ZERLEGUNGEN VON ORDNUNGEN

MATHIAS SCHACHT

Zusammenfassung. Wir besprechen die Sätze von Dilworth und Mirsky für endliche Ordnungen.

§1 Sätze von Dilworth und Mirsky

Wir betrachten endliche Ordnungen $P = (X, \leqslant)$ und bezeichnen mit $\alpha(P)$ und $\omega(P)$ jeweils die Kardinalität einer größten unabhängigen Menge bzw. einer längsten Kette in P. Die Sätze von Dilworth [1] und Mirsky [2] besagen, dass sich jede Ordnung in eine minimale Anzahl von Ketten bzw. unabhängigen Mengen zerlegen lässt. Die Sätze lassen sich auch für unendliche Ordnungen formulieren und beweisen, solange $\alpha(P)$ bzw. $\omega(P)$ endlich sind. Wir beschränken uns hier auf den endlichen Fall und beginnen mit dem Satz von Dilworth.

Satz 1 (Dilworth 1950)**.** *Für jede endliche Ordnung $P = (X, \leqslant)$ existiert eine Partition $Y_1 \mathbin{\dot\cup} \dots \mathbin{\dot\cup} Y_{\alpha(P)} = X$, wobei $Y_1, \dots, Y_{\alpha(P)}$ Ketten in P sind.*

Der Satz von Mirsky kann als dazu duale Aussage betrachtet werden, wobei unabhängige Mengen und Ketten vertauscht werden.

Satz 2 (Mirsky 1971)**.** *Für jede endliche Ordnung $P = (X, \leqslant)$ existiert eine Partition $Z_1 \mathbin{\dot\cup} \dots \mathbin{\dot\cup} Z_{\omega(P)} = X$, wobei $Z_1, \dots, Z_{\omega(P)}$ unabhängige Mengen in P sind.*

Da sich Ketten und unabhängige Mengen in höchstens einem Element schneiden können, sind beide Aussagen bestmöglich bezüglich der Anzahl der Partitionsklassen und es ist hinreichend Partitionen mit höchstens $\alpha(P)$ Ketten bzw. $\omega(P)$ unabhängigen Mengen zu finden. Jeder der beiden Sätze zieht offensichtlich die folgende Konsequenz nach sich.

Korollar 3. *Für jede endliche Ordnung $P = (X, \leqslant)$ gilt $|X| \leqslant \alpha(P) \cdot \omega(P)$.* □

§2 Beweis des Satzes von Dilworth

Der folgende Induktionsbeweis geht auf Perles [3] und Tverberg [4] zurück. Für $|X| \leqslant 1$ ist die Aussage trivial. Sei also $P = (X, \leqslant)$ eine endliche Ordnung und wir nehmen an, dass der Satz für Ordnungen mit weniger Elementen bereits gezeigt wurde. Sei K eine maximale Kette in P und bezeichne x_+ das maximale und x_- das minimale Element in K. Darüber hinaus sei Q die Teilordnung von P eingeschränkt auf $X \smallsetminus K$.

Falls $\alpha(Q) < \alpha(P)$ gilt, dann lässt sich nach Induktionsannahme Q in $\alpha(Q)$ Ketten zerlegen und zusammen mit K erhalten wir eine Kettenzerlegung von P, wie in Satz 1 gefordert.

Sei also $\{x_1, \dots, x_{\alpha(P)}\}$ eine unabhängige Menge in Q. Insbesondere ist $\{x_1, \dots, x_{\alpha(P)}\}$ auch unabhängig in P und disjunkt mit K. Für $i = 1, \dots, \alpha(P)$ seien

$$L_P(x_i) = \{x \in X : x \leqslant x_i\} \qquad \text{und} \qquad U_P(x_i) = \{x \in X : x_i \leqslant x\}$$

die Elemente unterhalb und oberhalb von x_i. Des Weiteren sei

$$X_- = \bigcup_{i=1}^{\alpha(P)} L_P(x_i) \qquad \text{und} \qquad X_+ = \bigcup_{i=1}^{\alpha(P)} U_P(x_i)\,.$$

