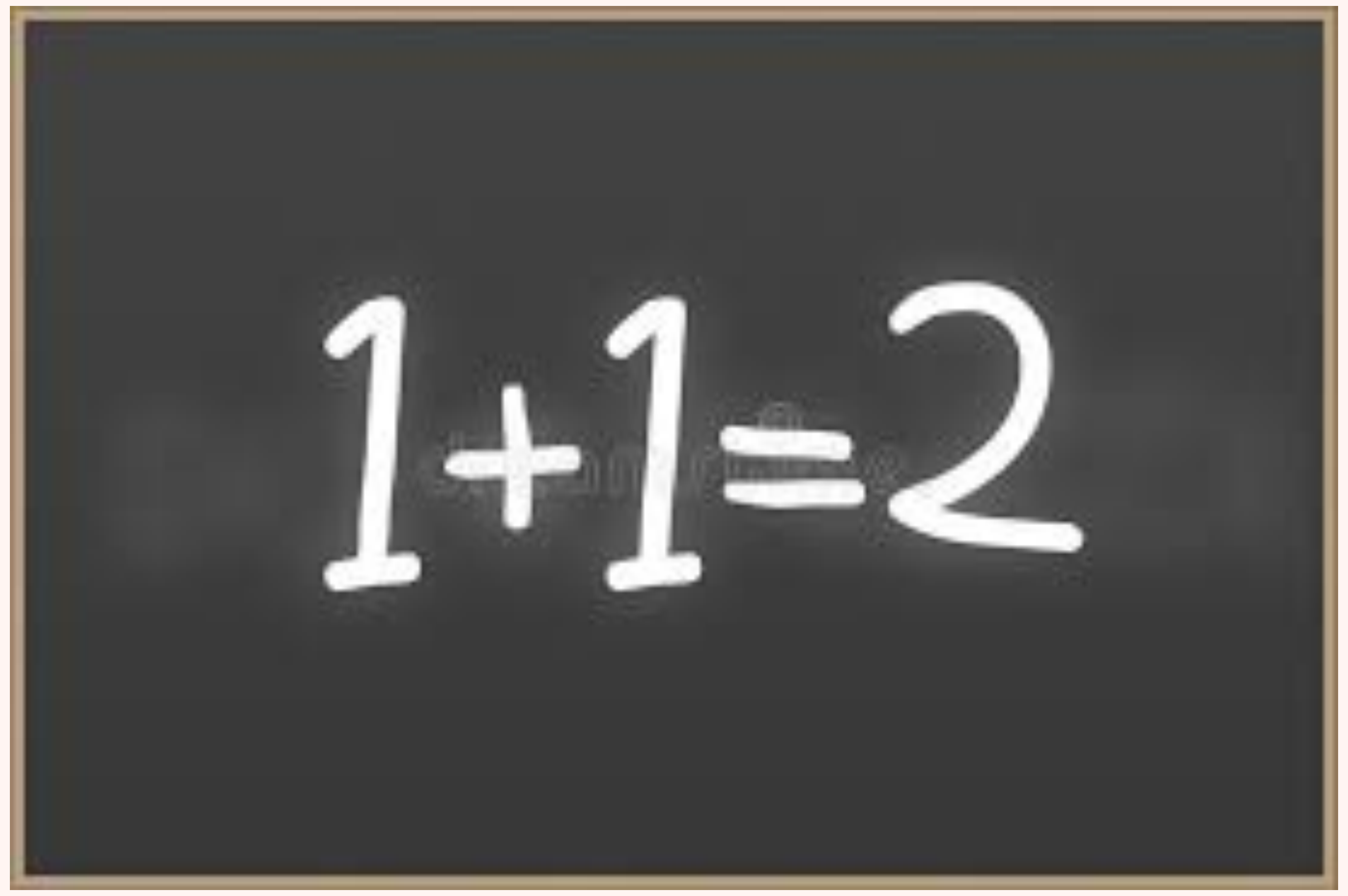
KALKÜL DES NATÜRLICHEN SCHLIEßENS

Harun Yildirim

21.03.2023

Gliederung

- Einleitung
- Regeln zur Ableitung
- Anwendung
- Zusammenfassung
- Quellen



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:1+1=2.png

Einleitung

Kalkül des natürlichen Schließens ist nicht genau definiert

Merkmale:

