SELTSAME STÄDTE UND VERMUTUNG VON BORSUK

MATHIAS SCHACHT

Zusammenfassung. Mithilfe der linearen Algebra entwickeln wir Schranken für endliche Familien von Mengen mit eingeschränkten paarweisen Schnitten und beantworten damit eine Frage Borsuk über Zerlegungen beschränkter Mengen im $\mathbb{R}^n$.

§1 Vereine in seltsamen Städte

Eine seltsame Stadt habe n Einwohner und sich folgende Grundregeln für seine mögliche Vereinsstruktur gegeben:

(I) jeder Verein hat gerade viele Mitglieder,
(II) je zwei Vereine haben eine gerade Anzahl von gemeinsamen Mitgliedern und
(III) keine zwei Vereine haben identische Mitglieder.

Um den Verwaltungsaufwand abschätzen zu können, überlegt man sich in der Stadtverwaltung, wieviele Vereine in der Stadt maximal gegründet werden können? Nach kurzem Nachdenken, stellt man fest, dass sich in der Stadt $\lfloor n/2 \rfloor$ feste Zweiergruppen bilden können und mit diesen Zweiergruppen könnten dann $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ Vereine gegründet werden, die den Regeln (I)–(III) genügen würden. Offensichtlich würde dieser theoretische Verwaltungsaufwand die Kapazitäten weit übersteigen und ein restriktiveres Regelwerk muss erdacht werden. Überraschenderweise scheint sich die Anzahl der Vereine deutlich einzuschränken, wenn man die erste Regel so ändert, dass nur noch Vereine mit ungerade vielen Mitgliedern zulässig sind. Einfache Beispiele, z. B. jede Person gründet ihren eigenen Verein, zeigen an, dass die Gründung von n Vereinen möglich ist, aber niemanden gelingt es eine zulässige Vereinsfamilie mit mehr Vereinen zu finden. Tatsächlich können wir mit einem einfachen Dimensionsargument zeigen, dass dies nicht möglich ist.

Proposition 1. *Sei $\mathcal{F} \subseteq \wp([n])$ eine Mengenfamilie von Teilmengen von $[n]$, so dass*

(i) $|F|$ ist ungerade für jedes $F \in \mathcal{F}$ und
(ii) $|F \cap F'|$ ist gerade für alle F, $F' \in \mathcal{F}$ mit $F \neq F'$.

Dann gilt $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ eine Mengenfamilie die den Bedingungen der Proposition genügt. Mithilfe von Indikatorvektoren betten wir $\mathcal{F}$ in $\mathbb{F}_2^n$ ein und werden zeigen, dass die Bedingungen *(i)* und *(ii)* lineare Unabhängigkeit unter den Indikatorvektoren erzwingen und die gesuchte Schranke für $|\mathcal{F}|$ folgt unmittelbar.

Sei also $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ und für $i \in [m]$ sei $\mathbb{1}_i$ der Indikatorvektor von F_i, d. h. für jedes $j \in [n]$ gilt

$$\mathbb{1}_i(j) = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } j \in F_i\,, \\ 0\,, & \text{falls } j \notin F_i\,. \end{cases}$$

Mithilfe des Skalarproduktes in $\mathbb{F}_2^n$ übersetzen sich *(i)* und *(ii)* für $i, j \in [m]$ zu

$$\langle \mathbb{1}_i, \mathbb{1}_j \rangle = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } i = j\,, \\ 0\,, & \text{falls } i \neq j\,. \end{cases}$$

Insbesondere sind die Indikatorvektoren nicht trivial und paarweise orthogonal. Somit sind sie linear unabhängig und

$$|\mathcal{F}| = m \leqslant \dim(\mathbb{F}_2^n) = n$$

folgt. □

§2 Mengenfamilien mit eingeschränkten Schnittgrössen

Als Nächstes verallgemeinern wir Proposition 1 für allgemeinere Mengenschnitte und Restklassen. Sätze dieser Form gehen auf die grundlegenden Arbeiten von Ray-Chaudhuri und Wilson [14] und Frankl und Wilson [7] zurück. Die folgende Version lässt sich zu einer Arbeit von Deza, Frankl und Singhi [5] zurückverfolgen und kann als modulare und nicht-uniforme Verallgemeinerung der Sätze von Ray-Chaudhuri und Wilson und von Frankl und Wilson gesehen werden.

