Mathematische Logik und Mengenlehre

Persönliche Mitschrift von Niclas Confurius aus einer Vorlesung*

Diese persönliche, studentische Mitschrift hat keinen offiziellen Charakter. Sie ist weder vom Fachbereich Mathematik noch vom Lehrenden der Veranstaltung beauftragt, gesichtet, korrigiert oder gutgeheißen worden.

*Die Vorlesung wurde gehalten von Prof. Dr. B. Löwe. Fehler und Korrekturen können gerne an Niclas.Confurius@studium.uni-hamburg.de geschickt werden.

Inhaltsverzeichnis

1 Logik

1 Terme und Formeln

1.1 Einstieg

Beispiele für Formeln:
$\varphi \equiv \exists x(x^2 = 2)$. In $\mathbb{Q}$ gilt φ nicht. In $\mathbb{R}$ gilt φ.
$\Psi \equiv \exists x(x^2 = 3)$. In $\mathbb{Q}$ gilt Ψ nicht. In $\mathbb{R}$ gilt Ψ.
φ und Ψ sind im folgenden Sinne nicht äquivalent: In $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ gilt φ, aber nicht Ψ. In $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ gilt Ψ, aber nicht φ.
$\chi \equiv \exists x(x^2 = 6)$. Es gilt z.B. $\varphi \wedge \Psi \rightarrow \chi$.
Ziel:

1. Definiere präzise, was Formeln sind.
2. Definiere präzise, was eine Struktur ist.
3. Falls φ eine Formel ist und $\mathcal{M}$ eine Struktur, so definiere präzise, was

   „φ gilt in $\mathcal{M}$“

   heißt. (Man schreibt hierzu: $\mathcal{M} \models \varphi$)

Wir beginnen mit 1.

Beispiel Betrachte die Formeln: $\exists x(x^2 = 2)$, $\forall x \exists y(x \cdot y = 1)$ und $\forall x \forall y \forall z(x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$.

Definition Wir bezeichnen die folgenden Symbole als logische Symbole und bezeichnen die Menge der logischen Symbole mit S_L:

Quantoren	$\exists \quad \forall$
Junktoren	$\wedge \quad \rightarrow \quad \vee \quad \neg$
Gleichheit	$=$
Klammern und Komma	( ) ,
Variablen	Eine Menge von Variablen (Besser unendlich)

Definition Eine Menge S heißt Symbolmenge, wenn $S = S_K \dot\cup S_R \dot\cup S_F$, so dass S_L, S_K, S_R, S_F paarweise disjunkt sind. Die Elemente von S_K werden Konstantensymbole, die von S_R Relationssymbole, die von S_F Funktionssymbole genannt.
Eine Funktion $\sigma : S_R \cup S_F \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ heißt Signatur für S. Wir sagen $\dot{R} \in S_R$ ist n-stellig, falls $\sigma(\dot{R}) = n$ und $\dot{f} \in S_F$ ist n-stellig, falls $\sigma(\dot{f}) = n$.

Beispiel (a) Die Sprache der abelschen Gruppen braucht:
$\dot{+} \in S_F \quad \sigma(\dot{+}) = 2$
$\dot{0} \in S_K$
$\dot{-} \in S_F \quad \sigma(\dot{-}) = 1$

(b) Äquivalenzrelationen
$\dot{R} \in S_R \quad \sigma(\dot{R}) = 2.$

Definition Sei S eine Symbolmenge. Dann heißt $\sum := S_L \cup S$ das Alphabet der Sprache mit Symbolmenge S. Eine endliche Folge von Elementen aus $\sum$ heißt S-Zeichenkette.

Beispiel $S = \emptyset$. Beispiele für Zeichenketten, wovon aber nur einige den Namen Formel verdienen.
$\wedge\exists\ (\ (\ (\ ,\ \exists\ \vee \rightarrow$
$)()(\rightarrow \rightarrow \rightarrow$
$\exists x(x = x)$
$\forall x(x = x)$
$\exists x \neg(x = x)$
$\exists x(\neg x = x)$

1.2 Terme

Was sind Terme? Der Abschluss der Variablen und der Konstantensymbole unter den Funktionssymbolen. Erster Versuch einer Definition:

(a) Jede Variable ist ein S-Term.

(b) Jedes Konstantensymbol ist ein S-Term.

(c) Falls $\dot{f} \in S_F$ und $\sigma(\dot{f}) = n$ und $t_1, \ldots, t_n$ sind S-Terme so ist auch $\dot{f}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ein S-Term.

Zusätzlich brauchen wir: „und die Menge der S-Terme ist die kleinste Menge von Zeichenketten, die (a) – (c) erfüllt“. Wir bauen diese Menge nun sukzessive:

$$\begin{aligned} T_0^S &:= \text{ die Menge der Variablen} && \text{[erledigt (a)]} \\ T_1^S &:= T_0^S \cup S_K && \text{[erledigt (b)]} \end{aligned}$$

Sei T_n^S definiert, dann ist

$$T_{n+1}^S := T_n^S \cup \{\dot{f}(t_1, \ldots, t_k) \mid \dot{f} \in S_F, \sigma(\dot{f}) = k \text{ und } t_1, \ldots, t_k \in T_n^S\}.$$

Setze dann $T^S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n^S$ als Menge der S-Terme.

Satz 1.1 Sei $X \subseteq T^S$ mit $T_1^S \subseteq X$ und falls $T_n^S \subseteq X$, dann $T_{n+1}^S \subseteq X$. So gilt: $T^S = X$.

Beweis. Wir erinnern uns an die vollständige Induktion auf $\mathbb{N}$:
Falls $Z \subseteq \mathbb{N}$ mit $0 \in Z$ und $\forall n(n \in Z \rightarrow n+1 \in Z) \Rightarrow Z = \mathbb{N}$.
Betrachte $Z := \{n \in \mathbb{N} \mid T_n^S \subseteq X\}$. Nach Ann. $0 \in Z$ und $\forall n(n \in Z \rightarrow n+1 \in Z)$. Daraus folgt $Z = \mathbb{N}$.
Also gilt für alle n, dass $T_n^S \subseteq X$ und $T^S = \bigcup T_n^S \subseteq X \subseteq T^S$. $\square$

Korollar 1.2 (Satz über die Terminduktion) Falls $X \subseteq T^S$ mit $T_1^S \subseteq X$ und für alle $\dot{f} \in S_F$, $\sigma(\dot{f}) = n$ und $t_1, \dots, t_n \in X$, so ist $\dot{f}(t_1, \dots, t_n) \in X$. Dann ist $X = T^S$.

Anwendung: Wir wollen zeigen, dass eine Eigenschaft für alle Terme gilt. Dafür reicht es aus, zu zeigen: (a) gilt für alle Variablen, (b) gilt für $\dot{c} \in S_K$ und (c) bleibt unter Einsetzung in $\dot{f} \in S_F$ erhalten.

Beispiel

1. Die leere Zeichenkette ist kein Term.
   Sei $X = \{t \in T^S \mid t \text{ ist nicht die leere Zeichenkette}\}$. Offensichtlich: $T_1^S \subseteq X$. Falls $t_1, \dots, t_n$ beliebige Terme sind, so ist $\dot{f}(t_1, \dots, t_n) \in X$. (Anzahl Symbole $\geq 3 > 0$.)

2. Kein Term beginnt mit dem Symbol (.
   Sei $X := \{t \mid t \text{ fängt nicht mit (an}\}$. Offensichtlich: $T_1^S \subseteq X$. Falls $t_1, \dots, t_n$ beliebige Terme sind, so fängt $\dot{f}(t_1, \dots, t_n)$ mit $\dot{f}$ an, also nicht mit (.

3. Kein Term enthält die Kette ((.
   $X := \{t \mid t \text{ enthält nicht ((}\}$. $T_1^S \subseteq X$,x $\dot{f}(t_1, \dots, t_n) \in X$. Aber $\dot{f}(x, \dot{f}(x, x)) \in T^S$, falls $\dot{f} \in S_F, \sigma(\dot{f}) = 2$.

Formale Sprache vs. semi-formale Sprache
Z. B. binäre Operationen $\sigma(\dot{+}) = 2$ mit Infixnotation: Statt $\dot{+}(x, y)$ schreiben wir $x \dot{+} y$.

Definition Sei A eine endliche Folge von S-Zeichenketten. Wir nennen $A = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ eine S-Termableitung, falls für alle $i = 1, \dots, n$ gilt:
Entweder ist ζ_i eine Variable oder $\zeta_i \in S_K$ oder es existiert $\dot{f} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{f}) = k$ mit $\zeta_i = \dot{f}(\zeta_{i_1}, \dots, \zeta_{i_k})$ für $i_1, \dots, i_k < i$. Wir sagen, dass A eine Ableitung von ζ_n ist bzw. A leitet den Term ζ_n ab. Ferner sagen wir, dass ζ (term-)ableitbar ist, falls ein $A = \zeta_1, \dots, \zeta_n$ existiert mit $\zeta_n = \zeta$.

Beispiel $\dot{c} \in S_K$, $\dot{f}, \dot{g} \in S_F$, $\sigma(\dot{f}) = 1$, $\sigma(\dot{g}) = 2$. Variablen: x, y. Dann ist

Tabelle 1: Beispiel einer Termableitung

Zeile bzw. Index i	Term	„Ursprung“ der Termableitung
1	x	T_0^S
2	y	T_0^S
3	$\dot{c}$	T_1^S
4	$\dot{g}(y, \dot{c})$	$\dot{g}$ auf 2, 3
5	$\dot{f}(\dot{g}(y, \dot{c}))$	$\dot{f}$ auf 4
6	$\dot{g}(x, \dot{f}(\dot{g}(y, \dot{c})))$	$\dot{g}$ auf 1, 5

Bemerkung Falls $A = \zeta_1, \dots, \zeta_n$ eine Termabl. ist und $A' = \zeta_{n+1}, \dots, \zeta_m$ eine Termabl. ist, so ist

$$\zeta_1, \dots, \zeta_n, \zeta_{n+1}, \dots, \zeta_m$$

eine Termableitung.

Satz 1.3 Eine Zeichenkette ζ ist genau dann ein Term, wenn sie termableitbar ist.

Beweis. „$\Leftarrow$“: Beweis per Induktion nach der Länge der Ableitung. Ang., wir hätten gezeigt, dass jede Zeichenkette mit Termableitung der Länge $\leq n$ ein Term ist. Sei nun $\zeta_1, \dots, \zeta_{n+1}$ eine Termableitung der Länge $n + 1$. Wir müssen zeigen, dass $\zeta_{n+1} \in T^S$.

Fall 1 $\zeta_{n+1} \in T_0^S \cup T_1^S$. Also ist es ein Term.

Fall 2 $\zeta_{n+1} = \dot{f}(\zeta_{j_1}, \ldots, \zeta_{j_k})$ für $\dot{f} \in S_F$, $\sigma(\dot{f}) = k$ mit $j_1, \ldots, j_k < n+1$. Dann taucht z. B. ζ_{j_1} in der Termableitung an Stelle j_1 auf. Dann ist $\zeta_1, \ldots, \zeta_{j_1}$ eine Termableitung von ζ_{j_1} also eine Termabl. der Länge $j_1 < n+1$. Also ist $\zeta_{j_1} \in T^S$ nach I.A.: Genauso für $j_2, \ldots, j_k$ also $\zeta_{n+1} = \dot{f}(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) \in T^S$, wobei $\zeta_1, \ldots, \zeta_k \in T^S$.

„$\Rightarrow$“: Betrachte $Z := \{\zeta \in T^S \mid \zeta \text{ ist termableitbar}\}$. Nach Terminduktion ist zu zeigen:

1. $T_0^S \cup T_1^S \subseteq Z$. (Klar nach Definition)
2. Seien $\zeta_1, \ldots, \zeta_k \in Z$ und $\dot{f} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{f}) = k$, dann ist $\dot{f}(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) \in Z$.

Beweis von 2.: Sei A_i eine Termableitung für ζ_i $(1 \le i \le k)$. Nach voriger Bem. ist A entstehend durch Hintereinanderschreiben von $A_1, \ldots, A_k$ eine Termableitung. Also ist $A = \dot{f}(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$ eine Termabl., die 2. beweist. □

1.3 Formeln

Wir wollen nun die atomaren S-Formeln definieren.

Definition Falls $t_1, t_2 \in T^S$, so sei
$$t_1 = t_2$$
eine atomare S-Formel. Falls $\dot{R} \in S_R$ mit $\sigma(\dot{R}) = k$ und $t_1, \ldots, t_k \in T^S$, so ist $\dot{R}(t_1, \ldots, t_k)$ eine atomare S-Formel. Wir schreiben At^S für die Menge aller atomaren S-Formeln.