- Prämissen können als gültig angenommen werden
- Regelkalkül (Formationsregel für Konnektive, Transformationsregel für Ableitungen)
- Regeln besitzen auf zwei Varianten (Beseitigungs- und Einführungsregel)

Einleitung

Folgerungsstrich

Prämisse oder Annahme

$$(\wedge E)\ \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ \wedge E$$

Operation

Konklusion

Regeln zur Ableitung
Einführung (E)

Einführung von Konjunktion

$$(\wedge E)\;\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\;\wedge E$$

Aus zwei Aussagen φ und γ kann die Konjunktion „φ und ψ“ geschlossen werden

Beispiel?

Regeln zur Ableitung

Beseitigung (B)

Beseitigung von Konjunktion

$$(\wedge B)\ \frac{\varphi \wedge \gamma}{\varphi}\ \wedge B \qquad\qquad (\wedge B)\ \frac{\varphi \wedge \gamma}{\gamma}\ \wedge B$$

Aus einer Konjunktion „ φ und γ“ kann jedes einzelne Konjunkt, also sowohl φ als auch γ, erschlossen werden.

Beispiel: „Die Tomate ist rot und bunt“ ($\varphi \wedge \gamma$) kann geschlossen werden:

„Die Tomate ist rot“ (φ) (und auch „Die Tomate ist bunt“ (γ)).

Regeln zur Ableitung

Einführung (E)

Einführung von Disjunktion

$$(\vee E)\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\vee E$$

Aus einer Aussage φ kann die Disjunktion „φ oder ψ“ geschlossen werden.

Beispiel: Aus „Die Tomate ist rot“ (φ) kann geschlossen werden: „Die Tomate ist rot oder gelb“ (φ ∨ ψ).

Regeln zur Ableitung

Beseitigung (B)

Beseitigung von Disjunktion

$$(\vee B)\ \frac{\varphi \vee \psi \quad \varphi \vdash \gamma \quad \psi \vdash \gamma}{\gamma}\ \vee B$$

Wenn es gelingt, aus jedem Disjunkt einer Disjunktion „φ oder ψ“ einen Satz γ herzuleiten,

dann folgt dieser Satz γ aus der Disjunktion.

Beispiel: Aus „Die Tomate ist rot oder gelb“ ($\varphi \vee \psi$) kann geschlossen werden: „Die Tomate ist bunt“ (γ).

Regeln zur Ableitung

Einführung (E)

Einführung von Implikation

$$(\rightarrow E)\ \frac{\varphi \vdash \gamma}{\varphi \rightarrow \gamma} \quad \rightarrow E$$

Wenn es gelingt, aus einer Aussage φ eine Aussage γ herzuleiten, dann ist – begründet durch das Deduktionstheorem – auch die Implikation „Wenn φ, dann γ“ herleitbar.

Beispiel: Wenn ich aus der Annahme „Die Tomate ist rot“ (φ) folgern darf „Die Tomate ist bunt“ (γ), so darf ich (frei von dieser Annahme) folgern: „Wenn die Tomate rot ist, so ist bunt “ (φ → γ).

Regeln zur Ableitung

Beseitigung (B)

Beseitigung von Implikation

$$(\to B)\ \frac{\varphi \quad \varphi \to \gamma}{\gamma} \quad \to B$$

Modus ponens: Aus der Implikation „Wenn φ, dann γ“ folgt zusammen mit φ die Aussage γ.