Satz 2. *Sei p eine Primzahl, sei $Q \subseteq \{0, \dots, p-1\}$ eine Menge bestehend aus r natürlichen Zahlen und sei $\mathcal{F} \subseteq \wp([n])$ eine Mengenfamilie von Teilmengen von $[n]$, so dass*

(a) $|F| \notin Q \pmod p$ für jedes $F \in \mathcal{F}$ und

(b) $|F \cap F'| \in Q \pmod p$ für alle $F, F' \in \mathcal{F}$ mit $F \neq F'$.

Dann gilt $|\mathcal{F}| \leqslant \sum_{j=0}^{r} \binom{n}{j}$.

Satz 2 angewendet für $p = 2$ und $Q = \{0\}$ impliziert die obere Schranke

$$|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n}{0} + \binom{n}{1} = n + 1\,,$$

welche nur um eins schwächer ist, als die Schranke aus Proposition 1.

Wir folgen beim Beweis von Satz 2 der Strategie aus der Arbeit von Alon, Babai und Suzuki [1] und werden die Schranke für $\mathcal{F}$ wieder über ein Dimensionsargument nachweisen.

Anstelle von $\mathbb{F}_2^n$ werden wir die multilinearen Polynome vom Grad höchstens r in n Variablen $x_1, \dots, x_n$ über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$ betrachten.

Ein Polynom $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ über einem Körper K ist eine endliche Summe von Monomen der Form

$$\alpha \prod_{j \in J} x_j^{k_j}$$

mit $\alpha \in K$, $J \subseteq [n]$ und natürlichen Zahlen $k_j \geqslant 1$ für alle $j \in J$. Ein solches Monom hat $|J|$ Variablen x_j für $j \in J$ und den Grad $\sum_{j \in J} k_j \geqslant |J|$. Der Grad von f ist dann das Maximum der Grade seiner Monome. Das Polynom f heißt *multilinear*, wenn für jedes seiner Monome der Grad der Anzahl der Variablen entspricht, d. h. jede Variable x_j in jedem Monom hat den Exponenten 1.

Für die Menge $U = \{0, 1\}$ der neutralen Elemente in dem Körper K und jede natürliche Zahl $k \geqslant 1$ gilt

$$0^k = 0 \quad \text{und} \quad 1^k = 1\,.$$

Somit gibt es für jedes Polynom $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ mit höchstens r Variablen in jedem Monom ein multilineares Polynom $\widetilde{f}$ vom Grad höchstens r, welches auf U^n identisch ausgewertet wird, d. h.

$$f(\xi_1, \dots, \xi_n) = \widetilde{f}(\xi_1, \dots, \xi_n) \tag{2.1}$$

für alle $\xi_1, \dots, \xi_n \in U$. Da wir im Folgenden die Polynome nur auf Indikatorvektoren auswerten werden, können wir uns mithilfe dieser Beobachtung auf multilineare Polynome beschränken und den Vorteil ausnutzen, dass der Vektorraum dieser Polynome eine kleinere Dimension hat.

