi(b, \overline{a}) \overset{\text{Vor}}{\Rightarrow} \exists c \in M \; \mathcal{N} \models \phi(c, \overline{a})$
    $\Rightarrow \exists c \in M \; \mathcal{M} \models \phi(c, \overline{a}) \Rightarrow \mathcal{M} \models \exists v \phi(v, \overline{a})$

$\square$

Def: Wir sagen eine L-Theorie T hat <u>eingebaute Skolem-Funktionen</u>, wenn für alle L-Formeln $\phi(v, \bar{w})$ ein Funktionssymbol $f \in F$ ex., so dass gilt:

$$T \models \forall \bar{w} \left((\exists v\, \phi(v, \bar{w})) \to \phi(f(\bar{w}), \bar{w}) \right)$$

Lemma: Sei T eine L-Theorie. Dann ex. ein Vokabular $L^* \supseteq L$ und eine L^*-Theorie $T^* \supseteq T$, s.d. T^* eingebaute Skolem-Funktionen besitzt.

Ist $\mathcal{M}$ ein Modell von T, $\mathcal{M} \models T$, so können wir $\mathcal{M}$ erweitern zu $\mathcal{M}^* \models T^*$.

Wir können L^* so wählen, dass $|L^*| = |L| + \aleph_0$.

Wir nennen T^* eine <u>Skolemisierung</u> von T.

Bew.: Wir bauen $L = L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \dots$ und

$T = T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots$ wobei T_i eine L_i-Theorie

$L_{i+1} = L_i \cup \{ f_\phi \mid \phi(v, \bar{w})\ L_i\text{-Formel} \}$, wobei f_ϕ ein n-stelliges Funktionssymbol.

Sei $\phi(v, \bar{w})$ eine L_i-Formel, dann ist

$$\psi_\phi = \forall \bar{w} \left((\exists v\, \phi(v, \bar{w})) \to \phi(f_\phi(\bar{w}), \bar{w}) \right)$$

$T_{i+1} = T_i \cup \{ \psi_\phi \mid \phi\ L_i\text{-Formel} \}$

Bed.: Falls $\mathcal{M} \models T_i$, dann können wir die Funktionssymbole in $L_{i+1} \setminus L_i$ in $\mathcal{M}$ interpretieren, s.d. $\mathcal{M} \models T_{i+1}$

$L^* := \bigcup_i L_i$, $T^* = \bigcup_i T_i$

Per Konstruktion hat T^* eingebaute Skolem-Fkt.

Ist $\mathcal{M} \models T \Rightarrow \mathcal{M} \models T_i \quad \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathcal{M} \models T^*$

$|L^*| = |L| + \aleph_0$, weil $|L_{i+1}| = |L_i| + \aleph_0$

$\square$

Satz: Löwenheim – Skolem – Theorem (nach unten)

Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und $X \subseteq M$. Dann ex. eine elementare Substruktur $\mathcal{N}$ von $\mathcal{M}$ mit $X \subseteq N$ und $|N| \leq |X| + |L| + \aleph_0$.

Bew.:

- Mit dem obigen Lemma können wir annehmen, dass $Th(\mathcal{M})$ eingebaute Skolem-Fkt. besitzt.
- $X_0 := X$, $X_{i+1} = X_i \cup \{ f^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \mid f \in F, \bar{a} \in X_i \}$

  $\Rightarrow$ Def. $N := \bigcup_i X_i$
- $f \in F, \bar{a} \in N \Rightarrow \bar{a} \in X_i$ für ein i $\Rightarrow f^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \in X_{i+1} \subseteq N$

  $f^{\mathcal{N}} := f^{\mathcal{M}}|_N$
- $r \in R$, $r^{\mathcal{N}} := r^{\mathcal{M}} \cap N^n$
- $c \in C$: $\phi(v, x) = (v = c)$

  $\exists f \in F: \mathcal{M} \models \forall x ((\exists v\, \phi(v,x)) \to \phi(f(x), x))$

  $\Rightarrow f^{\mathcal{M}}(x) = c^{\mathcal{M}} \quad \forall x \in M$

  $\Rightarrow c^{\mathcal{M}} \in N \Rightarrow$ Def. $c^{\mathcal{N}} := c^{\mathcal{M}}$

  Per Def $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$.
- $\phi(v, \bar{w})$ L-Formel, $\bar{a} \in N, b \in M$, $\mathcal{M} \models \phi(b, \bar{a})$

  $\Rightarrow \mathcal{M} \models \phi(f^{\mathcal{M}}(\bar{a}), \bar{a})$ für ein $f \in F$

  $\Rightarrow f^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \in N \Rightarrow \exists c \in N: \mathcal{M} \models \phi(c, \bar{a})$

  $\Rightarrow \mathcal{N} \prec \mathcal{M}$.

$\square$

Def: Eine <u>universelle Aussage</u> ist eine Aussage von der Form $\forall \bar{v}\, \phi(\bar{v})$, wobei in ϕ keine Quantoren vorkommen. Wir sagen eine L-Theorie T hat eine <u>universelle Axiomatisierung</u>, wenn es eine Menge Γ von universellen L-Aussagen gibt, s.d. für alle L-Strukturen $\mathcal{M}$ gilt:

$$\mathcal{M} \models \Gamma \iff \mathcal{M} \models T.$$

Satz: Eine L-Theorie T hat eine universelle Axiomatisierung genau dann, wenn für alle Strukturen $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} \models T$ und Substruktur $\mathcal{N}$ auch $\mathcal{N} \models T$ gilt.

