EIGENSCHAFT B – ZWEIFÄRBBARE MENGENSYSTEME

MATHIAS SCHACHT

ZUSAMMENFASSUNG. Wir untersuchen eine Fragestellung von Erdős und Hajnal über die minimale Anzahl von Kanten von nicht zweifärbbaren Hypergraphen.

§1 NICHT 2-FÄRBBARE HYPERGRAPHEN

Wir untersuchen extremale Aspekte von k-uniformen Hypergraphen $H = (V, E)$, d. h.

$$E \subseteq V^{(k)} = \{A \subseteq V : |A| = k\} .$$

Ein Hypergraph $H = (V, E)$ ist 2-*färbbar*, falls es eine Partition $X \cupdot Y = V$ gibt, sodass jede Kante $e \in E$ beide Eckenklassen X und Y schneidet. Untersuchungen über 2-färbbare Mengensysteme lassen sich bis zu Bernstein [2] zurückverfolgen, weswegen in diesem Zusammenhang in der englischsprachigen Literatur auch oft der Begriff *Property B* anstelle von Zweifärbbarkeit verwendet wird (siehe dazu die Arbeit von Miller [8]).

Wir interessieren uns für die minimale Kantenanzahl, die ein nicht 2-färbbarer Hypergraph haben kann und definieren dafür die Funktion

$$m(k) = \min \Big\{ |E(H)| : H \text{ ist } k\text{-uniform und nicht 2-färbbar} \Big\} .$$

Offensichtlich ist $m(1) = 1$ und es ist leicht einzusehen, dass $m(2) = 3$ gilt. Für 3-uniforme Hypergraphen kann man $m(3) = 7$ nachweisen, wobei die obere Schranke durch den Hypergraphen der Fano-Ebene realisiert wird. Im Allgemeinen ist die exakte Bestimmung von $m(k)$ ein offenes Problem. Wir interessieren uns hier für die von Erdős und Hajnal [5, Problem 12] aufgeworfene Fragestellung nach dem asymptotischen Verhalten von $m(k)$ für $k \longrightarrow \infty$. Die folgenden Schranken gehen auf Erdős [3, 4] zurück.

Proposition 1. *Für alle natürlichen Zahlen $k \geqslant 2$ gilt $2^{k-1} \leqslant m(k) \leqslant k^2 2^{k+1}$.*

In dem Beweis der oberen Schranke benötigen wir die Ungleichungen von Bernoulli und von Jensen [6] die z. B. im Lehrbuch der Analysis von Königsberger [7] in den Kapiteln 2.2 und 9.8 zu finden sind. Darüberhinaus werden wir die für alle $x \in \mathbb{R}$ gültige Standardabschätzung

$$1 + x \leqslant \exp(x) \tag{1.1}$$

verwenden, deren elementaren Beweis wir zur Vollständigkeit hier kurz angeben.

Beweis der Abschätzung (1.1)*.* Für $x \leqslant -1$ ist die linke Seite nicht positiv und die Ungleichung ist somit trivial. Für $x \geqslant 0$ ist die Ungleichung direkt aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geqslant 1 + x$$

ersichtlich.

Des Weiteren gilt für $\xi \in (0,1)$ mithilfe der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} = \exp(\xi)\,.$$

und diese Ungleichung angewendet für $\xi = -x$ für $x \in (-1,0)$ ergibt

$$\frac{1}{1-(-x)} \geqslant \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 + x \leqslant \exp(x)\,.$$

Somit gilt die Abschätzung (1.1) für jede reelle Zahl x. □

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun Proposition 1 beweisen.

Beweis von Proposition 1. Der Beweis der unteren Schranke basiert auf einem einfachen probabilistischen Argument. Für gegebenes k sei $H = (V, E)$ ein k-uniformer Hypergraph mit $|E| < 2^{k-1}$. Sei $\varphi\colon V \longrightarrow \{0,1\}$ eine zufällige 2-Färbung von V. Dann gilt für die Zufallsvariable Z, definiert als die Anzahl der einfarbigen Kanten von H,

$$\mathbb{E}Z = |E| \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k < 1\,,$$

da für jede der beiden Farben und für jede Kante die Wahrscheinlichkeit in der Farbe gefärbt zu sein, genau 2^{-k} ist. Somit gibt es eine 2-Färbung die höchstens $\mathbb{E}Z < 1$ einfarbige Kanten ergibt und die untere Schranke folgt.

Für die obere Schranke weisen wir nach, dass ein k-uniformer Hypergraph $H = (V, E)$ mit

$$m = k^2 2^{k+1}$$

Kanten existiert, der nicht 2-färbbar ist. Auch dafür greifen wir auf ein probabilistisches Argument zurück. Sei V eine fest gewählte Eckenmenge mit $2k^2$ Elementen. Für $i \in [m]$ sei e_i eine zufällig gewählte k-elementige Teilmenge von V und $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. D. h. jede Kante e_i wird zufällig gleichverteilt aus allen $\binom{2k^2}{k}$ Möglichkeiten gewählt und die Wahl der Kanten in E ist unabhängig. Offensichtlich gilt $|E| \leqslant m$ und es bleibt zu zeigen

$$\mathbb{P}\big(H = (V,E) \text{ ist 2-färbbar}\big) < 1\,.$$

Eine Partition $X \cupdot Y = V$ definiert eine 2-Färbung von H, wenn keine Kante aus E in X oder in Y enthalten ist. Für eine einzelne Kante e_i und eine feste Partition $X \cupdot Y = V$ gilt