Weiterhin zunächst informell:

1. Jede atomare S-Formel ist eine S-Formel.
2. Falls φ, ψ S-Formeln und x eine Variable, so auch

$$(\varphi \wedge \psi),\ (\varphi \vee \psi),\ (\varphi \to \psi),\ \neg\varphi,\ \exists x\varphi,\ \forall x\varphi$$

Wiederum wie vorher, formaler:
$$F_0^S := At^S.$$

Ang. F_n^S ist definiert, so setzen wir

$$\begin{aligned} F_{n+1}^S := \{(\varphi \wedge \psi) \mid \varphi, \psi \in F_n^S\} \cup \{(\varphi \vee \psi) \mid \varphi, \psi \in F_n^S\} \cup \{\neg\varphi \mid \varphi \in F_n^S\} \cup \{(\varphi \to \psi) \mid \varphi, \psi \in F_n^S\} \\ \cup \{\forall x\varphi \mid \varphi \in F_n^S, x \text{ Variable}\} \cup \{\exists x\varphi \mid \varphi \in F_n^S, x \text{ Variable}\}. \end{aligned}$$

$L^S = F^S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n^S$. Die Elemente von F^S nennen wir S-Formeln.
Induktion über den Formelaufbau: Sei $Z \subseteq L^S$ mit $At^S \subseteq Z$, x Variable und falls $\varphi, \psi \in Z$ so auch
$$(\varphi) \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi), \neg\varphi, \forall x\varphi, \exists x\varphi \in Z$$
Daraus folgt insgesamt $Z = L^S$.

Beweis. Exakt die gleiche Idee wie bei der Induktion über den Termaufbau. □

Beispiel (Formeln) $S = S_R = \{\dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}\}$ mit $\sigma(\dot{P}) = 1$, $\sigma(\dot{Q}) = 2$, $\sigma(\dot{R}) = 3$. Beachte: $x \in T^S$ (weil Variable). Also $\dot{Q}(x,x) \in At^S \subseteq L^S$. Somit $\forall x \dot{Q}(x,x) \in F_1^S$.
$\forall y(\dot{P}(x) \to \dot{R}(x,x,z))$. Also $\dot{P}(x)$, $\dot{R}(x,x,z) \in At^S$. Daher $(\dot{P}(x) \to \dot{R}(x,x,z)) \in F_1^S$. Daher ist $\forall y(\dot{P}(x) \to \dot{R}(x,x,z)) \in F_2^S$.
$\forall z \forall z \exists z \dot{Q}(x,y,z)$. $\dot{Q}(x,y,z) \in At^S = F_0^S$, $\exists z \dot{Q}(x,y,z) \in F_1^S$, $\forall z \exists z \dot{Q}(x,y,z) \in F_2^S$, $\forall z \forall z \exists z \dot{Q}(x,y,z) \in F_3^S$.

Definition (Formelableitung) Eine endliche Folge von S-Zeichenketten heißt S-Formelableitung

$$A = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$$

falls für alle $1 \leq i \leq n$ *eine* der folgenden Bedingungen gilt:

(F1) φ_i ist $t = t'$ für $t, t' \in T^S$,

(F2) φ_i ist $\dot{R}(t_1, \ldots, t_k)$ für $\dot{R} \in S_R$, $\sigma(\dot{R}) = k$ und $t_1, \ldots, t_k \in T^S$.

(F3) Es gibt ein $j < i$, so dass φ_i von der Form $\neg\varphi_j$ ist.

(F4) Es gibt $j, j' < i$, so dass φ_i von der Form $(\varphi_j \wedge \varphi_{j'})$ ist.

(F5) Es gibt $j, j' < i$, so dass φ_i von der Form $(\varphi_j \vee \varphi_{j'})$ ist.

(F6) Es gibt $j, j' < i$, so dass φ_i von der Form $(\varphi_j \to \varphi_{j'})$ ist.

(F7) Es gibt ein $j < i$ und ein $x \in V$, so dass φ_i von der Form $\exists x \varphi_j$ ist.

(F8) Es gibt ein $j < i$ und ein $x \in V$, so dass φ_i von der Form $\forall x \varphi_j$ ist.

Dabei entspricht (F1) + (F2) $\zeta_i \in At^S$, (F3) entspricht $\neg$, (F4) entspricht $\wedge$, (F5) entspricht $\vee$, (F6) entspricht $\to$, (F7) entspricht $\exists$ und (F8) entspricht $\forall$.

Definition Eine Formelableitung $A = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ leitet ζ_n ab.
Eine Zeichenkette ζ ist formelableitbar, falls es eine Formelableitung (kurz: FA) gibt, die ζ ableitet.

Satz 1.4 Eine Zeichenkette φ ist genau dann in L^S, wenn φ formelableitbar ist.

Beweis. Wie bei Termen. □

Achtung: Formal vs. informell.
Formal ist $(t = t' \wedge t' = t)$ eine Formel, aber $t = t' \wedge t' = t$ nicht! Ebenso ist $(t = t') \wedge (t' = t)$ auch keine Formel.
Genauso ist $\forall x \neg x = x$ ist eine Formel. Aber $\forall x(\neg(x = x))$, $\forall x(\neg x = x)$ und $\forall x(x \neq x)$ sind keine Formeln.

Bemerkung Induktionsprinzipien implizieren Rekursionssätze (das werden wir später noch im Detail sehen). Hier: Falls $f : T_0^S \cup T_1^S \to X$ eine Funktion und $g : X^{<\infty} \to X$ eine weitere Funktion. Dann existiert $F : T^S \to X$ mit $F(t) = f(t)$, falls $t \in T_0^S \cup T_1^S$. $F(\dot{f}(t_1, \ldots, t_n)) := g(F(t_1), \ldots, F(t_n))$.

2 Rekursion

Zunächst auf $\mathbb{N}$. Sei X irgendeine Menge und $a_0 \in X$. Man nennt

$$R : X \to X$$

eine „Rekursionsvorschrift“. Definiere rekursiv:

$$\text{Rekurssionsgleichungen } (*) \begin{cases} F(0) := a_0 \\ F(n+1) := R(F(n)) \end{cases}$$

Dem zugrunde liegt folgende Behauptung zugrunde:

Behauptung. Es existiert eine eindeutige Funktion $F : \mathbb{N} \to X$, die $(*)$ erfüllt.

Betrachte die Konstruktion von T^S als Bsp. für Rekursion auf $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} T_0^S &:= \mathrm{Var} && \text{(Menge der Variablen)} \\ T_1^S &:= T_0^S \cup S_K \\ T_{n+1}^S &:= T_n^S \cup \{\dot{f}(t_1, \dots, t_k) \mid \dot{f} \in S_F, \sigma(\dot{f}) = k, t_1, \dots, t_k \in T_n^S\}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$T^S : \mathbb{N} \to X,$$

wobei X die Menge aller Mengen von Zeichenketten ist. Dann ist $a_0 := \mathrm{Var}$ und

$$R(M) := \begin{cases} \mathrm{Var} \cup S_K & \text{falls } M = \mathrm{Var} \\ M \cup \{\dot{f}(t_1, \dots, t_k), \dot{f} \in S_F, \sigma(\dot{f}) = k, t_1, \dots, t_k \in M\} & \text{falls } M \neq \mathrm{Var} \end{cases}$$

Die Funktion F, welche die Rekursionsgleichung bzgl. a_0 und R erfüllt ist T^S.
Induktion. Wenn $Z \subseteq T^S$ mit $T_0^S \cup T_1^S \subseteq Z$ und für alle $\dot{f} \in S_F$, $\sigma(\dot{f}) = k$, $t_1, \dots, t_k \in Z$ ist auch $\dot{f}(t_1, \dots, t_k) \in Z$. Dann folgt: $Z = T^S$.
Rekursion auf T^S. Eine Menge X beliebig.

$$\begin{aligned} B_V &: \mathrm{Var} \to X \\ B_K &: S_K \to X \\ R_{\dot{f}} &: X^k \to X, \end{aligned}$$

falls $\dot{f} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{f}) = k$.
Rekursionsprinzip: Es existiert eine eindeutige Funktion $F : T^S \to X$, so dass

(1) $F(t) = B_V(t)$, falls $t \in \mathrm{Var}$.

(2) $F(t) = B_K(t)$, falls $t \in S_K$.

(3) $F(\dot{f}(t_1, \dots, t_k)) = R_{\dot{f}}(F(t_1), \dots, F(t_k))$, falls $\dot{f} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{f}) = k$.

Beispiel Die in einem Term vorkommenden Variablen. Sei X die Menge von Mengen von Variablen. Dann ist $B_K(\dot{c}) := \emptyset$, $B_V(x) := \{x\}$ und $R_{\dot{f}}(X_1, \dots, X_k) := \bigcup_{i=1}^k X_i$. Dies ist analog zu

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(\dot{c}) &= \emptyset && \text{falls } \dot{c} \in S_K \\ \mathrm{var}(x) &= \{x\} && \text{falls } x \in \mathrm{Var} \\ \mathrm{var}(\dot{f}(t_1, \dots, t_k)) &= \bigcup_{i=1}^k \mathrm{var}(t_i) && \text{falls } \dot{f} \in S_F, \sigma(\dot{f}) = k. \end{aligned}$$

Beispiel (Schachtelungstiefe) Die $\dot{f}$-Schachtelungstiefe. Sei $\dot{f} \in S_F$, $\sigma(\dot{f}) = k$.

$$\mathrm{ST}_{\dot{f}}(\dot{c}) = \mathrm{ST}_{\dot{f}}(x) := 0, \qquad \text{für } x \in \mathrm{Var} \text{ oder } \dot{c} \in S_K$$
$$\mathrm{ST}_{\dot{f}}(\dot{g}(t_1, \dots, t_l)) := \begin{cases} \max_{i=1}^{l} \mathrm{ST}_{\dot{f}}(t_i) & \dot{f} \neq \dot{g} \\ \max_{i=1}^{l} \mathrm{ST}_{\dot{f}}(t_i) + 1 & \dot{f} = \dot{g} \end{cases} \qquad \text{für } \dot{g} \in S_F, \sigma(\dot{g}) = l$$

Induktion: $Z \subseteq L^S$ mit $At^S \subseteq Z$ und $\varphi, \psi \in Z$ und $x \in \mathrm{Var}$, so auch:

$$(\varphi \wedge \psi)\ (\varphi \vee \psi)\ (\varphi \to \psi)\ \neg\varphi\ \exists x\varphi\ \forall x\varphi \quad \in Z$$

Dann ist $Z = L^S$.
Rekursion auf L^S. Sei X eine Menge.

$$\begin{aligned} B :& At^S \to X \\ R_\wedge, R_\vee, R_\to :& X^2 \to X \\ R_\neg :& X \to X \\ R_\forall, R_\exists :& \mathrm{Var} \times X \to X \end{aligned}$$

Rekursionsprinzip: Es existiert eine eindeutige Funktion $F : L^S \to X$ mit

(1) $F(\varphi) = B(\varphi)$ für $\varphi \in At^S$

(2) $F((\varphi \wedge \psi)) = R_\wedge(F(\varphi), F(\psi))$

(3) $F((\varphi \vee \psi)) = R_\vee(F(\varphi), F(\psi))$

(4) $F((\varphi \to \psi)) = R_\to(F(\varphi), F(\psi))$

(5) $F(\neg\varphi) = R_\neg(F(\varphi))$

(6) $F(\forall x\varphi) = R_\forall(x, F(\varphi))$

(7) $F(\exists x\varphi) = R_\exists(x, F(\varphi))$

Beispiel Die in φ vorkommenden Variablen.

$$B = \begin{cases} \mathrm{var}(t = t') := \mathrm{var}(t) \cup \mathrm{var}(t') \\ \mathrm{var}(\dot{R}(t_1, \dots, t_k)) := \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{var}(t_i) \end{cases} \qquad \text{für } \dot{R} \in S_R, \sigma(\dot{R}) = k$$

Weiterhin sind

$$\begin{aligned} R_\wedge(M, N) = R_\vee(M, N) = R_\to(M, N) &= M \cup N \\ R_\neg(M) &= M \\ R_\exists(x, M) = R_\forall(x, M) &= M \cup \{x\} \end{aligned}$$

Beispiel $\mathrm{frei}(\varphi) := \mathrm{var}(\varphi)$ falls $\varphi \in At^S$.

$$\begin{aligned} \mathrm{frei}((\varphi \to \psi)) = \mathrm{frei}((\varphi \vee \psi)) = \mathrm{frei}((\varphi \wedge \psi)) &:= \mathrm{frei}(\varphi) \cup \mathrm{frei}(\psi) \\ \mathrm{frei}(\neg\varphi) &:= \mathrm{frei}(\varphi) \\ \mathrm{frei}(\forall x\varphi) = \mathrm{frei}(\exists x\varphi) &:= \mathrm{frei}(\varphi) \setminus \{x\} \end{aligned}$$

3 Strukturen und Interpretation

Definition (Frei, Satz, Struktur) Eine Variable x heißt frei in φ, falls $x \in \text{frei}(\varphi)$. Eine S-Formel φ heißt S-Satz, falls $\text{frei}(\varphi) = \emptyset$.
Sei S eine Symbolmenge. Eine S-Struktur besteht aus

1. einer nichtleeren Menge A und
2. einer Abbildung α mit Urbildbereich $S_K \cup S_R \cup S_F$, sodass
   (a) $\alpha(\dot{c}) \in A$ für $\dot{c} \in S_K$
   (b) $\alpha(\dot{R}) \subseteq A^{\sigma(\dot{R})}$ für $\dot{R} \in S_R$
   (c) $\alpha(\dot{f}) : A^{\sigma(\dot{f})} \to A$ für $\dot{f} \in S_F$

Dabei heißt A etwa unterliegende Menge, zugrundeliegende Menge (selten auch: Universum). Wir schreiben $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ für die Struktur. Falls $S_K \cup S_R \cup S_F$ endlich ist; etwa

$$\{\dot{c}_1, \dots, \dot{c}_k, \dot{R}_1, \dots, \dot{R}_m, \dot{f}_1, \dots, \dot{f}_n\}$$

schreiben wir auch

$$\mathfrak{A} = (A, \alpha(\dot{c}_1), \dots, \alpha(\dot{c}_k), \alpha(\dot{R}_1), \dots, \alpha(\dot{R}_m), \alpha(\dot{f}_1), \dots, \alpha(\dot{f}_n))$$

Beispiel $S_{\text{Gr}} = \{\dot{+}, \dot{-}, \dot{0}\}$ mit $\dot{+}, \dot{-} \in S_F$ und $\sigma(\dot{+}) = 2$, $\sigma(\dot{-}) = 1$ sowie $\dot{0} \in S_K$. Dann sind z.B. Gruppen $(G, +, -, 0)$ S_{Gr}-Strukturen, wobei

$$\alpha(\dot{+}) = + \qquad \alpha(\dot{-}) = - \qquad \alpha(\dot{0}) = 0$$

Jedoch ist nicht jede S_{Gr}-Struktur eine Gruppe: Betrachte $A := \{0, 1\}$ und $\oplus : (x, y) \mapsto 1$ für alle $x, y \in A$ und $- : x \mapsto x$ für alle $x \in A$. Dann ist $(A, \oplus, -, 0)$ eine S_{Gr}-Struktur $1 \oplus (-1) = 1$.