Beweis von Satz 2. Seien p, Q und $\mathcal{F}$ gegeben und sei $U = \{0, 1\}$ die Menge der neutralen Elemente in $\mathbb{F}_p$. Für jede Menge $F \in \mathcal{F}$ sei $\mathbb{1}_F \in U^n$ der Indikatorvektor von F und betrachte das Polynom f_F aus $\mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_n]$ definiert durch

$$f_F(x_1, \dots, x_n) = \prod_{q \in Q} \big(\langle \mathbb{1}_F, \vec{x} \rangle - q\big)$$

für $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Offensichtlich hat jedes Monom von f_F höchstens Grad $|Q| = r$ und enthält somit auch höchstens r Variablen. Darüber hinaus folgen aus der Definition von f_F und der Bedingung *(b)* aus Satz 2 die Orthogonalitätsrelationen

$$f_F(\mathbb{1}_{F'}) = \begin{cases} \prod_{q \in Q} \big(|F| - q\big)\,, & \text{falls } F = F'\,, \\ 0\,, & \text{falls } F \neq F'\,. \end{cases} \tag{2.2}$$

Insbesondere zieht Bedingung (a) auch

$$\prod_{q\in Q}\big(|F|-q\big)\neq 0 \tag{2.3}$$

nach sich.

Für jedes Polynom f_F sei $\widetilde{f}_F$ das entsprechende multilineare Polynom (siehe Gleichung (2.1)). Aus den Eigenschaften von f_F folgt:

$$\widetilde{f}_F \text{ hat höchstens Grad } r \text{ und die Gleichungen (2.2) gelten analog für } \widetilde{f}_F(\mathbb{1}_{F'}). \tag{2.4}$$

Abschließend werden wir zeigen, dass die Polynome $\widetilde{f}_F$ für $F\in\mathcal{F}$ linear unabhängig im Untervektorraum $\mathcal{M}_{p,n}^{(\leqslant r)}\subseteq\mathbb{F}_p[x_1,\dots,x_n]$ der multlinearen Polynome mit Grad höchstens r sind. Da die Familie der Monome

$$\Big\{\prod_{j\in J}x_j\colon J\subseteq[n] \text{ und } |J|\leqslant r\Big\}$$

eine Basis von $\mathcal{M}_{p,n}^{(\leqslant r)}$ ist, folgt somit die behauptete Schranke von Satz 2

$$|\mathcal{F}|=\big|\big\{\widetilde{f}_F\colon F\in\mathcal{F}\big\}\big|\leqslant\dim\big(\mathcal{M}_{p,n}^{(\leqslant r)}\big)=\sum_{j=0}^{r}\binom{n}{j}.$$

Für den Nachweis der linearen Unabhängigkeit sei ν das Nullpolynom in $\mathbb{F}_p[x_1,\dots,x_n]$ und für $\alpha_F\in\mathbb{F}_p$ für $F\in\mathcal{F}$ gelte

$$\sum_{F\in\mathcal{F}}\alpha_F\widetilde{f}_F=\nu\,. \tag{2.5}$$

Für beliebiges $F'\in\mathcal{F}$ erhalten wir

$$0=\nu(\mathbb{1}_{F'})=\sum_{F\in\mathcal{F}}\alpha_F\widetilde{f}_F(\mathbb{1}_{F'})\overset{(2.2),(2.4)}{=}\alpha_{F'}\cdot\prod_{q\in Q}\big(|F'|-q\big)$$

und mit Blick auf (2.3) folgt somit $\alpha_{F'}=0$, d. h. die Linearkombination (2.5) ist trivial und die multilinearen Polynome $\widetilde{f}_F$ für $F\in\mathcal{F}$ sind linear unabhängig. □

Im nächsten Kapitel werden wir auf folgendes Korollar von Satz 2 zurückgreifen, welches von Frankl und Wilson [7] bewiesen wurde..