$$\mathbb{P}\big(e_i \subseteq X \text{ oder } e_i \subseteq Y\big) = \frac{\binom{|X|}{k} + \binom{|Y|}{k}}{\binom{|V|}{k}} = \frac{\binom{|X|}{k} + \binom{|Y|}{k}}{\binom{2k^2}{k}} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\binom{|X|}{k} + \frac{1}{2}\binom{|Y|}{k}\right)}{\binom{2k^2}{k}} \geqslant \frac{2\binom{k^2}{k}}{\binom{2k^2}{k}},$$

wobei wir für die letzte Abschätzung die Ungleichung von Jensen für die konvexe Funktion $x \longmapsto \binom{x}{k}$ verwendet haben. Nach der Expansion der Binomialkoeffizienten erhalten wir

$$\frac{\binom{k^2}{k}}{\binom{2k^2}{k}} = \frac{k^2! \cdot k! \cdot (2k^2-k)!}{k! \cdot (k^2-k)! \cdot (2k^2)!} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(k^2-j)}{\prod_{j=0}^{k-1}(2k^2-j)} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{2k^2-j}\right).$$

Das Produkt lässt sich weiter abschätzen durch

$$\prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{2k^2-j}\right) = \prod_{j=1}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{2k^2-j}\right) \geqslant \left(1 - \frac{k-1}{2k^2-k+1}\right)^{k-1}.$$

Mithilfe der Ungleichung von Bernoulli folgt

$$\left(1 - \frac{k-1}{2k^2-k+1}\right)^{k-1} \geqslant \left(1 - \frac{(k-1)^2}{2k^2-k+1}\right) = \frac{k^2+k}{2k^2-k+1} > \frac{1}{2}.$$

Somit gilt

$$\mathbb{P}\big(e_i \subseteq X \text{ oder } e_i \subseteq Y\big) > \frac{1}{2^k}$$

und für eine fest gewählte Partition $X \cupdot Y = V$ erhalten wir

$$\mathbb{P}\big(X \cupdot Y = V \text{ definiert eine 2-Färbung}\big) < \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^m \overset{(1.1)}{\leqslant} \exp\left(-\frac{m}{2^k}\right) = \exp(-2k^2).$$

Da es $2^{|V|-1}$ solche (ungeordneten) Partitionen von V gibt, gilt für die Anzahl Z, der Partitionen die eine 2-Färbung definieren, somit

$$\mathbb{E}Z < 2^{|V|-1} \cdot \exp(-2k^2) = 2^{2k^2-1} \cdot \exp(-2k^2) < 1.$$

Insbesondere gibt es also einen k-uniformen Hypergraphen auf V, der nicht 2-färbbar ist und höchstens $m = k^2 2^{k+1}$ Kanten hat. □

Erdős [4] äußerte die Vermutung: „*A reasonable guess seems to be that $m(n)$ is of the order $n2^n$*“, wonach keine der beiden Schranken in Proposition 1 optimal sind. Die untere Schranke wurde in mehreren Schritten von Erdős [3], Schmidt [10], Beck [1] und von Radhakrishnan und Srinivasan [9] auf

$$m(k) = \Omega\left(\left(\frac{k}{\log k}\right)^{1/2} \cdot 2^k\right)$$

verbessert. Für die obere Schranke sind bis auf einen konstanten Faktor keine weiteren Verbesserungen bekannt.

Literatur

[1] J. Beck, *On* 3*-chromatic hypergraphs*, Discrete Math. **24** (1978), no. 2, 127–137, DOI 10.1016/0012-365X(78)90191-7. MR522920 ↑1

[2] F. Bernstein, *Zur Theorie der trigonometrischen Reihe*, Ber. Verh. Königl.-Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl. **60** (1908), 325–338 (German). ↑1

[3] P. Erdős, *On a combinatorial problem*, Nordisk Mat. Tidskr. **11** (1963), 5–10. MR148554 ↑1, 1

[4] ———, *On a combinatorial problem.* II, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **15** (1964), 445–447, DOI 10.1007/BF01897152. MR167427 ↑1, 1

[5] P. Erdős and A. Hajnal, *On a property of families of sets*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **12** (1961), 87–123, DOI 10.1007/BF02066676. MR150047 ↑1

[6] J. L. W. V. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta Math. **30** (1906), no. 1, 175–193, DOI 10.1007/BF02418571 (French). MR1555027 ↑1

[7] K. Königsberger, *Analysis. 1*, 6th revised ed., Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag, Berlin, 2004. DOI 10.1007/978-3-642-18490-1. MR2374633 ↑1

[8] E. W. Miller, *Concerning biconnected sets*, Fundam. Math. **29** (1937), 123–133, DOI 10.4064/fm-29-1-123-135. ↑1

[9] J. Radhakrishnan and A. Srinivasan, *Improved bounds and algorithms for hypergraph* 2*-coloring*, Random Structures Algorithms **16** (2000), no. 1, 4–32. MR1728350 ↑1

[10] W. M. Schmidt, *Ein kombinatorisches Problem von P. Erdős und A. Hajnal*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **15** (1964), 373–374, DOI 10.1007/BF01897145 (German). MR167428 ↑1

Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg, Hamburg, Germany
Email address: `schacht@math.uni-hamburg.de`