Die meisten uns bekannten algebraischen Strukturen fallen unter dieses Muster.

1. Gruppen: $(G, +, -, 0)$
2. Ringe: $(R, +-, 0, \cdot)$
3. Eins-Ringe: $(R, +, -, 0, \cdot, 1)$
4. Körper: $(K, +, -, 0, \cdot, ^{-1}, 1)$
5. Partielle Ordnungen: $(P, \leq)$
6. Geordnete Körper: $(K, +, -, 0, \cdot, ^{-1}, 1, \leq)$

Kleines Problem dabei: Vektorräume haben Funktionen $K \times V \to V$ (skalare Mutliplikation).
Konvention. $A \neq \emptyset$. [Grund hierfür: Die leere Struktur verhält sich eigenartig.]

Definition Eine Funktion $\beta\colon \text{Var} \to A$ wird Belegung (in A) genannt.

Beispiel Eine S-Struktur (A, α) mit $\dot{c} \in S_K$ und β eine Belegung

$$x = \dot{c}.$$

Das sollte in Bezug auf $(A, \alpha), \beta$ wahr sein, falls $\beta(x) = \alpha(\dot{c})$.

Definition Falls (A, α) eine S-Struktur und β eine Belegung in A ist, so heißt (A, α, β) auch Interpretation. Wir schreiben dafür üblicherweise $\mathcal{I}$.

Notation. Falls β eine Belegung, $x \in \mathrm{Var}$, $a \in A$, so

$$\beta\frac{a}{x} \colon \mathrm{Var} \longrightarrow A \quad y \mapsto \begin{cases} \beta(y) & y \neq x \\ a & y = x \end{cases}$$

Genauso ist für $\mathcal{I} = (A, \alpha, \beta)$

$$\mathcal{I}\frac{a}{x} := \left(A, \alpha, \beta\frac{a}{x}\right).$$

Falls $\mathcal{I}$ gegeben, so setzen wir α und β auf die gesamte Menge T^S fort:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x) &:= \beta(x) && \text{falls } x \in \mathrm{Var} \\ \mathcal{I}(\dot{c}) &:= \alpha(\dot{c}) && \text{falls } \dot{c} \in S_K \\ \mathcal{I}(\dot{f}(t_1, \ldots, t_k)) &:= \alpha(\dot{f})(\mathcal{I}(t_1), \ldots, \mathcal{I}(t_k)) && \text{falls } \dot{f} \in S_F, \sigma(\dot{f}) = k. \end{aligned}$$

Wir definieren nun über Rekursion auf L^S den Begriff Wahrheit. „Wahrheit" ist eine Relation zwischen Interpretationen und Formeln: Wir schreiben $\mathcal{I} \models \varphi$ und sagen dazu etwa

- „$\mathcal{I}$ macht φ wahr"
- „$\mathcal{I}$ modelliert φ"
- „$\mathcal{I}$ macht φ gültig"
- „$\mathcal{I}$ glaubt φ"
- „$\mathcal{I}$ denkt φ"
- „$\mathcal{I}$ ist ein Modell von φ"

Zunächst für atomare Formeln: $t = t'$ und $\dot{R}(t_1, \ldots, t_k)$ für $t, t', t_1, \ldots, t_k \in T^S$ und $\dot{R} \in S_R$, $\sigma(\dot{R}) = k$.

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \models t = t' &\iff \mathcal{I}(t) = \mathcal{I}(t') \\ \mathcal{I} \models \dot{R}(t_1, \ldots, t_k) &\iff (\mathcal{I}(t_1), \ldots, \mathcal{I}(t_k)) \in \alpha(\dot{R}) \end{aligned}$$

Weiterhin gelten

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \models (\varphi \wedge \psi) &\iff \mathcal{I} \models \varphi \text{ und } \mathcal{I} \models \psi \\ \mathcal{I} \models (\varphi \vee \psi) &\iff \mathcal{I} \models \varphi \text{ oder } \mathcal{I} \models \psi \\ \mathcal{I} \models (\varphi \to \psi) &\iff \text{falls } \mathcal{I} \models \varphi, \text{ dann } \mathcal{I} \models \psi. \quad [\text{Dies gilt g.d.w. } \mathcal{I} \not\models \varphi \text{ oder } \mathcal{I} \models \psi] \\ \mathcal{I} \models \neg\varphi &\iff \text{nicht } \mathcal{I} \models \varphi \quad [\text{bzw. } \mathcal{I} \not\models \varphi] \\ \mathcal{I} \models \forall x \varphi &\iff \text{für alle } a \in A \text{ gilt } \mathcal{I}\frac{a}{x} \models \varphi \\ \mathcal{I} \models \exists x \varphi &\iff \text{es existiert } a \in A \text{ mit } \mathcal{I}\frac{a}{x} \models \varphi. \end{aligned}$$

Nach dem Rekursionsprinzip definiert dies $\mathcal{I} \models \varphi$ für alle $\varphi \in L^S$.

Beispiel Sei $S = \{\dot{+}, \dot{-}, \dot{0}, \dot{\otimes}, \dot{1}\}$ die Symbolmenge mit der S-Struktur $(\mathbb{Q}, +, -, 0, \cdot, 1)$. Dann ist $\exists x \dot{\otimes}(x,x) = \dot{+}(\dot{1}, \dot{1})$ eine Formel.
(informell) $\exists x(x^2 = 2)$
(semi-formell) $\exists x x \dot{\otimes} x = \dot{1} \dot{+} \dot{1}$
Sei β eine Belegung, z.B.

$$\beta(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in \text{Var}\,.$$

und betrachte $\mathcal{I} = (\mathbb{Q}, +, -, 0, \cdot, 1, \beta)$.
Frage: $\mathcal{I} \models \exists x \dot{\otimes}(x,x) = \dot{+}(\dot{1}, \dot{1})$. Dies gilt g.d.w. ein $a \in \mathbb{Q}$ existiert mit $\mathcal{I}\frac{a}{x} \models \otimes(x,x) = \dot{+}(\dot{1}, \dot{1})$. Überlege sich hierzu, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{I}\frac{a}{x}(\otimes(x,x)) &= \alpha(\otimes)\left(\beta\frac{a}{x}(x), \beta\frac{a}{x}(x)\right) = a \cdot a = a^2 \\ \mathcal{I}\frac{a}{x}(\dot{+}(\dot{1}, \dot{1})) &= \alpha(\dot{+})(\alpha(\dot{1}), \alpha(\dot{1})) \\ &= \alpha(\dot{+})(1,1) = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Somit gilt die zu zeigende Aussage g.d.w. $a \in \mathbb{Q}$ existiert mit $a^2 = 2$. Diese Aussage ist offensichtlich falsch in $\mathbb{Q}$ und somit ist obiger Satz $\mathcal{I} \models \exists x \dot{\otimes}(x,x) = \dot{+}(\dot{1}, \dot{1})$ nicht wahr in der vorliegenden Struktur.

Beispiel Betrachte die Aussage $\forall x \exists y (y + y = x)$. Dann ist $\varphi \equiv \forall x \exists y \dot{+}(y,y) = x$ ein Satz. Frage: $\mathcal{I} \models \varphi$? (Informell bedeutet dies die Teilbarkeit durch 2.)
Dann gilt φ g.d.w. für alle $a \in \mathbb{Q}$ gilt $\mathcal{I}\frac{a}{x} \models \exists y \dot{+}(y,y) = x$. Dies gilt wiederum g.d.w. für alle $a \in \mathbb{Q}$ gibt es ein $b \in \mathbb{Q}$ mit

$$\mathcal{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y} \models \dot{+}(y,y) = x$$

Wir haben nun

$$\mathcal{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}(x) = \begin{cases} a & \text{falls } x \neq y \\ b & \text{falls } x = y \end{cases}$$

In jedem Fall gilt allerdings $\mathcal{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}(\dot{+}(y,y)) = b + b$. Um dies zu sehen, betrachte die Fallunterscheidung

Fall 1 $x \neq y$. So ist obiges der Fall g.d.w. für alle $a \in \mathbb{Q}$ ein $b \in \mathbb{Q}$ existiert, s.d. $a = 2b$.

Fall 2 $x = y$. So ist obiges der Fall g.d.w. für alle $a \in \mathbb{Q}$ existiert ein $b \in \mathbb{Q}$ mit $b = 2b$ und dies gilt g.d.w. ein $b \in \mathbb{Q}$ existiert mit $b = 2b$.

Bemerkung (1) β war irrelevant in den beiden Beispielen. Dies ist durch die Tatsache begründet, dass es keine freien Variablen gab (alle Variablen waren stets durch Quantoren gebunden)!

(2) Der pathologische Fall

$$\forall x \exists x \dot{+}(x,x) = x$$

erhält eine konkrete Interpretation. Der wesentliche Punkt ist, dass

$$\mathcal{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y} = \mathcal{I}\frac{b}{x}.$$

Satz 1.5 (Koinzidenzlemma) Seien S_1, S_2 Symbolmengen, $S = S_1 \cap S_2$ und $\mathfrak{A}_1 = (A, \alpha_1)$ eine S_1-Struktur und $\mathfrak{A}_2 = (A, \alpha_2)$ eine S_2-Struktur. Seien β_1, β_2 zwei Belegungen in A. Setze $\mathcal{I}_1 = (\mathfrak{A}_1, \beta_1)$ und $\mathcal{I}_2 = (\mathfrak{A}_2, \beta_2)$. Dann gilt

1. Ist t ein S-Term ist, β_1 und β_2 auf der Menge $\mathrm{var}(t)$ (alle in t vorkommenden Variablen) übereinstimmen sowie α_1, α_2 auf S übereinstimmen, dann gilt

$$\mathcal{I}_1(t) = \mathcal{I}_2(t).$$

2. Falls φ eine S-Formel ist und α_1, α_2 auf den in φ vorkommenden Symbolen und β_1, β_2 auf der Menge $\mathrm{frei}(\varphi)$ (alle in φ frei vorkommenden Variablen) übereinstimmen, dann gilt

$$\mathcal{I}_1 \models \varphi \iff \mathcal{I}_2 \models \varphi.$$

Beweis. Übungsblatt 3. $\square$

Anwendung. $\forall x \varphi$ falls x in φ nicht auftaucht (pathologische Formel), dann gilt

$$\mathcal{I} \models \underbrace{\forall x}_{\text{leerer Quantor}} \varphi \iff \text{für alle } a \in A : \mathcal{I}\frac{a}{x} \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \varphi$$

wobei Letzteres gilt, denn β und $\beta\frac{a}{x}$ stimmen auf $\mathrm{frei}(\varphi)$ überein.

Korollar 1.6 Falls φ ein S-Satz ist, so gilt für alle Belegungen β, β'

$$(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi \iff (\mathfrak{A}, \beta') \models \varphi.$$

Definition Falls $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur und φ ein S-Satz, so heiße

$$\mathfrak{A} \models \varphi$$

Dies ist das Gleiche wie $(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi$ für ein β.

Notationen. Falls Γ eine Menge von S-Sätzen und φ ein S-Satz sind, so schreiben wir abkürzend

$$\Gamma \models \varphi$$

für alle $\mathfrak{A}$, falls für alle $\psi \in \Gamma$, $\mathfrak{A} \models \psi$, so $\mathfrak{A} \models \varphi$. Dies ist die semantische Folgerungsbeziehung. Wir sagen dann „φ folgt (semantisch) aus Γ“ $\mathfrak{A} \models \Gamma$.
Zusammenfassung Semantsiche Folgerung:

1. Falls $\mathcal{I}$ Interpretation, φ Formel: $\mathcal{I} \models \varphi$.
2. Falls $\mathfrak{A}$ Struktur, φ Satz: $\mathfrak{A} \models \varphi$.
3. Falls Γ eine Menge von Sätzen, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{A} \models \Gamma$ die Aussage: $\mathfrak{A} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Gamma$.
4. (a) φ, ψ Sätze: $\varphi \models \psi$
   (b) φ Satz, Γ Menge von Sätzen: $\Gamma \models \varphi$
5. Bsp.: Falls $\Gamma = \emptyset$, so sind die φ mit $\emptyset \models \varphi$ die sogenannten „Tautologien“.