Korollar 3 (Frankl & Wilson 1981). *Sei p eine Primzahl p und sei $\mathcal{F}\subseteq[4p]^{(2p)}$ eine Familie $2p$-elementiger Teilmengen der ersten $4p$ positiven ganzen Zahlen mit $|F\cap F'|\neq p$ für alle F, $F'\in\mathcal{F}$. Dann gilt $|\mathcal{F}|\leqslant\binom{4p}{p}$.*

Beweis. Wir folgern mit Satz 2, angewendet mit $Q=\{1,\dots,p-1\}$, die behauptete Schranke

$$|\mathcal{F}|\leqslant\sum_{j=0}^{p-1}\binom{4p}{j}\leqslant\binom{4p}{p},$$

wobei wir für die letzte Abschätzung die allgemeine Ungleichung

$$\sum_{j=0}^{a} \binom{n}{j} \leqslant \binom{n}{a+1} \quad \text{solange } 3a+2 \leqslant n$$

herangezogen haben, welche sich leicht mit induktiv zeigen lässt. □

§3 Zerlegungen beschränkter Mengen im $\mathbb{R}^n$

Am Ende seiner Arbeit [3] stellte Borsuk folgende Frage, deren positive Antwort später als Vermutung von Borsuk bekannt wurde.

Frage (Borsuk 1933)**.** *Lässt sich jede beschränkte Teilmenge E des Raumes $\mathbb{R}^n$ in $(n+1)$ Mengen zerlegen, von denen jede einen kleineren Durchmesser als E hat?*

Offensichtlich muss man die leere Menge und einelementige Mengen hier als pathologischen Fälle ausschließen. Es ist leicht einzusehen, dass eine Zerlegung in $n+1$ Mengen bestmöglich wäre, um z. B. die $n+1$ Ecken eines regulären Simplexes in $\mathbb{R}^n$ zu separieren. Borsuk hatte gezeigt, dass auch die n-dimensionale Kugel keine solche Zerlegung mit nur n Mengen zulässt.

Sei also $\beta(n)$ die kleinste natürliche Zahl b, so dass sich jede beschränkte Teilmenge im $\mathbb{R}^n$ mit positivem Durchmesser durch b Mengen mit kleinerem Durchmesser überdecken lässt.

Man kann leicht einsehen, dass $\beta(1) = 2$ gilt und $\beta(2) = 3$ folgt aus einem Ergebnis von Jung [11] (siehe auch die Arbeit von Gale [8]). Für $n = 3$ wurde die Frage von Borsuk von Eggleston [6] gelöst (siehe auch den elementargeometrischen Beweis von Grünbaum [9]) und es gilt $b(3) = 4$, während die Frage im 4-dimensionalen Raum noch nicht beantwortet werden konnte.

Für allgemeines n konnten nur exponentielle obere Schranken für $\beta(n)$ etabliert werden (siehe dazu die Arbeit von Lassak [13]) und die beste bekannte obere Schranke

$$\beta(n) \leqslant 1{,}225^n$$

für hinreichend große wurde von Schramm [15] bewiesen. Mit Blick auf die Frage von Borsuk erscheint diese obere Schranke sehr schwach, aber in Angesicht der folgenden unteren Schranke von Kahn und Kalai [12], die die Frage von Borsuk im Allgemeinen negativ beantwortet, bekommt sie deutlich mehr Relevanz.

Satz 4 (Kahn & Kalai 1993)**.** *Für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt $\beta(n) \geqslant 1{,}2^{\sqrt{n}}$.*

Beweis. Für eine Primzahl p setzen wir $n = \binom{4p}{2}$ und halten fest

$$\sqrt{n} = \sqrt{8p^2 - 2p} \leqslant \sqrt{8} \cdot p\,. \tag{3.1}$$

Im Folgendem werden wir eine Menge

$$E \subseteq \{0,1\}^{\binom{[4p]}{2}} \subseteq \mathbb{R}^{\binom{[4p]}{2}} \simeq \mathbb{R}^n$$