Bew.:

„$\Rightarrow$" Satz 1.1.8 $\Rightarrow$ wenn $\phi(\bar{v})$ keine Quantoren enthält, dann gilt $\forall \bar{a} \in N$: $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$

$\Rightarrow \mathcal{M} \models \forall \bar{v}\, \phi(\bar{v}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \forall \bar{v}\, \phi(\bar{v})$

$\Rightarrow \mathcal{M} \models T \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \Gamma \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \Gamma \Leftrightarrow \mathcal{N} \models T$

„$\Leftarrow$" Ang. T wird T wird von Substrukturen erhalten.

$\Gamma := \{ \phi \mid \phi \text{ universelle Aussage}, T \models \phi \}$

Offensichtlich gilt $\mathcal{N} \models T \Rightarrow \mathcal{N} \models \Gamma$.

Sei $\mathcal{N} \models \Gamma$. z.z. $\mathcal{N} \models T$

<u>Beh.:</u> $T \cup \mathrm{Diag}(\mathcal{N})$ ist erfüllbar.

Ang. nicht. Dann ex. nach dem Kompaktheitssatz eine endl. Menge $\Delta = \{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subseteq \mathrm{Diag}(\mathcal{N})$, s.d. $T \cup \Delta$ nicht erfüllbar ist. Seien $\bar{c} \in N$ die neuen Konstanten-Symbole die in den ψ_i vorkommen. $\psi_i = \phi_i(\bar{c})$, ϕ_i sind L-Formeln ohne Quantoren. Die $\bar{c} \notin T$.

Betr. $T' = T \cup \{ \exists \bar{v} \bigwedge_i \phi_i(\bar{v}) \}$. Gäbe es ein Modell von T', so gäbe es auch ein Modell von $T \cup \Delta$, was nicht der Fall ist.

$\Rightarrow T \models \neg \exists \bar{v} \bigwedge_i \phi_i(\bar{v}) = \neg \exists \bar{v} \neg \bigvee_i \neg \phi_i(\bar{v}) = \forall \bar{v} \bigvee_i \neg \phi_i(\bar{v})$

$\Rightarrow \forall \bar{v} \bigvee_i \neg \phi_i(\bar{v}) \in \Gamma$

$\Rightarrow$ Weil $\mathcal{N} \models \Gamma$ würde auch $\mathcal{N} \models \forall \bar{v} \bigvee_i \neg \phi_i(\bar{v})$ $\lightning$ zu $\mathcal{N} \models \Gamma'$]

$\Rightarrow$ Mit dem Lemma vom Anfang, ex. eine Struktur $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} \models T$ und $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$

$\Rightarrow \mathcal{N} \models T$

$\square$

<u>Def</u>: · Sei $(I,<)$ eine lineare Ordnung. Seien $\mathcal{M}_i$, $i \in I$, L-Strukturen. Wir sagen $(\mathcal{M}_i \mid i \in I)$ ist eine <u>Kette</u> von L-Strukturen, wenn $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}_j \; \forall i < j$ gilt.

· Gilt $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j \; \forall i<j$, so heißt $(\mathcal{M}_i \mid i \in I)$ eine <u>elementare Kette</u>.

· Ist $(\mathcal{M}_i \mid i \in I)$ eine nicht leere Kette, dann def. wir $\mathcal{M} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$, die <u>Vereinigung der Kette</u> wie folgt:

- Das Universum von $\mathcal{M}$ ist $M := \bigcup_{i \in I} M_i$.
- Ist $c \in C$, so gilt $c^{\mathcal{M}_i} = c^{\mathcal{M}_j} \; \forall i,j \in I$. Setze $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}_i}$.
- Sei $\bar{a} \in M$. Dann ex. $i \in I : \bar{a} \in M_i$. Ist $f \in F$ und $i<j$, so gilt

  $f^{\mathcal{M}_i}(\bar{a}) = f^{\mathcal{M}_j}(\bar{a})$

  $\Rightarrow f^{\mathcal{M}} := \bigcup_{i \in I} f^{\mathcal{M}_i}$
- Ähnlich erhalten wir für $r \in R$ und $i<j$

  $\bar{a} \in r^{\mathcal{M}_i} \Leftrightarrow \bar{a} \in r^{\mathcal{M}_j}$.

  Sei $r^{\mathcal{M}} = \bigcup_{i \in I} r^{\mathcal{M}_i}$

Satz: Sei $(I, <)$ lineare Ordnung und $(\mathcal{M}_i \mid i \in I)$ eine elementare Kette. Dann ist $\mathcal{M} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$ eine elementare Erweiterung von jedem $\mathcal{M}_i$.

Bew.: Induktion über den Formelaufbau:

- Satz. 1.1.8 $\Rightarrow$ atomare Formeln ✓
- Gilt für ϕ, ψ die Beh. so auch für $\neg\phi, \phi \wedge \psi$.
- $\phi = \exists v\, \psi(v, \overline{w})$, $\psi(v, \overline{w})$ erfüllt die Beh., $\overline{a} \in M_i$
- $\mathcal{M}_i \models \phi(\overline{a}) \Rightarrow \exists b \in M_i \; \mathcal{M}_i \models \psi(b, \overline{a}) \Rightarrow \exists b \in M \; \mathcal{M} \models \psi(b, \overline{a})$

  $\Rightarrow \mathcal{M} \models \phi(\overline{a})$
- $\mathcal{M} \models \psi(b, \overline{a})$ für ein $b \in M \Rightarrow \exists j \geq i : b \in \mathcal{M}_j$

  $\mathcal{M}_j \models \psi(b, \overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{M}_i \models \psi(b, \overline{a})$

$\Rightarrow \mathcal{M} \models \phi(\overline{a}) \Rightarrow \mathcal{M}_i \models \phi(\overline{a})$

$\square$