Was sind hier „Axiome“? Falls $\mathcal{C}$ eine Klasse von S-Strukturen ist, welche durch Axiome gegeben ist, dann soll folgendes gelten:

(a) Die Axiome sind S-Sätze. Also: Sei Γ eine Menge der gegebenen Axiome.

(b) Für jede S-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt:
$$\mathfrak{A} \in \mathcal{C} \iff \mathfrak{A} \models \Gamma.$$

[Nennen wir auch: $\mathcal{C}$ ist axiomatisierbar.]

Beispiel (Gruppentheorie) $S_{\text{Gr}} := \{\dot{+}, \dot{-}, \dot{0}, \}$. Die Axiome der Gruppentheorie werden üblicherweise wie folgt geschrieben (informell):

$$\forall x \forall y \forall y \; (x+y)+z = x+(y+z) \qquad \text{(Assoziativität)}$$
$$\forall x \; x+(-x) = (-x)+x = 0 \qquad \text{(Inverse)}$$
$$\forall x \; x+0 = 0+x = x \qquad \text{(Neutrales Element)}$$

Statt der zweiten Bedingung kann man auch nur die (zunächst schwächere Bedingung)

$$\forall x \exists y \; x+y = y+x = 0$$

Und man kann zeigen, dass die Axiome äquivalent sind (wg. der Eindeutigkeit von Inversen).

Definition (Strukturerhaltend) Sei S eine Symbolmenge und seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ S-Strukturen, sodass $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ und $\mathfrak{A}' = (A', \alpha')$. Falls $F\colon A \to A'$, so heiße F S-strukturerhaltend, wenn für alle $\dot{c} \in S_K$, $\dot{f}, \dot{R} \in S_F, \sigma(\dot{R}) = \sigma(\dot{f}) = k$ und $a_1, \ldots, a_k \in A$:

$$F(\alpha(\dot{c})) = \alpha'(\dot{c}) \qquad \text{(K)}$$
$$F(\alpha(\dot{f})(a_1, \ldots, a_k)) = \alpha'(\dot{f})(F(a_1), \ldots, F(a_k)) \qquad \text{(F)}$$
$$(a_1, \ldots, a_k) \in \alpha(\dot{R}) \iff (F(a_1), \ldots, F(a_k)) \in \alpha'(\dot{R}) \qquad \text{(R)}$$

Definition (Einbettung) Eine S-strukturerhaltende Abb. F von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}'$ heißt S-Einbettung, falls F injektiv ist. [Bem.: Dies entspricht exakt der Bedingung (R) für die „Relation“ Gleichheit.]

Definition (Unterstruktur) Sei $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur und $B \subseteq A$. Falls B unter den Funktionen $\alpha(\dot{f})$ für $\dot{f} \in S_F$ abgeschlossen ist und für alle $\dot{c} \in S_K$, $\alpha(\dot{c}) \in B$, dann ist (B, α) eine S-Unterstruktur.

Äquivalent zu dieser Definition ist: $\mathfrak{A}' = (A', \alpha')$ ist Unterstruktur von $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ g.d.w.

$$A' \subseteq A$$
$$\alpha'(\dot{f}) = \alpha(\dot{f})|_{A'^{\sigma(\dot{f})}} \quad \text{für alle } \dot{f} \in S_F$$

Genauer: statt α schreibe $\tilde{\alpha}$ mit $\tilde{\alpha}(\dot{f}) = \alpha(\dot{f})|_{B^{\sigma(\dot{f})}}$.

Definition (Isomorphismus) Eine S-strukturerhaltend Abb. F heißt S-Isomorphismus, falls F bijektiv ist.

Bemerkung In diesem Fall ist F^{-1} ebenfalls S-strukturerhaltend (Übungsblatt 4).

Lemma 1.1 Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ S-Strukturen, β eine Belegung in A, F eine S-strukturerhaltende Abb. von A nach A'. $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ und $\mathcal{I}' = (\mathfrak{A}', F \circ \beta)$ seien die beiden so definierten Interpretationen. Sei nun t ein S-Term. Dann gilt: $F(\mathcal{I}(t)) = \mathcal{I}'(t)$.

Beweis. Per Induktion auf T^S.

Fall 1 $t = x$. $F(\mathcal{I}(t)) = F(\mathcal{I}(x)) = F(\beta(x)) = F \circ \beta(x) = \mathcal{I}'(x) = \mathcal{I}'(t)$.

Fall 2 $t = \dot{c}$. $F(\mathcal{I}(t)) = F(\mathcal{I}(\dot{c})) = F(\alpha(\dot{c})) \overset{(K)}{=} \alpha'(\dot{c}) = \mathcal{I}'(\dot{c}) = \mathcal{I}'(t)$.

Fall 3 $t = \dot{f}(t_1, \ldots, t_k)$.

$$\begin{aligned} F(\mathcal{I}(t)) &= F(\mathcal{I}(\dot{f}(t_1, \ldots, t_k))) = F(\alpha(\dot{f})(\mathcal{I}(t_1), \ldots, \mathcal{I}(t_k))) \\ &= \alpha'(\dot{f})(F(\mathcal{I}(t_1)), \ldots, F(\mathcal{I}(t_k))) = \alpha'(\dot{f})(\mathcal{I}'(t_1), \ldots, \mathcal{I}'(t_k)) \\ &= \mathcal{I}'(\dot{f}(t_1, \ldots, t_k)) = \mathcal{I}'(t) \end{aligned}$$ □

Lemma 1.2 Sei φ eine atomare Formel und seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', F, \beta, \mathcal{I}, \mathcal{I}'$ so wie in Lemma 1.1 (wobei F eine S-Einbettung ist). Dann gilt

$$\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I}' \models \varphi.$$

Beweis. Fall 1 φ ist von der Form $t = t'$.

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \models t = t' \ &\text{g. d. w. } \mathcal{I}(t) = \mathcal{I}(t') \\ &\text{g. d. w. } F(\mathcal{I})(t) = F(\mathcal{I}(t')) \\ &\text{g. d. w. } \mathcal{I}'(t) = \mathcal{I}'(t') && \text{(Lemma 1.1)} \\ &\text{g. d. w. } \mathcal{I}' \models t = t'. \end{aligned}$$

Fall 2 φ ist $\dot{R}(t_1, \ldots, t_k)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \models \dot{R}(t_1, \ldots, t_k) \ &\text{g. d. w. } (\mathcal{I}(t_1), \ldots, \mathcal{I}(t_k)) \in \alpha(\dot{R}) \\ &\text{g. d. w. } F((\mathcal{I}(t_1)), \ldots, F(\mathcal{I}(t_k))) \in \alpha'(\dot{R}) && \text{(nach (R))} \\ &\text{g. d. w. } (\mathcal{I}'(t_1), \ldots, \mathcal{I}'(t_k)) \in \alpha' \in (\dot{R}) && \text{(nach Lemma 1.1)} \\ &\text{g. d. w. } \mathcal{I}' \models \varphi. \end{aligned}$$ □

Definition Eine Formel φ heißt quantorenfrei, falls es eine Formelableitung von φ gibt, welche die Bedingungen (F7) und (F8) nicht verwendet.

Äquivalent zu dieser Definition ist: φ heißt quantorenfrei, falls $\forall$, $\exists$ nicht vorkommen. [Äquivalenzbeweis: vgl. Übungsblatt 7]

Lemma 1.3 Mit den Vor. aus Lemma 1.2. Falls φ quantorenfrei ist, so gilt

$$\mathcal{I} \models \varphi \ \text{ g. d. w. } \ \mathcal{I}' \models \varphi.$$

Beweis. Induktion über Lemma 1.2 und Regeln (F3) bis (F6). □

Was ist mit Quantoren? $\varphi = \forall x \psi$. Betrachte $A = \{e\}$ (einelementige Gruppe). Dann ist für $\alpha(\dot{+}) = +$ die Gleichung $e + e = e$ erfüllt und ebenso gilt $-e = e$ und $\alpha(\dot{0}) = e$. Dann ist $\forall x x = \dot{0}$ ein S-Satz und $(A, \alpha) \models \varphi$. Dies ist für mehrelementige Gruppen jedoch stets falsch. Man beachte: $\varphi_A, \varphi_I, \varphi_N, \varphi$ und $\varphi_A \wedge \varphi_I \wedge \varphi_N \wedge \varphi$ hat bis auf Isomorphie exakt ein Modell.

Definition Eine Formel φ heißt universeller Ausdruck, falls es eine quantorenfreie Formel ψ gibt, so dass
$$\varphi \text{ von der Form } \forall x_1 \cdots \forall x_k \psi \text{ ist.}$$
Ein universeller Ausdruck heißt universeller Satz, falls φ ein Satz ist.

Beispiel Die Gruppenaxiome in der Sprache S_{Gr} sind universelle Sätze.

Lemma 1.4 Mit den Vor. von Lemma 2 und φ universeller Ausdruck. So gilt:
$$\text{wenn } \mathcal{I}' \models \varphi, \text{ dann } \mathcal{I} \models \varphi$$

Beweis. Nach Lemma 3 bleibt noch zu zeigen: Wenn $\mathcal{I}' \models \forall\psi$, dann $\mathcal{I} \models \forall\psi$. Es gilt $\mathcal{I}' \models \forall x\psi$ g. d. w. für alle $a' \in A'$ gilt $\mathcal{I}'\frac{a'}{x} \models \psi$.
Zu zeigen ist $\mathcal{I} \models \forall\psi$, also sei $a \in A$ beliebig. Zeige $\mathcal{I}\frac{a}{x} \models \psi$. Das ist gleichbedeutend mit $\mathcal{I}'\frac{F(a)}{x} \models \psi$. Dies gilt (s.o.). □

Beachte:
$$\mathfrak{A} \text{ ist Unterstruktur von } \mathfrak{A}' \text{ g. d. w. } id : A \to A' \text{ ist } S\text{-strukturerhaltend.}$$

Korollar 1.7 Falls $\mathfrak{A}$ Unterstruktur von $\mathfrak{A}'$ und φ ein universeller Satz, so dass $\mathfrak{A}' \models \varphi$. Dann ist $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Betrachte S_{Gr} wie vorher mit unseren drei Axiomen $\varphi_A, \varphi_I, \varphi_N$ wenn $\mathcal{G}$ eine S_{Gr}-Unterstruktur von $\mathcal{G}' \models \varphi_A \wedge \varphi_I \wedge \varphi_N$ alle drei universelle Sätze dann ist
$$\mathcal{G} \models \varphi_A \wedge \varphi_I \wedge \varphi_N.$$

Definition (Erhaltung von Formeln) Falls $\pi : A \to A'$ und φ eine S-Formel mit freien Var. $x_1, \ldots, x_n$, dann sagen wir π erhält φ, falls für alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ und alle A-Belegungen β und A'-Belegungen β' gilt
$$\mathfrak{A}, \beta\frac{a_1 \ldots a_n}{x_1 \ldots x_n} \models \varphi \text{ g. d. w. } \mathfrak{A}', \beta'\frac{\pi(a_1) \ldots \pi(a_n)}{x_1 \ldots x_n} \models \varphi.$$
Falls Γ eine Menge von S-Formeln ist, so sagen wir π erhält Γ, falls π alle $\varphi \in \Gamma$ erhält.

Korollar 1.8 Wir haben bereits einige Mengen von Formeln gesehen. Etwa Γ_{qf} die Menge aller quantorenfreien Formeln, $\Gamma_{\cup A}$ die Menge aller universellen Ausdrücke.

1. Falls π eine S-Einbettung, so erhält π S-quantorenfreie Formeln.
2. Falls π eine S-Einbettung, so erhält π S-universelle Ausdrücke abwärts.[1]
3. $\mathfrak{A}$ ist Untersturktur von $\mathfrak{A}'$ g.d.w. $id : A \to A'$ eine Einbettung ist.
4. Universelle Sätze werden auf Unterstrukturen übertragen.

[1] In der Def. nennen wir die Erhaltung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}'$ „aufwärts“ und Erhaltung von $\mathfrak{A}'$ nach $\mathfrak{A}$ „abwärts“.

Definition Wir schreiben $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$ für „es existiert $\pi : A \to A'$, welches ein S-Isomorphismus ist".
Wir betrachten

$$Th(\mathfrak{A}) := \{\varphi \mid \mathfrak{A} \models \varphi \text{ und } \varphi \text{ ist } S\text{-Satz}\}$$

die Theorie von $\mathfrak{A}$.
Wir schreiben

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}' \text{ g. d. w. } Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{A}').$$

und nennen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ in diesem Fall elementar-äquivalent.
Sei Γ eine Menge von S-Sätzen. Wir sagen Γ ist vollständig, falls für jeden S-Satz φ gilt:

$$\varphi \in \Gamma \text{ oder } \neg\varphi \in \Gamma.$$

Bemerkung Für jedes $\mathfrak{A}$ ist $Th(\mathfrak{A})$ eine vollständige Satzmenge.

Warum? Wir haben definiert, dass $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ g.d.w. nicht gilt, dass $\mathfrak{A} \models \varphi$. Also gilt entweder $\mathfrak{A} \models \varphi$ oder $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$.