angeben, d. h. die Punkte in E sind Indikatorvektoren deren Einträge mit Paaren aus $[4p]$ indiziert sind. Für jede $2p$-elementige Teilmenge $F \subseteq [4p]$ sei P_F die Menge der Paare bestehend aus einem Element aus F und einem Element aus dem Komplement $\overline{F} = [4p] \smallsetminus F$ und es bezeichne $\mathbb{1}_{P_F} \in \{0,1\}^{\binom{[4p]}{2}}$ den Indikatorvektor von P_F. Die Menge E sei dann definiert durch

$$E = \{\mathbb{1}_{P_F} \colon F \subseteq [4p] \text{ und } |F| = 2p\}\,.$$

Für den Euklidischen Abstand $d(\cdot,\cdot)$ zweier Punkte in E gilt

$$\begin{aligned} d^2\big(\mathbb{1}_{P_F}, \mathbb{1}_{P_{F'}}\big) &= \|\mathbb{1}_{P_F} - \mathbb{1}_{P_{F'}}\|^2 \\ &= |P_F| + |P_{F'}| - 2|P_F \cap P_{F'}| = 2 \cdot \big(4p - |P_F \cap P_{F'}|\big)\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Der Abstand der Punkte $\mathbb{1}_{P_F}, \mathbb{1}_{P_{F'}} \in E$ hängt also ausschließlich vom Schnitt der Mengen P_F und $P_{F'}$ ab. Wir erhalten weiter

$$\big|P_F \cap P_{F'}\big| = \big|F \cap F'\big| \cdot \big|\overline{F} \cap \overline{F'}\big| + \big|F \cap \overline{F'}\big| \cdot \big|\overline{F} \cap F'\big|\,. \tag{3.3}$$

Da wir uns in der Definition von E auf Teilmengen der Größe $2p$ in $[4p]$ beschränken, gilt in diesem Kontext $|F| = |\overline{F}| = |F| = |\overline{F'}| = 2p$ und es folgt

$$\big|F \cap F'\big| = \big|\overline{F} \cap \overline{F'}\big| \quad \text{und} \quad \big|F \cap \overline{F'}\big| = \big|\overline{F} \cap F'\big| = 2p - \big|F \cap F'\big|\,.$$

Die Identität (3.3) reduziert sich somit auf

$$\big|P_F \cap P_{F'}\big| = |F \cap F'|^2 + \big(2p - |F \cap F'|\big)^2$$

und die quadratische Gleichung nimmt ihr Minimum für $|F \cap F'| = p$ an.

Mit Blick auf (3.2) wird also der Durchmesser in E, durch Punkte $\mathbb{1}_{P_F}$ und $\mathbb{1}_{P_{F'}}$ mit $|F \cap F'| = p$ realisiert und an dieser Stelle können wir Korollar 3 zur Anwendung bringen. Dieses besagt, dass jede Teilmenge von E mit kleinerem Durchmesser höchstens $\binom{4p}{p}$ Punkte haben kann und die Menge E zeigt damit an

$$\beta(n) \geqslant \frac{|E|}{\binom{4p}{p}} = \frac{\binom{4p}{2p}}{\binom{4p}{p}} = \frac{(3p)! \cdot p!}{(2p)! \cdot (2p)!}\,.$$

Mit den Abschätzungen $\sqrt{2\pi a} \cdot (a/\mathrm{e})^a \leqslant a! \leqslant \sqrt{2\pi a} \cdot \mathrm{e} \cdot (a/\mathrm{e})^a$ aus der Stirling-Formel erhalten wir schließlich

$$\beta(n) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2\mathrm{e}^2} \cdot \frac{3^{3p}}{2^{4p}} = \frac{\sqrt{3}}{2\mathrm{e}^2} \cdot \left(\frac{27}{16}\right)^p = \frac{\sqrt{3}}{2\mathrm{e}^2} \cdot \left(\left(\frac{27}{16}\right)^{1/\sqrt{8}}\right)^{\sqrt{8}\cdot p} \overset{(3.1)}{\geqslant} \frac{\sqrt{3}}{2\mathrm{e}^2} \cdot \left(\left(\frac{27}{16}\right)^{1/\sqrt{8}}\right)^{\sqrt{n}}$$

und der Satz folgt für hinreichend großes p, da $(27/16)^{1/\sqrt{8}} > 1{,}2$ ist. $\square$