Beispiel: Aus „Wenn die Tomate rot ist, so ist bunt“ (φ → γ) folgt zusammen mit „Die Tomate ist rot“ (φ) die Aussage „Die Tomate ist bunt“ (γ).

Regeln zur Ableitung

Einführung (E)

Einführung von Negation

$$(\neg E)\ \frac{\theta \vdash ([\alpha] \wedge [\neg\alpha]) \vdash \bot}{\neg\theta} \quad \neg E$$

Wenn sich aus einer Aussage θ ein Widerspruch herleiten lässt, dann darf auf die Negation „nicht θ“ geschlossen werden.

Beispiel: Aus der Aussage „Die bunte Tomate ist nur grün“ (θ) folgt zum einen „Die Tomate ist nur grün“ (α). Es folgt aber auch „Die Tomate ist nicht nur grün“ (¬α), weil es nach (θ) ja bunt ist. Wir können also schließen: „Es trifft nicht zu, dass die bunte Tomate nur grün ist“ (¬θ).

Diese Regel entspricht der Beweistechnik „Indirekter Beweis“ bzw. Reductio ad absurdum.

Regeln zur Ableitung

Beseitigung (B)

Beseitigung von Negation

$$(\neg B)\ \frac{\psi \quad \neg\psi}{\bot}\ \neg B$$

Beispiel: Aus den Aussagen „Die bunte Tomate ist gelb“ (ψ) und „Es ist nicht wahr, dass die bunte Tomate gelb ist“ ($\neg\psi$), folgt ein Widerspruch.

Regeln zur Ableitung

Beseitigung (B)

Beseitigung von Widerspruch

$$(\bot B)\frac{\bot}{\psi}\bot B$$

Aus falschen Aussagen kann alles folgen

Einführung von Widerspruch existiert nicht!

Regeln zur Ableitung

Einführung (E)

Einführung von doppelter Negation

$$(\neg\neg E)\,\frac{\psi}{\neg\neg\psi}\,\neg\neg E$$

Beispiel: Aus „Die Tomate ist gelb“ (ψ) folgt „Es ist falsch, dass die Tomate nicht gelb ist “ ($\neg\neg\psi$).

Regeln zur Ableitung

Beseitigung (B)

Beseitigung von doppelter Negation

$$(\neg\neg B)\ \frac{\neg\neg\psi}{\psi}\ \neg\neg B$$

Duplex negatio affirmat: Aus der Aussage „nicht nicht ψ" kann auf ψ geschlossen werden.

Beispiel: Aus „Es stimmt nicht, dass die Tomate nicht gelb ist " (¬¬ψ) folgt „Die Tomate ist gelb" (ψ).

Anwendung

	Einführung (E)	Beseitigung (B)
$\wedge$	$(\wedge E)\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\wedge E$	$(\wedge B)\dfrac{\varphi \wedge \gamma}{\varphi}\wedge B$
$\vee$	$(\vee E)\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\vee E$	$(\wedge B)\dfrac{\varphi \wedge \gamma}{\varphi}\wedge B$
$\longrightarrow$	$(\rightarrow E)\dfrac{\varphi \vdash \gamma}{\varphi \rightarrow \gamma} \rightarrow E$	$(\rightarrow B)\dfrac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \gamma}{\gamma} \rightarrow B$
$\neg$	$(\neg E)\dfrac{\theta \vdash ([\neg\alpha] \wedge [\neg\alpha]) \vdash \bot}{\neg\theta}\neg E$	$(\neg B)\dfrac{\psi \quad \neg\psi}{\bot}\neg B$
$\bot$	Keine Regel	$(\bot B)\dfrac{\bot}{\psi}\bot B$
$\neg\neg$	$(\neg\neg E)\dfrac{\psi}{\neg\neg\psi}\neg\neg E$	$(\neg\neg B)\dfrac{\neg\neg\psi}{\psi}\neg\neg B$