Beispiel Wir betrachten unsere Gruppenaxiome $\Gamma_{Gr} = \{\varphi_A, \varphi_N, \varphi_I\}$. Dies ist die Menge der Sätze, die in jeder Gruppe gelten. Betrachte nun

$$\Gamma := \{\varphi \mid \Gamma_{Gr} \models \varphi\}.$$

Betrachte nun $\varphi_{\geq 3} := \exists x \exists y \exists z (x \neq z \wedge x \neq y \wedge y \neq z)$. Allerdings gilt nun $\varphi_{\geq 3} \notin \Gamma$ und $\neg\varphi_{\geq 3} \notin \Gamma$. Also ist Γ keine vollständige Satzmenge. Sei $\mathfrak{A}$ die zweielementige Gruppe. Dann gilt $Th(\mathfrak{A}) \supseteq \Gamma$. Dies ist vollstädnig und $\neg\varphi_{\geq 3} \in Th(\mathfrak{A})$.

Definition Sei $\pi : A \to A'$ eine Einbettung. Wir sagen, dass π elementar ist, falls π jede Formel φ erhält. Wir schreiben $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{A}'$ für „es existiert eine elementare Einbettung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}'$".

Bemerkung Falls $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{A}'$, dann folgt $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}'$.

Beweis. Falls φ ein S-Satz ist, so gilt (wg. Koinzidenzlemmas) $\mathfrak{A} \models \varphi$ g.d.w. $\mathfrak{A}' \models \varphi$, da φ keine freien Variablen besitzt. Also ist $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{A}')$. □

Bemerkung (Nicht alle Einbettungen sind elementar) Sei S die Sprache der Körper, also $S = \{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{0}, \dot{1}\}$. Betrachte die Formel $\exists w (w^2 = 2)$ d.h. $\exists w \dot{\times}(w, w) = \dot{+}(\dot{1}, \dot{1}) =: \varphi_{\sqrt{2}}$.
Wir wissen, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1) \models \neg\varphi_{\sqrt{2}}$ und, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1) \models \varphi_{\sqrt{2}}$.
$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist abgeschlossen und $+, \cdot$ und enthält $0, 1$, also ist $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ eine S-Unterstruktur von $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$, also ist $id : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ eine S-Einbettung. Da

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_{\sqrt{2}} \in Th(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1) \\ \varphi_{\sqrt{2}} \notin Th(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow Th(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1) \neq Th(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1).$$

folgt, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1) \not\equiv (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$. Insbesondere ist id eine Einbettung, die nicht elementar ist. Man beachte, dass $\exists x(x^2 = 2)$ kein universeller Satz ist. Aber $\forall x(x^2 \neq 2)$ ist ein universeller Satz und wird daher auf Unterstrukturen vererbt.

Food for thought: $\forall x(x^2 = -1)$.

Theorem 1.9 (Isomorphielemma) Falls $\pi : A \to A'$ ein S-Isomorphismus ist, so sind sowohl π als auch π^{-1} elementare S-Einbettung.

Beweis. Nach Symmetrie reicht es zu zeigen, dass π elementar ist. Nach Definition ist π eine S-Einbettung. Nach dem Satz aus der letzten Vorlesung erhält π quantorenfreie Formeln. Es bleibt per Induktion zu zeigen: Falls π die Formeln φ, ψ erhält, so auch

$$(\varphi \wedge \psi),\ (\varphi \vee \psi),\ (\varphi \to \psi),\ \neg\varphi,\ \exists x\varphi,\ \forall x\varphi.$$

Die Junktorenfälle sind uninteressant. Es gilt beispielsweise

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}, \beta\frac{a_1 \dots a_n}{x_1 \dots x_n} \models \varphi \wedge \psi \quad &\text{g. d. w.}\quad \mathfrak{A}, \beta\frac{a_1 \dots a_n}{x_1 \dots x_n} \models \varphi \text{ und } \mathfrak{A}, \beta\frac{a_1 \dots a_n}{x_1 \dots x_n} \models \psi \\
&\text{g. d. w.}\quad \mathfrak{A}', \beta'\frac{\pi(a_1) \dots \pi(a_n)}{x_1 \dots x_n} \models \varphi \text{ und } \mathfrak{A}', \beta'\frac{\pi(a_1) \dots \pi(a_n)}{x_1 \dots x_n} \models \psi \\
&\text{g. d. w.}\quad \mathfrak{A}', \beta'\frac{\pi(a_1) \dots \pi(a_n)}{x_1 \dots x_n} \models \varphi \wedge \psi.
\end{aligned}$$

Quantorenfall:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}, \beta\frac{a_1 \dots a_n}{x_1 \dots x_n} \models \forall x\varphi \quad &\text{g. d. w.}\quad \text{für alle } a \in A : \mathfrak{A}, \beta\frac{a_1 \dots a_n}{x_1 \dots x_n}\frac{a}{x} \models \varphi \\
&\text{g. d. w.}\quad \text{für alle } a \in A : \mathfrak{A}', \beta'\frac{\pi(a_1) \dots \pi(a_n)}{x_1 \dots x_n}\frac{\pi(a)}{x} \models \varphi \\
&\text{g. d. w.}\quad \text{für alle } a' \in A' : \mathfrak{A}', \beta'\frac{\pi(a_1) \dots \pi(a_n)}{x_1 \dots x_n}\frac{a'}{x} \models \varphi \quad (\text{da } \pi \text{ Bijektion}) \\
&\text{g. d. w.}\quad \mathfrak{A}', \beta'\frac{\pi(a_1) \dots \pi(a_n)}{x_1 \dots x_n} \models \forall x\varphi.
\end{aligned}$$

Der Fall $\exists x\varphi$ geht genauso. (Die Bijektivität wird dabei umgekehrt benutzt). □

Bemerkung (Bisherige Zusammenfassung) Wir haben bereits gesehen, dass

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}' \Rightarrow \mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{A}' \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}' \not\Leftarrow \text{es existiert Einbettung von } \mathfrak{A} \text{ nach } \mathfrak{A}'.$$

Vorschau. Am Ende der Vorlesung werden wir die Nicht-Implikationen

$$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{A}' \not\Rightarrow \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$$

und

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}' \not\Rightarrow \mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{A}'$$

bewiesen haben. [Verwendet den Gödelschen Vollständigkeitssatz.]

Definition (Definierbarkeit) Sei $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur und $X \subseteq A$ eine Menge. Wir sagen X ist S-definierbar genau dann, wenn es eine S-Formel φ mit einer freien Variable x gibt so dass

$$\text{für alle } a \in A \quad a \in X \iff \mathfrak{A}, \beta\frac{a}{x} \models \varphi \ \text{ für alle } \beta.$$

Definition (Automorphismus) Eine Funktion $\pi\colon A \to A$ heißt S-Automorphismus, falls π ein S-Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}$ ist.

Lemma 1.5 Falls $X \subseteq A$ und ein S-Automorphismus π von $\mathfrak{A}$ mit $\pi[X] \neq X$ existiert. Dann ist X nicht S-definierbar.

Beweis. Wenn $X \neq \pi[X]$, so existiert entweder $a^* \in X \setminus \pi[X]$ oder $a^* \in \pi[X] \setminus X$. O.B.d.A. sei $a^* \in X \setminus \pi[X]$.
Ang. φ definiert X, das heißt $\mathfrak{A}, \beta\frac{a}{x} \models \varphi$ g.d.w. $a \in X$. Da π ein Automorphismus war, bleibt diese Formel erhalten. Also $\mathfrak{A}, \beta\frac{a^*}{x} \models \varphi$ und $\mathfrak{A}, \beta\frac{\pi^{-1}(a^*)}{x} \models \varphi$. Also ist $\pi^{-1}(a^*) \in X$, d. h. $a^* = \pi(\pi^{-1}(a^*)) \in \pi[X]$. Dies ist ein Widerspruch! $\square$

Beispiel (Definierbarkeit in $\mathbb{Q}$) Betrachte $(\mathbb{Q}, +, 0)$. Die Abbildung $\pi : q \mapsto aq$ für $a \neq 0$ ist ein $(\dot{+}, \dot{0})$-Automorphismus. Betrachte nun $\{q \mid q > 0\}$. Diese Menge ist nicht definierbar (wegen Multiplikation mit $a = -1$). Ebenso ist $\{q \mid |q| \leq 1\}$ nicht definierbar (wegen Multiplikation mit $a = 2$).

Beispiel (Isomorphismen zwischen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$)

1. $S = \{\dot{0}\}, \mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, 0), \mathfrak{A}' = (\mathbb{N}, 0)$. Sei π eine beliebige Bijektion von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{N}_0$ mit der Eigenschaft $\pi(0) = 0$. Dann ist π S-strukturerhaltend, das heißt $(\mathbb{Q}, 0) \cong (\mathbb{N}, 0)$.

2. a. $S = \{\dot{0}, \dot{<}\}, \mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, 0, <), \mathfrak{A}' = (\mathbb{N}, 0, <)$. Frage: Gibt es einen S-Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}'$? Nein, denn wähle $q < 0$, z.B. $q = -1$. Da $\mathfrak{A}\frac{a}{x} \models x\dot{<}\dot{0}$ müsste gelten: $\mathfrak{A}'\frac{\pi(a)}{x} \models x\dot{<}\dot{0}$. Das heißt allerdings $\pi(q) < \pi(0) = 0$, aber es existiert natürlich kein $n \in \mathbb{N}$ mit $n < 0$. $\Rightarrow (\mathbb{Q}, 0, <) \ncong (\mathbb{N}, 0, <)$.
   b. Die gleiche Sprache, aber $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, 0, <), \mathfrak{A}' = (\mathbb{Z}, 0, <)$. Frage: Gilt $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$? [Idee: $\mathbb{Q}$ ist dicht, $\mathbb{Z}$ nicht.] Nein, denn wir finden q, sodass $\pi(0) = 0$ und $\pi(q) = 1$. Dann ist
   $$\mathfrak{A}\frac{q}{x} \models \exists z(\dot{0}\dot{<}z \wedge z\dot{<}x) \overset{\text{falls } \pi \text{ Isom.}}{\Longrightarrow} \mathfrak{A}'\frac{\pi(q)}{x} \models \exists z(\dot{0} < z \wedge z < x)$$
   Falls $w \in \mathbb{Z}$ ein Zeuge für diese Formel ist, so gilt $0 < w < 1$. Widerspruch!

Bemerkung Der $\{\dot{<}\}$-Satz
$$\forall x \forall y(x\dot{<}y \rightarrow \exists z(x\dot{<}z \wedge z\dot{<}y))$$
ist wahr in $\mathbb{Q}$ und falsch in $\mathbb{Z}$:
$$(\mathbb{Q}, 0, <) \not\equiv (\mathbb{Z}, 0, <).$$

Beispiel (Zu Lemma 1.5) Generalbeispiel: $\mathbb{Q}$. Wir betrachten verschiedene, kleine Symbolmengen S.

1. $S = \emptyset$. Dann ist ein S-Isomorphismus das gleiche wie Bijektion. Also jede Bijektion $\pi\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ ist S-Automorphismus.

   Immer definierbar sind alles und nichts. Das heißt: Die Menge selbst $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$ ist definiert durch $x = x$ und die leere Menge $\emptyset \subseteq \mathbb{Q}$ ist definiert durch $x \neq x$ (bzw. $\neg x = x$).

   Beachte: Falls $X \subseteq A$ in einer Struktur $\mathfrak{A}$ durch φ definiert ist, so ist $A \setminus X$ durch $\neg\varphi$ definiert. Falls $X \subseteq \mathbb{Q}$ nicht von dieser Form ist, so existieren $q, q' \in \mathbb{Q}$ mit $q \in X$ und $q' \in X$. Betrachte nun
   $$\pi\colon \ \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \neq q, x \neq q' \\ q' & \text{falls } x = q \\ q & \text{falls } x = q' \end{cases}$$
   Sicherlich ist $\pi\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ eine Bijektion und damit ein S-Automorphismus. Aber $q \in X$ und $\pi(q) \notin X$, also ist X nicht S-definierbar.

2. $S = \{\dot{0}\}$. Hier sind S-Automorphismen exakt die Bijektionen $\pi\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ mit $\pi(0) = 0$. Definiert sind wie zuvor $\mathbb{Q}$ und $\emptyset$. Ebenso $\{0\}$ über $x = \dot{0}$ und $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ über $x \neq \dot{0}$.

   Dies sind ebenfalls die einzigen Mengen, denn: Falls X nicht von dieser Form ist, dann existieren $q, q' \in \mathbb{Q}$ mit $q \neq 0 \neq q'$ und $q \in X$, $q' \notin X$. Betrachte nun $\pi\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ x & \text{falls } x \neq q, q' \\ q' & x = q \\ q & x = q' \end{cases}$$

   Dies ist ein S-Automorphismus, der nicht X erhält. Also ist X nicht S-definierbar.

3. $S = \{\dot{+}\}, \mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, +)$. Falls $\pi\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definiert ist als $\pi(x) = q \cdot x$ mit $q \neq 0$ ist eine Bijektion und $\pi(a + b) = q \cdot (a + b) = q \cdot a + q \cdot b = \pi(a) + \pi(b)$. Also ist π ein S-Automorphismus. Es lassen sich ebenfalls die Mengen $\mathbb{Q}, \emptyset, \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ definieren. [Die Menge $\mathbb{Q}^{>0}$ ist nicht S-definiert, da $x \mapsto -x$ nach obigem S-Auto.]

   Falls X nicht von einer der oben genannten vier Formen ist existieren q, q' mit $q \neq 0$, $q' \neq 0$ und $q \in X$, $q' \notin X$. Dann ist $x \mapsto \frac{q'}{q}x$ ein S-Auto. mit $\pi(q) = q'$.