Mithilfe des Bertrandschen Postulat kann diese Schranke auch für alle hinreichend großen n etabliert werden. Optimierte Versionen dieser Konstruktion und weitere Konstruktionen wurden in nachfolgenden Arbeiten von einer Reihe von Autoren entwickelt. Die kleinste Dimension in der ein Negativbeispiel bekannt ist, ist $n = 64$ (siehe dazu die Arbeiten von Jenrich und Brouwer [10] und Bondarenko [2] und die Referenzen darin).

Literatur

[1] N. Alon, L. Babai, and H. Suzuki, *Multilinear polynomials and Frankl–Ray-Chaudhuri–Wilson type intersection theorems*, J. Combin. Theory Ser. A **58** (1991), no. 2, 165–180, DOI 10.1016/0097-3165(91)90058-O. MR1129114 ↑2

[2] A. Bondarenko, *On Borsuk's conjecture for two-distance sets*, Discrete Comput. Geom. **51** (2014), no. 3, 509–515, DOI 10.1007/s00454-014-9579-4. MR3201240 ↑3

[3] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fund. Math. **20** (1933), 177–190, DOI 10.4064/fm-20-1-177-190. ↑3

[4] L. Danzer, *Über Durchschnittseigenschaften n-dimensionaler Kugelfamilien*, J. Reine Angew. Math. **208** (1961), 181–203, DOI 10.1515/crll.1961.208.181 (German). MR142059 ↑

[5] M. Deza, P. Frankl, and N. M. Singhi, *On functions of strength t*, Combinatorica **3** (1983), no. 3-4, 331–339, DOI 10.1007/BF02579189. MR729786 ↑2

[6] H. G. Eggleston, *Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter*, J. London Math. Soc. **30** (1955), 11–24, DOI 10.1112/jlms/s1-30.1.11. MR67473 ↑3

[7] P. Frankl and R. M. Wilson, *Intersection theorems with geometric consequences*, Combinatorica **1** (1981), no. 4, 357–368, DOI 10.1007/BF02579457. MR647986 ↑2, 2

[8] D. Gale, *On inscribing n-dimensional sets in a regular n-simplex*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 222–225, DOI 10.2307/2031795. MR53534 ↑3

[9] B. Grünbaum, *A simple proof of Borsuk's conjecture in three dimensions*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **53** (1957), 776–778. MR90072 ↑3

[10] T. Jenrich and A. E. Brouwer, *A 64-dimensional counterexample to Borsuk's conjecture*, Electron. J. Combin. **21** (2014), no. 4, Paper 4.29, 3, DOI 10.37236/4069. MR3292266 ↑3

[11] H. Jung, *Ueber die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst*, J. Reine Angew. Math. **123** (1901), 241–257, DOI 10.1515/crll.1901.123.241 (German). MR1580570 ↑3

[12] J. Kahn and G. Kalai, *A counterexample to Borsuk's conjecture*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **29** (1993), no. 1, 60–62, DOI 10.1090/S0273-0979-1993-00398-7. MR1193538 ↑3

[13] M. Lassak, *An estimate concerning Borsuk partition problem*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. **30** (1982), no. 9-10, 449–451 (1983) (English, with Russian summary). MR703571 ↑3

[14] D. K. Ray-Chaudhuri and R. M. Wilson, *On t-designs*, Osaka Math. J. **12** (1975), no. 3, 737–744. MR392624 ↑2

[15] O. Schramm, *Illuminating sets of constant width*, Mathematika **35** (1988), no. 2, 180–189, DOI 10.1112/S0025579300015175. MR986627 ↑3

Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg, Hamburg, Germany

Email address: `schacht@math.uni-hamburg.de`