Aufgaben: Semantik der Aussagenlogik

In der Mathematik betrachtet man Aussagen, denen genau einer der Wahrheitswerte wahr (w) oder falsch (f) zugeordnet ist. Aus Aussagen A und B können mit logischen Operatoren folgende zusammengesetzte Aussagen gebildet werden:

- $\neg A$ (logisches Nicht; wahr, wenn A falsch ist; falsch, wenn A wahr ist),
- $A \wedge B$ (logisches Und; wahr, wenn A, B beide wahr sind; sonst falsch),
- $A \vee B$ (logisches Oder; falsch, wenn A, B beide falsch sind; sonst wahr),
- $A \Longrightarrow B$ (Folgerung; falsch, wenn A wahr und B falsch ist; sonst wahr),
- $A \Longleftrightarrow B$ (Äquivalenz; wahr, wenn A und B gleichen Wahrheitswert haben; sonst falsch).

Die beschriebenen Wahrheitswerte der zusammengesetzten Aussagen können auch durch in der Vorlesung angegebene Wahrheitstafeln definiert werden.

(a) Entscheiden Sie, welche folgenden Aussagen wahr, welche falsch sind (*Ergebnis reicht*):

$$(12 \text{ ist gerade}) \wedge \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}\right), \qquad (\neg(8 \text{ ist gerade})) \vee \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2\right),$$

$$(16 \text{ ist Quadratzahl}) \vee (4 + 4 = 8), \qquad (1 + 1 = 1) \Longrightarrow (2 \text{ ist gerade}),$$

$$(17 \text{ ist ungerade}) \Longrightarrow (3 \cdot 3 = 9), \qquad 7 \text{ ist gerade} \Longleftrightarrow (49 \text{ ist gerade}).$$

Liefern zwei logische Formeln aus endlich vielen Platzhaltern (meist A, B, C, ...) für Aussagen und endlich vielen logischen Operatoren für alle Wahrheitswerte der einzelnen Aussagen den gleichen Wahrheitswert, so heißen die zwei Formeln **gleichbelegt**. Ist eine logische Formel bei allen Belegungen der einzelnen Aussagen wahr, so heißt die Formel eine **Tautologie**.

Seien im Folgenden A, B, C Platzhalter für mathematische Aussagen.

(b) Beweisen Sie durch Ausfüllen der folgenden Wahrheitstafel das Kontrapositions-Prinzip, gemäß dem $A \Longrightarrow B$ mit $(\neg B) \Longrightarrow (\neg A)$ gleichbelegt ist:

A	B	$A \Longrightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg B) \Longrightarrow (\neg A)$
w	w				
w	f				
f	w				
f	f				

(Mit anderen Worten kann dieses Prinzip auch dadurch ausgedrückt werden, dass $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow ((\neg B) \Longrightarrow (\neg A))$ eine Tautologie ist.)

(c) Weisen Sie durch Aufstellen und Ausfüllen einer entsprechenden Wahrheitstafel nach, dass $A \Longleftrightarrow B$ gleichbelegt mit $(\neg A) \Longleftrightarrow (\neg B)$, also mit anderen Worten

$$(A \Longleftrightarrow B) \Longleftrightarrow ((\neg A) \Longleftrightarrow (\neg B))$$

eine Tautologie ist.

(d) Beweisen Sie anhand einer weiteren Wahrheitstafel (dieses Mal mit 8 Zeilen!), dass das „logische Distributivgesetz"

$$((A \wedge B) \vee C) \Longleftrightarrow ((A \vee C) \wedge (B \vee C))$$

eine Tautologie ist.

Die Verneinung von Und-/Oder-Aussagen regeln die de Morganschen Gesetze, das sind die beiden Tautologien

$$(\neg(A \wedge B)) \Longleftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B)) \qquad \text{und} \qquad (\neg(A \vee B)) \Longleftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B)).$$

(e) Folgern Sie aus (c), (d) und den gerade genannten Gesetzen, dass auch das andere „logische Distributivgesetz"

$$((A \vee B) \wedge C) \Longleftrightarrow ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))$$

eine Tautologie ist. (Hinweis: Verneinungen einsetzen, gleichbelegte Formeln ersetzen!)