4. $S = \{\dot{0}, \dot{<}\}$. Dann können wir wie zuvor die Mengen $\mathbb{Q}, \emptyset, \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{Q}^{>0}, \mathbb{Q}_0^-$ definieren, wobei die letzten beiden definiert sind durch $\dot{0} \dot{<} x$ bzw. $\neg \dot{0} \dot{<} x$. Weiterhin lassen sich die Mengen $\mathbb{Q}_0^+$ und $\mathbb{Q}^-$ definieren.

   Falls X nicht von einer dieser acht Formen ist. Dann gilt entweder

   (a) es existieren $q, q' < 0$ und $q \in X$ und $q' \notin X$ oder

   (b) es existieren $q, q' > 0$ und $q \in X$ und $q' \notin X$.

   Betrachte $x \overset{\pi}{\longmapsto} \frac{q'}{q}x$. In beiden Fällen ist $\frac{q'}{q} > 0$ und somit ist π ein S-Automorphismus. Aber $\pi(q) = q'$ und somit ist X nicht definierbar.

5. $S = \{\dot{\times}\}$, $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, \cdot)$. Wir erhalten auch hier, dass $\{0\}$ definierbar ist durch $\forall z (x \cdot z = x)$.

Bemerkung Falls X durch φ und Y durch ψ definiert sind, so sind $X \cap Y$ und $X \cup Y$ durch $\varphi \wedge \psi$ bzw. $\varphi \vee \psi$ definiert.

Bemerkung In 3. aus Beispiel 20 ist das Symbol $\dot{0}$ nicht Teil der Sprache, aber $\{0\}$ ist definierbar.

4 Definitionserweiterungen

4.1 Relationale Definitionserweiterung

Definition (Relationale Definitionserweiterung) Seien S Symbolmenge, $\dot{R} \notin S$ ein n-stelliges Relationssymbol und $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ eine S-Struktur.
Sei φ eine S-Formel mit n freien Variablen. Betrachte $R_\varphi \subseteq A^n$ definiert durch $(a_1, \ldots, a_n) \in R_\varphi$ g.d.w.

$$\mathfrak{A}\frac{a_1}{x_1} \cdots \frac{a_n}{x_n} \models \varphi.$$

Schreibe $S^+ = S \cup \{\dot{R}\}$ und setze $\mathfrak{A}^+ = (A, \alpha^+)$ mit

$$\alpha^+|_S = \alpha,\ \alpha^+(\dot{R}) := R_\varphi$$

Dann ist $\mathfrak{A}^+$ die relationale Definitionserweiterung gemäß φ.
Intuition: Da R_φ durch eine S-Formel definierbar ist, sollte $\mathfrak{A}^+$ „nichts Neues sagen können".
Wir definieren eine Übersetzung von L^{S^+} nach L^S, bezeichnet als

$$\mathrm{rt}\colon L^{S^+} \longrightarrow L^S, \quad \mathfrak{A}^+, \beta \models \psi \ \text{ g.d.w. } \ \mathfrak{A}, \beta \models \mathrm{rt}(\psi)$$

für alle S^+-Formel ψ und alle Belegungen β. Dabei steht „rt" für relational translation.

Korollar 1.10 Daraus folgt unmittelbar: Falls $X \subseteq A$ S^+-definierbar ist [durch ψ], so ist es S-definierbar [durch $\mathrm{rt}(\psi)$]. Wir definieren rt durch Rekursion:

1. Falls $\psi \equiv t = t'$, dann $\mathrm{rt}(\psi) := \psi$.
2. Falls $\psi \equiv \dot{R}'(t_1, \dots, t_k)$ mit $\dot{R}' \neq \dot{R}$, dann $\mathrm{rt}(\psi) := \psi$.
3. Falls $\psi \equiv \dot{R}(t_1, \dots, t_n)$, dann $\mathrm{rt}(\psi) = \varphi\frac{t_1}{x_1} \cdots \frac{t_n}{x_n}$. (Dies ist eine Substitution. Details hierzu folgen.)
4. $\mathrm{rt}(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{rt}(\psi) \wedge \mathrm{rt}(\psi)$ und verfahre analog mit $\vee$ und $\rightarrow$.
5. $\mathrm{rt}(\neg\psi) = \neg\, \mathrm{rt}(\psi)$.
6. $\mathrm{rt}(\forall x \psi) = \forall x\, \mathrm{rt}(\psi)$ und verfahre analog mit $\exists$.

4.2 Funktionale Definitionserweiterung

Beispiel Sei $\dot{c}$ ein Konstantensymbol. Falls φ eine Formel ist (mit 1 freier Variable). $\exists x \varphi(x)$ könnte $\dot{c}$ beschreiben.

Definition (Funktionale Definitionserweiterung) Sei S eine Symbolmenge, T eine Menge von S-Sätzen und φ eine S-Formel mit $n+1$ freien Variablen[2] $x_1, \dots, x_n, y$. Wir sagen T impliziert die Existenz von durch φ bestimmten Objekten, falls

$$T \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \exists y \varphi$$

Ferner sagen wir T impliziert die Eindeutigkeit von durch φ bestimmten Objekten, falls

$$T \models \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y \forall z \left(\left(\varphi \wedge \varphi \frac{z}{y} \right) \rightarrow z = y \right).$$

Sei $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ eine S-Struktur und φ wie oben. Definiere nun

$$R_\varphi := \left\{ (a_1, \dots, a_n, a) \mid \mathfrak{A}\frac{a_1}{x_1} \cdots \frac{a_n}{x_n}\frac{a}{y} \models \varphi \right\}.$$

Wenn $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ die Existenz und Eindeutigkeit von durch φ bestimmten Objekten impliziert, so setzen wir

$$F_\varphi(a_1, \dots, a_n) := a \quad \text{g.d.w.} \quad (a_1, \dots, a_n, a) \in R_\varphi.$$

Sei $\dot{F} \notin S$ ein n-stelliges Funktionssymbol, so definieren wir

$$S^+ := S \cup \{F\} \quad \text{sowie} \quad \mathfrak{A}^+ = (A, \alpha^+),$$

wobei $\alpha^+|_S := \alpha$ und $\alpha(F) := F_\varphi$.

[2] Idee: Ersten n Variablen sind „Input" und die letzte Variable ist der „Output".

Definition (Funktionale Übersetzung) Wir definieren die funktionale Übersetzung ft durch Rekursion. Ist ψ eine atomare S^+-Formel, in der $\dot{F}$ vorkommt, dann gibt es eine atomare Formel ψ' mit mindestens einer freien Variable v, die nicht in ψ vorkommt, und es gibt S-Terme $t_1, \ldots, t_n$, sodass

$$\psi = \psi' \frac{\dot{F}(t_1, \ldots, t_n)}{v}.$$

Definiere ferner

$$\psi'' := \exists v \left(\varphi \frac{t_1}{x_1} \cdots \frac{t_n}{x_n} \frac{v}{y} \wedge \psi' \right).$$

In dieser Formel kommt $\dot{F}$ weniger oft vor als in ψ. Nun definieren wir rekursiv:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ft}(\psi) &:= \begin{cases} \psi & \text{falls } \dot{F} \text{ nicht in } \psi \text{ vorkommt} \\ \operatorname{ft}(\psi'') & \text{sonst} \end{cases} \\
\operatorname{ft}(\psi \wedge \theta) &:= \operatorname{ft}(\psi) \wedge \operatorname{ft}(\theta) \\
\operatorname{ft}(\psi \vee \theta) &:= \operatorname{ft}(\psi) \vee \operatorname{ft}(\theta) \\
\operatorname{ft}(\psi \to \theta) &:= \operatorname{ft}(\psi) \to \operatorname{ft}(\theta) \\
\operatorname{ft}(\neg\psi) &:= \neg \operatorname{ft}(\psi) \\
\operatorname{ft}(\forall x \psi) &:= \forall x \operatorname{ft}(\psi) \\
\operatorname{ft}(\exists x \psi) &:= \exists x \operatorname{ft}(\psi).
\end{aligned}$$

Theorem 1.11 (Funktionales Eliminationslemma) Seien $S, S^+, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^+$ wie zuvor und seien ψ bel. S^+-Formel und β eine A-Belegung. Dann gilt

$$\mathfrak{A}^+, \beta \models \psi \quad \text{g. d. w.} \quad \mathfrak{A}, \beta \models \operatorname{ft}(\psi)$$

Beweis. Übung. $\square$

Korollar 1.12 Eine Teilmenge $X \subseteq A$ ist genau dann S^+-definierbar, wenn sie S-definierbar ist.

Beweis. Sei $\theta(x)$ eine S^+-Formel, die $X = \{a \in A \mid \mathfrak{A}^+ \frac{a}{x} \models \theta\}$ definiert. Nach Theorem 1.11 gilt $X = \{a \in A \mid \mathfrak{A} \frac{a}{x} \models \operatorname{ft}(\theta)\}$. Da $\operatorname{ft}(\theta)$ eine S-Formel ist, ist X also S-definierbar. $\square$

Definition Seien S, S' Symbolmengen mit $S \subseteq S'$. Sei $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ eine S-Struktur $\mathfrak{A}' = (A', \alpha')$ eine S'-Struktur. Dann heißt $\mathfrak{A}$ das <u>S-Redukt von $\mathfrak{A}'$</u>, falls

$$A' = A \quad \text{und} \quad \alpha'|_S = \alpha.$$

5 Substitution

Beispiel Sei $S = \{\dot{+}, \dot{0}\}$ und betrachte die S-Struktur $(\mathbb{Z}, +, 0)$ und die S-Formel $\varphi := \exists z \dot{+}(z, z) = x$. Ersetzen wir x durch y so erhalten wir $\exists z \dot{+}(z, z) = y$. Ersetzen wir x aber durch z, so erhalten wir $\exists z \dot{+}(z, z) = z$. Das wollen wir so nicht. Wir wollen, dass φ das gleiche über $x_1, \ldots, x_n$ aussagt wie die neue Formel $\varphi \frac{t_1}{x_1} \cdots \frac{t_n}{x_n}$ über $t_1, \ldots, t_n$ aussagt.

Es seien S eine Symbolmenge, φ eine S-Formel und $x_0, \ldots, x_r$ paarweise verschiedene Variablen und $t_0, \ldots, t_r$ beliebige S-Terme.
Wir wollen aus φ eine Formel $\varphi \frac{t_0}{x_0} \cdots \frac{t_n}{x_n}$ basteln, wobei wir x_i durch t_i nur dann ersetzen, wenn $x_i \in \operatorname{frei}(\varphi)$ und $x_i \neq t_i$.

Definition (Substitution) In der Situation von zuvor: Für Terme setze

$$
\begin{aligned}
x\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n} &:= \begin{cases} x, & \text{falls } x \neq x_0, \ldots, x \neq x_n \\ t_i, & \text{falls } x = x_i \end{cases} \\
\dot{c}\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n} &:= \dot{c} \\
\left[\dot{f}(t'_0, \ldots, t'_n)\right]\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n} &:= \dot{f}\left(t'_0\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n}, \ldots, t'_n\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n}\right)
\end{aligned}
$$

Setze weiterhin für Formeln:

$$
\begin{aligned}
[t'_1 = t'_2]\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n} &:= t'_1\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n} = t'_2\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n} \\
\left[\dot{R}(t'_1, \ldots, t'_n)\right]\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n} &:= \dot{R}\left(t'_1\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n}, \ldots, t'_n\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n}\right) \\
(\varphi \wedge \psi)\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n} &:= \left(\varphi\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n} \wedge \psi\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n}\right) \\
(\varphi \vee \psi)\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n} &:= \left(\varphi\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n} \vee \psi\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n}\right) \\
(\varphi \to \psi)\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n} &:= \left(\varphi\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n} \to \psi\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n}\right) \\
\neg\varphi\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n} &:= \neg\varphi\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n}
\end{aligned}
$$

Seien $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ für $i_1 < \ldots < i_s$ die Variablen x_i unter $x_0, \ldots, x_n$ mit $x_i \in \text{frei}(\forall x\varphi)$. Setze dann

$$
\begin{aligned}
[\forall x\varphi]\frac{t_1}{x_1}\cdots\frac{t_n}{x_n} &:= \forall u\left[\varphi\frac{t_{i_1}}{x_{i_1}}\cdots\frac{t_{i_s}}{x_{i_s}}\frac{u}{x}\right] \\
[\exists x\varphi]\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n} &:= \exists u\left[\varphi\frac{t_{i_1}}{x_{i_1}}\cdots\frac{t_{i_s}}{x_{i_s}}\frac{u}{x}\right],
\end{aligned}
$$

wobei u entweder x ist, falls x nicht in $t_{i_1}, \ldots, t_{i_s}$ vorkommt oder z ist die erste Variable von $v_0, v_1, v_2, \ldots$, die nicht in φ vorkommt.

Beispiel Betrachte

1. $\left[\dot{R}(v_0, \dot{f}(v_1, v_2))\right]\frac{v_2}{v_1}\frac{v_0}{v_2}\frac{v_1}{v_3} = \dot{R}(v_0, \dot{f}(v_2, v_0))$.
2. $\left[\exists v_0\dot{R}(v_0, \dot{f}(v_1, v_2))\right]\frac{v_4}{v_1}\frac{\dot{f}(v_1,v_1)}{v_2} = \exists v_0\left[\dot{R}(v_0, \dot{f}(v_4, v_2))\right]\frac{\dot{f}(v_1,v_1)}{v_2}\frac{v_0}{v_0} = \exists v_0(\dot{R}(v_0, \dot{f}(v_4, f(v_1, v_1))))$.