Auf Grund der Unabhängigkeit von $\{x_1, \dots, x_{\alpha(P)}\}$, folgt $X_- \cap X_+ = \{x_1, \dots, x_{\alpha(P)}\}$ und die x_i sind maximal bzw. minimal in X_- und in X_+. Da $\{x_1, \dots, x_{\alpha(P)}\}$ eine maximale unabhängige Menge in P ist, ist jedes Element in X mit mindestens einem x_i vergleichbar und somit gilt auch $X = X_- \cup X_+$.

Da $x_+ \notin X_-$ (andernfalls könnte die maximal gewählte Kette K mit einem x_i verlängert werden), ist X_- eine echte Teilmenge von X. Nach Induktionsannahme kann die Teilordnung von P eingeschränkt auf X_- also in $\alpha(P)$ Ketten zerlegt werden und $x_1, \dots, x_{\alpha(P)}$ sind die maximalen Elemente dieser Ketten. Die gleiche Argumentation angewendet auf x_- und X_+ zeigt, dass X_+ in $\alpha(P)$ Ketten zerlegt werden kann, wobei $x_1, \dots, x_{\alpha(P)}$ die minimalen Elemente dieser Ketten sind.

Verlängern wir für jedes $i = 1, \dots, \alpha(P)$ die Kette aus der Zerlegung von X_- mit maximalen Element x_i mit der Kette aus der Zerlegung von X_+ mit minimalen Element x_i, so erhalten wir eine Zerlegung von X in $\alpha(P)$ Ketten, wie in Satz 1 gefordert. □

§3 Beweis des Satzes von Mirsky

Für eine endliche Ordnung $P = (X, \leqslant)$ definieren wir die Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{N}$ durch

$$f(x) = \text{Kardinalität einer längsten Kette in } P \text{ dessen maximales Element } x \text{ ist}\,.$$

Da es für jedes Element von X eine Kette gibt, in der es das maximale Element ist und keine Kette mehr als $\omega(P)$ Elemente enthalten kann, gilt offensichtlich

$$X = \bigcup_{i=1}^{\omega(P)} f^{-1}(i)\,.$$

Auf der anderen Seite ist für jedes i die Menge $f^{-1}(i)$ unabhängig in P, da $x \leqslant y$ kombiniert mit $f(x) = f(y) = i$ den Widerspruch nach sich zieht, dass eine Kette der Länge i mit maximalen Element x existiert und mit y verlängert werden kann, was $f(y) \geqslant i + 1$ impliziert.

Somit ist $f^{-1}(1) \mathbin{\dot\cup} f^{-1}(2) \mathbin{\dot\cup} \dots \mathbin{\dot\cup} f^{-1}(\omega(P))$ eine Partition von X bestehend aus $\omega(P)$ unabhängigen Mengen, wie in Satz 2 gefordert. $\square$

Literatur

[1] R. P. Dilworth, *A decomposition theorem for partially ordered sets*, Ann. of Math. (2) **51** (1950), 161–166, DOI 10.2307/1969503. MR32578 ↑1

[2] L. Mirsky, *A dual of Dilworth's decomposition theorem*, Amer. Math. Monthly **78** (1971), 876–877, DOI 10.2307/2316481. MR288054 ↑1

[3] M. A. Perles, *A proof of Dilworth's decomposition theorem for partially ordered sets*, Israel J. Math. **1** (1963), 105–107, DOI 10.1007/BF02759805. MR168496 ↑1

[4] H. Tverberg, *On Dilworth's decomposition theorem for partially ordered sets*, J. Combinatorial Theory **3** (1967), 305–306. MR214516 ↑1

Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg, Hamburg, Germany

Email address: `schacht@math.uni-hamburg.de`