Theorem 1.13 (Substitutionslemma) (1) Für alle S-Terme gilt:

$$
\mathcal{I}\left(t\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n}\right) = \mathcal{I}\frac{\mathcal{I}(t_0)}{x_0}\cdots\frac{\mathcal{I}(t_n)}{x_n}(t)
$$

(2) Für alle S-Formeln gilt:

$$
\mathcal{I} \models \varphi\frac{t_0}{x_0}\cdots\frac{t_n}{x_n} \quad \text{g. d. w.} \quad \mathcal{I}\frac{\mathcal{I}(t_0)}{x_0}\cdots\frac{\mathcal{I}(t_n)}{x_n} \models \varphi
$$

2 Mengenlehre

Die Mengenlehre liefert die Grundlage für Mathematik. Jedes Gebiet der Mathematik hat seine eigene Sprache L^S und kanonische Strukturen.
Eine Grundlage finden: Eine Sprache L^S, die allgemein gültig ist, so dass sich alle vorhandenen Sprachen der Mathematik einbetten lassen.
Georg Cantor (1845-1917): Entwicklung der Mengenlehre 1870-1900.
Ernst Zermelo: Zermelo-Mengenlehre.
Was sind Mengen? Traditionelle Antwort: Metaphysik der Mathematik; Moderne Antwort: Wir betrachten das Verhalten von Mengen.
Analogie:
Gruppentheorie: Obere Ebene: Strukturen (Gruppen) – Untere Ebene: Gruppenelemente.
Mengenlehre: Obere Ebene: Strukturen (Modelle der Mengenlehre) – Untere Ebene: Mengen.

1 Einführung in die ‚Language of Set Theory'

Konvention. „Modelle der Mengenlehre" soll ein irgendwie geartetes Modell sein. Die Symbolmenge der Mengenlehre ist $\{\in\}$ mit $\in \in S_R$ und $\sigma(\in) = 2$. [In der Literatur finden Sie: $\delta_\in$, LST (‚Language of Set Theory'), ...]

Daher: Was sind LST-Strukturen? Eine „Menge" A von Objekten und eine binäre Relation E auf A.
Also (A, E). Dies sind eigentlich einfach nur gerichtete Graphen. Für je zwei Punkte $a, b \in A$ gibt es entweder eine Kante oder eben nicht. Wir brauchen Kriterien, die uns sagen, ob ein gerichteter Graph den Namen „Modell der Mengenlehre" verdient oder nicht.
In dem Bild so eines Graphen ist a' eine $\mathfrak{A}$-Teilmenge von a, falls für alle $b \in A$ gilt

$$(bEa' \to bEa)$$

Klar ist: a ist $\mathfrak{A}$-Teilmenge von a. Falls $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur ist und $a \in A$, so nennen wir

$$\mathrm{Ext}_E(a) := \{b \in A \mid bEa\}.$$

die Extensionen von a in $\mathfrak{A}$.
Wir möchten nun einige Axiome angeben:

Definition (Extensionalität, Ext) Betrachte folgendes Axiom:

$$\forall x \forall y (x = y \iff \forall z (z \in x \iff z \in y)) \tag{Ext}$$

Das heißt, falls $\mathfrak{A} \models \mathrm{Ext}$, so gilt $a = a' \iff \mathrm{Exp}_E(a) = \mathrm{Ext}_E(a')$.

Definition (Leere-Mengen-Axiom, LM) Betrachte folgendes Axiom:

$$\exists x \forall z (z \notin x), \tag{LM}$$

wobei formell natürlich $\neg \in (z, x)$ gemeint ist.

Anschaulich gesprochen bedeutet dies, dass es ein a gibt, so dass kein b in E-Relation zu a steht – also $\mathrm{Ext}_E(a) = \emptyset$.

Definition (Einer-Mengen-Axiom, Einer) Betrachte folgendes Axiom:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \iff z = x) \tag{Einer}$$

Anschaulich gesprochen bedeutet dies, dass es für alle $a \in A$ ein b gibt mit $\mathrm{Ext}_E(b) = \{a\}$.

Korollar 2.1 Sei $\mathfrak{A}$ eine LST-Struktur mit $\mathfrak{A} \models (\text{Einer} \wedge \text{LM})$. Dann ist A unendlich.

Beweis. Da $\mathfrak{A} \models \text{LM}$, finden wir $a_0 \in A$ mit $\mathrm{Ext}_E(a_0) = \emptyset$. Definiere rekursiv a_{i+1} als ein Element von A mit $\mathrm{Ext}_E(a_{i+1}) = \{a_i\}$.

Behauptung. Für $i \neq j$ ist $a_i \neq a_j$ für alle $j < i$ gilt $a_j \neq a_i$.

Beweis durch Induktion: Der Anfang ist für $i = 0$ offensichtlich erfüllt. Angenommen die Aussage ist erfüllt für i. Sei nun angenommen, es gäbe $j < i+1$ mit $a_{i+j} = a_j$. Dann gilt entweder $j = 0$ oder $j = k+1$. Im ersten Fall wäre $\mathrm{Ext}_E(a_j) = \emptyset$, aber $\mathrm{Ext}_E(a_{i+1}) \neq \emptyset$. Im zweiten Fall wäre $\mathrm{Ext}_E(a_j) = \{a_k\} = \{a_i\} = \mathrm{Ext}_E(a_{i+1}) \Rightarrow a_k = a_i$. Dies ist ebenfalls ein Widerspruch! □

Bemerkung Ext + LM + Einer impliziert Existenz und Eindeutigkeit von leerer Menge und Einermengen. Also können wir im Rahmen einer funktionalen Def.Erweiterung neue Symbole hinzunehmen – nämlich $\emptyset \in S_K$ als Konstantensymbol und $\{x\} \in S_F$ als einstelliges Funktionssymbol.

Definition (Paarmengenaxiom, Paar) Betrachte folgendes Axiom:

$$\forall x \forall y \exists p \forall z (z \in p \iff z = x \vee z = y) \tag{Paar}$$

Es beschreibt also die Existenz der Paarmenge $\{a, b\}$. Anschaulich gesprochen existiert für alle $a, b \in A$ ein $c \in A$ mit $\mathrm{Ext}_E(c) = \{a, b\}$.

Satz 2.2 Falls $\mathfrak{A} \models \text{Paar}$, so gilt $\mathfrak{A} \models \text{Einer}$.

Beweis. Wende Paar auf a und a an und erhalte eine Einermenge von a. □

Notation. Neues binäres Funktionssymbol $\{x, y\} \in S_F$.

Definition (Binäre Vereinigung, BinVer) Betrachte folgendes Axiom:

$$\forall x \forall y \exists w \forall z (z \in w \iff z \in x \vee z \in y). \tag{BinVer}$$

Notation. Neues binäres Funktionssymbol $x \cup y$.

Definition (Vereinigung, Ver) Betrachte folgendes Axiom:

$$\forall x \exists w \forall z (z \in w \iff \exists y (z \in y \wedge y \in x)). \tag{Ver}$$

Notation. Neues einstelliges Funktionssymbol.

$$\bigcup X = \bigcup \{y \mid y \in x\}, \qquad \bigcup_{i=0}^{\infty} x_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} x_i = \bigcup \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Definition (Aussonderung, Aus) Sei φ eine Formel der LST mit $n+1$ freien Variablen. Dann ist Aus_φ ein Axiom.

$$\forall x \forall z_1 \forall z_2 \ldots \forall z_n \, \exists y \forall z (z \in y \iff z \in x \land \underbrace{\varphi(z, z_1, \ldots, z_n)}_{\varphi \frac{z}{x} \frac{z_1}{x_1} \cdots \frac{z_n}{x_n}}). \tag{Aus}$$

Notation. $\{z \in X \mid \varphi(z, z_1, \ldots, z_n)\}$.

Axiomatisieren der Mengenlehre.
Axiomensystem ist eine Menge von S-Sätzen. Das heißt Axiome sind S-Sätze. Wenn wir Sätze als Axiome auffassen, schreiben wir oft „+ “. Z. B. T ist ein Axiomensystem, φ ist ein Satz. Dann steht $T + \varphi$ für $T \cup \{\varphi\}$.

Bemerkung (Kriterien für Axiomensysteme nach Hilbert) Nach Hilbert sollen Axiomensystem folgende Eigenschaften erfüllen:

1. Vollständigkeit,
2. Widerspruchsfreiheit und
3. Unabhängigkeit (= Minimalität).

Bisherige Axiome:

- LM
- Paar
- Einer
- Ver
- BinVer
- Ext
- Aus

Dabei gilt allerdings Paar $\models$ Einer und Paar + Ver $\models$ BinVer. Beachte weiterhin, dass die Aussonderung kein Axiom ist.

Bemerkung (Aussonderung als Axiomenschema) Aussonderung ist ein Axiomenschema: Eine unendliche Menge von Axiomen, die durch syntaktische Einsetzung einer Formel in eine spezifische Form entsteht. Für eine Formel φ mit $n+1$ freien Variablen ist

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall x \exists y \, \forall z (z \in y \iff z \in x \land \varphi(z, x_1, \ldots, x_n)). \tag{Aus}$$

(Aus) ist dann $\{\mathrm{Aus}_\varphi \mid \varphi \in L^S \text{ mit } n+1 \text{ freien Variablen}\}$.

Definition (Komprehensionsaxiom(-enschema)) Sei φ eine Formel mit $n+1$ freien Variablen.

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \forall z (z \in y \iff \varphi(z, x_1, \ldots, x_n)) \tag{Komp φ}$$

Dann ist (Komp) die Menge

$$\{\mathrm{Komp}_\varphi \mid \varphi \text{ ist Formel}\}.$$

Beispiel Viele der bisherigen Axiome ergeben sich als Spezialfall der Komprehension.

1. (Paar) ist (Komp φ) mit $\varphi(z, x_1, x_2) \equiv z = x_1 \vee z = x_2$.
2. (Einer) ist (Komp φ) mit $\varphi(z, x) \equiv z = x$.
3. Falls $\varphi(z) \equiv z = z$, dann heißt (Komp φ), dass es eine Menge aller Mengen gibt.
4. Falls $\varphi(z) \equiv z \notin z$, dann gibt uns (Komp φ) eine Menge R, so dass $z \in R$ g.d.w. $z \notin z$. Üblicher Widerspruch (Russel'sche Antinomie). Falls $R \in R$, so $R \notin R$ und falls $R \notin R$, so $R \in R$.

Satz 2.3 Falls $\mathcal{G} = (V, E)$ ein gerichteter Graph ist und $\varphi(z) \equiv z \notin z$. Dann gilt $\mathcal{G} \models \neg$ Komp φ. [Vgl. Übungsaufgabe (1)]

Um dieses Problem zu „retten" schlug die Mathematikerin Maddy vor: One-Step-Back-From-Disaster. Grundgedanke dahinter ist die Einschränkung der Komprehension auf Mengen, die bereits existieren (das liefert die Aussonderung!)

Definition In einem Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ nennen wir $u \in V$ <u>universell</u>, falls für alle $w \in V$ gilt wEu.

Korollar 2.4 Falls $\mathcal{G} \models$ (Aus), so gibt es in $\mathcal{G}$ keine universelle Ecke.

Beweis. Ang. u wäre universell. Sei $\varphi(z) \equiv z \notin z$ die Russel-Formel und betrachte Aus_φ:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \iff z \in x \wedge \varphi(z)).$$

Wende dies auf u an:

$$\exists y \forall z (z \in y \iff z \in u \wedge \varphi(z)) \overset{u \text{ universell}}{\iff} \exists y \forall z (z \in y \iff \varphi(z)) \iff \text{Komp } \varphi.$$

Dies ist ein Widerspruch. $\square$

Korollar 2.5 Es gilt (Aus) $\models \forall x \exists y (y \notin x)$.
Genauer: Falls $x \in V$, so ist y definiert durch die Formel

$$\forall z (z \in y \iff z \in x \wedge z \notin z)$$

nicht in x.

Auch (Aus) erlaubt es uns gemeinsam mit (Ext), die Sprache funktionell zu erweitern: $\{z \in x \mid \varphi(z, x_1, \ldots, x_n)\}$.

Bemerkung (Widerspruchsfreiheit von (Aus)) Betrachte den Graphen

$$\bullet a \qquad \{z \in a \mid z \neq z\}.$$

Für die Formel $\varphi(z) \equiv z \neq z$ ist Aus_φ falsch. Wir stellen fest, dass für $\varphi(z) \equiv z \neq z$ gilt:

$$(\text{Aus})_\varphi \models \text{LM}$$

Betrachte nun den (noch trivialeren) Graphen

$$\bullet a$$

Betrachte die Formel $\exists y \forall z (z \in y \iff z \in a \wedge \varphi(z))$. Da $z \in a$ stets falsch ist, können wir für die Klammer auch einfach $z \notin y$ schreiben. Das heißt $\varphi(z) \equiv z = z$. Dies erfüllt (Aus), allerdings aus trivialen Gründen.

Proposition 2.6 (Das Graphenmodell für das Paarmengenaxiom) Wir konstruieren einen Graphen $\mathcal{G}_{\mathrm{Paar}} = (V_{\mathrm{Paar}}, E_{\mathrm{Paar}})$ rekursiv.
Wir beginnen mit $V_0 := \{e\}$ und $E_0 := \emptyset$, das heißt $\mathcal{G}_0 := (V_0, E_0)$ ist $\bullet$. In der Konstruktion werden wir sicherstellen, dass für $x, y \in V_i$ gilt: xE_iy genau dann wenn E_ky für alle $k \geq i$.
Angenommen, $\mathcal{G}_i = (V_i, E_i)$ ist definiert. Wir sagen: Falls $x, y \in V_i$ so sagen wir „das Paar für $\{x, y\}$ fehlt in $\mathcal{G}_i$“, falls in $\mathcal{G}_i$ kein p existiert mit $\mathrm{Ext}_{E_i}(p) = \{x, y\}$. Das heißt g.d.w. $\mathcal{G}_i$ erfüllt nicht die x, y-Instanz von Paar. Setze nun

$$
\begin{aligned}
V_{i+1} &:= V_i \cup \{P\{x,y\} \mid P\{x,y\} \text{ sind paarweise verschiedene neue Punkte und das Paar für} \\
&\quad \{x,y\} \text{ fehlt in } \mathcal{G}_i\} \\
E_{i+1} &:= E_i \cup \{(x, P\{x,y\}) \mid \text{das Paar für } \{x,y\} \text{ fehlt in } \mathcal{G}_i\} \\
&\quad \cup \{(y, P\{x,y\}) \mid \text{das Paar für } \{x,y\} \text{ fehlt in } \mathcal{G}_i\}. \\
V_{\mathrm{Paar}} &:= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i \\
E_{\mathrm{Paar}} &:= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i.
\end{aligned}
$$

Dadurch folgt

$$\mathcal{G}_{\mathrm{Paar}} := (V_{\mathrm{Paar}}, E_{\mathrm{Paar}}) \models (\mathrm{Ext}) + (\mathrm{Paar}) + (\mathrm{Aus}) + (\mathrm{LM}) + (\mathrm{Einer}).$$

Beweis. Wir zeigen, dass $\mathcal{G}_{\mathrm{Paar}} \models (\mathrm{Ext}) + (\mathrm{Paar}) + (\mathrm{Aus}) + (\mathrm{LM}) + (\mathrm{Einer})$.
(Ext) ist klar nach Konstruktion.
(Paar) Seien $x, y \in V_{\mathrm{Paar}}$. Sei i so, dass $x, y \in V_i$. Dann gilt entweder, dass in $\mathcal{G}_i$ ein p existiert mit $\mathrm{Ext}_{E_i}(p) = \{x, y\}$. Dann ist p in G_{Paar} das Paar oder es gilt nicht: Das heißt, das Paar $\{x, y\}$ fehlt in $\mathcal{G}_i$, also existiert $P\{x, y\} \in V_{i+1}$ und dies ist auch in $\mathcal{G}_{\mathrm{Paar}}$ das Paar. □

Wichtig: In dieser Konstruktion werden existierenden Knoten niemals eingehende Pfeile hinzugefügt.
Aussonderung.
φ mit $n + 1$ freien Variablen. Das (Aus)-Axiome für φ war gegeben durch:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall x \exists y \, \forall z (z \in y \iff z \in x \wedge \varphi(z, x_1, \ldots, x_n))$$

Frage: Wie überprüft man eigentlich, ob (Aus) (d.h. für alle φ) gilt?

Definition (Aussonderungsinstanz) Sei $\mathcal{G} = (V, E)$ ein Graph, $a, a_1, \ldots, a_n \in V$ und φ eine Formel mit freien Variablen $x, x_1, \ldots, x_n$. Wir sagen b ist eine Aussonderungsinstanz (aus a mit Parametern $a_1, \ldots, a_n$ gemäß φ), falls für alle $v \in V$ gilt

$$vEb \text{ g.d.w. } vEa \text{ und } \mathcal{G}\frac{v}{x}\frac{a_1}{x_1} \cdots \frac{a_n}{x_n} \models \varphi.$$

Wir schreiben hierfür auch kurz $\mathcal{G} \models \varphi(v, a_1, \ldots, a_n)$.

Lemma 2.1 Es gilt $\mathcal{G} \models (\mathrm{Aus})$ genau dann, wenn für jede Formel φ und bel. $a, a_1, \ldots, a_n \in V$ eine Aussonderungsinstanz existiert.

Lemma 2.2 Falls b in $\mathcal{G}$ eine Aussonderungsinstanz aus a ist, so gilt

$$\mathrm{Ext}_E(b) \subseteq \mathrm{Ext}_E(a).$$

Beweis. Nach Definition ist b eine $\mathcal{G}$-Teilmenge von a, daraus folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 2.3 Falls $a \in V_{\text{Paar}}$, so gilt, dass $\text{Ext}_{E_{\text{Paar}}}(a)$ höchstens zwei Elemente hat.

Beweis. Wir beweisen durch Induktion: Für alle i gilt die Behauptung für jedes Element von V_i. Für $i = 0$ ist $V_0 = \{e\}$ mit $\text{Ext}_{E_{\text{Paar}}}(e) = \emptyset$. Angenommen die Aussage ist für V_i wahr. Dann gilt für $i + 1$:
Alte Elemente: Nach Konstruktion ist $\text{Ext}_{E_{i+1}}(a) = \text{Ext}_{E_i}(a)$.
Neue Elemente: $(P\{x, y\})$ mit $\text{Ext}_{E_{i+1}}(P\{x, y\}) = \{x, y\}$. $\square$

Theorem 2.7 $\mathcal{G}_{\text{Paar}} \models$ (Aus).

Beweis. Nach Lemma 2.2 und 2.3 gibt es zu einem Knoten $P\{x, y\}$ maximal die folgenden Aussonderungsinstanzen:

$$\begin{array}{lcl} b \text{ mit } \text{Ext}_{E_{\text{Paar}}}(b) = \{x, y\} & P\{x, y\} & \text{(stimmt)} \\ b \text{ mit } \text{Ext}_{E_{\text{Paar}}}(b) = \{x\} & P\{x, x\} & \text{(stimmt)} \\ b \text{ mit } \text{Ext}_{E_{\text{Paar}}}(b) = \{y\} & P\{y, y\} & \text{(stimmt)} \\ b \text{ mit } \text{Ext}_{E_{\text{Paar}}}(b) = \emptyset & e & \text{(stimmt)} \end{array}$$

Falls $a = e$, so ist e selbst die einzige Aussonderungsinstanz. Nach Lemma 2.1 folgt die Behauptung. $\square$

Theorem 2.8 $\mathcal{G}_{\text{Paar}} \not\models$ (Ver).

Beweis. Nach Übungsaufgabe wissen wir, dass (Paar) + (Ver) $\models$ (BinVer). Also reicht es aus, (BinVer) zu widerlegen. Wir wissen, dass V_{Paar} drei p.w. verschiedene Elemente a, b, c hat. Dann gibt es wegen (Paar) auch $\text{Ext}_{E_{\text{Paar}}}(P\{a, b\}) = \{a, b\}$ und $\text{Ext}_{E_{\text{Paar}}}(P\{c, c\}) = \{c\}$. Ang. (BinVer) gilt: Dann existiert u, sodass $\forall z(z \in u \iff z \in p\{a, b\} \lor z \in p\{c, c\})$. Daraus folgt $\text{Ext}_{E_{\text{Paar}}}(u) = \{a, b, c\}$. Dies steht im Widerspruch zu Lemma 2.3. $\square$

2 Potenzmengenaxiom und ‚Finite Set Theory'

Zunächst in Worten: Für beliebige $a, b \in V$: a ist eine $\mathcal{G}$-Teilmenge von b genau dann, wenn für alle $v \in V$ gilt: wenn vEa, dann vEb. Es gilt $\mathcal{G} \models \forall x(x \in a \to x \in b)$, falls $a \subseteq b$ [als relationale Definitionserweiterung]. Interpretiert in $\mathcal{G}$ gilt: $\mathcal{G} \models$ (Pot) g.d.w. für alle $a \in V$ eine $\mathcal{G}$-Potenzmenge von a existiert. Äquivalent hierzu ist

$$\text{Ext}_E(a) \subseteq \text{Ext}_E(b).$$

Definition (Potenzmenge, Pot) p ist eine $\mathcal{G}$-Potenzmenge von a, falls gilt

$$vEp \text{ g. d. w. } v \text{ ist } \mathcal{G} - \text{Teilm. von } a.$$

Betrachte nun folgendes Axiom:

$$\forall x \exists y \, \forall z(z \in y \iff z \subseteq x). \tag{Pot}$$

Bemerkung (a) Das Potenzmengenaxiom alleine gibt uns nicht

1. Eindeutigkeit und

2. Größe

der Potenzmenge.

(b) Falls (Pot) und (Ext) gelten. so ist die Potenzmenge eindeutig, also können wir ein Symbol einführen (als funktionale Definitionserw.): $\mathcal{P}(x)$.

(c) Falls $\mathrm{Ext}_E(a)$ endlich ist, sagen wir $|\,\mathrm{Ext}_E(a)| = n$ und falls weiterhin $\mathcal{G} \models$ (Aus) + (Pot) + (Ext) und b die Potenzmenge von a ist, so gilt

$$|\,\mathrm{Ext}_E(b)| = 2^n.$$

(d) In (c) ist (Ext) wichtig! (Betrachte etwa Teilgraphen mit zwei leeren Mengen, die in derselben Menge liegen.)

Beweis. (Von (c)) Wir müssen zeigen: Falls X eine Teilmenge von $\mathrm{Ext}_E(a)$ ist, so existiert $a_X \in V$ mit $\mathrm{Ext}_E(a_X) = X$. Ang. $X = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq \mathrm{Ext}_E(a)$. Sondere mit Formel

$$\varphi(x, a_1, \ldots, a_k) \equiv x = a_1 \vee x = a_2 \vee \ldots \vee x = a_k$$

aus a aus. Falls a_X Aussonderungsinstanz aus a mit Parametern $a_1, \ldots, a_k$ gemäß φ ist, so ist

$$\mathrm{Ext}_E(a_X) = \{a_1, \ldots, a_k\} = X.$$

□

Theorem 2.9 $\mathcal{G}_{\text{Paar}} \not\models$ (Pot).

Beweis. Da $\mathcal{G}_{\text{Paar}}$ Knoten enthält deren Extensionen zweielementig sind, folgt aus voriger Bem. (c), dass sie vier $\mathcal{G}_{\text{Paar}}$-Teilmengen haben. Falls (Pot) gilt, so hätte dei $\mathcal{G}$-Potenzmenge 4 Elemente im Widerspruch zu Lemma 2.3. □

Bemerkung Eine ähnliche Konstruktion, bei der man statt unter (Paar) unter (Pot)-Bildung abschließt, gibt uns ein Graphenmodell

$$\mathcal{G}_{\mathcal{P}} \models \text{ (Ext) + (Paar) + (Ver) + (Pot) + (Aus)}.$$

Dieses Modell ist ein lokalendlicher Graph, das heißt für jedes $a \in V$ gilt $\mathrm{Ext}_E(a)$ ist endlich. Dieses Modell heißt auch HF (Hereditarily Finite): erblich-endliche Mengen.

Definition (Finite-Set-Theory) Das Axiomensystem

$$\text{(Ext) + (Paar) + (Ver) + (Pot) + (Aus) heißt } \underline{\text{FST}}$$

In FST können wir viele Konstruktionen der Mathematik durchführen:

1. Geordnetes Paar $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

2. Kartesisches Produkt $a \times b$. Falls $x \in a, y \in b$:

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \mathcal{P}(a \cup b),$$

   da $\{x\} \subseteq a \cup b$ und $\{x, y\} \subseteq a \cup b$. Das heißt $(x, y) \in \mathcal{PP}(a \cup b)$. Definiere:

$$a \times b := \{w \in \mathcal{PP}(a \cup b) \mid \exists x \exists y (x \in a \wedge y \in b \wedge w = (x, y))\}$$

3. $\operatorname{Rel}(a,b) := \mathcal{P}(a \times b)$.

4. Falls $R \in \operatorname{Rel}(a,b)$, so definiere

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(R) &:= \{x \in a \mid \exists y \in b (x,y) \in R\} \\ \operatorname{ran}(R) &:= \{y \in b \mid \exists x \in a (x,y) \in R\}. \end{aligned}$$

   Dabei bezeichnet ‚dom' die domain, das heißt der Definitionsbereich und ‚ran' bezeichnet den Bildbereich (range).

5. Falls $R \in \operatorname{Rel}(a,b)$, so heißt R funktional, falls $\forall x \in \operatorname{dom}(R) \forall y, y' \in b (x,y) \in R \wedge (x,y') \in R \to y = y'$. (Dies entspricht formal einer LST-Formel.)

6. Definiere Menge von Funktionen

$$\operatorname{Fun}(a,b) := \{R \in \operatorname{Rel}(a,b) \mid R \text{ ist funktional und } \operatorname{dom}(R) = a\}.$$

   Abkürzung: $f \colon a \longrightarrow b$ für $f \in \operatorname{Fun}(a,b)$.

7. Definiere

$$\begin{aligned} \operatorname{Inj}(a,b) &:= \{f \in \operatorname{Fun}(a,b) \mid f \text{ ist injektiv}\} \\ \operatorname{Bij}(a,b) &:= \{f \in \operatorname{Fun}(a,b) \mid f \text{ ist bijektiv}\} \\ \operatorname{Refl}(a) &:= \{f \in \operatorname{Fun}(a,a) \mid f \text{ ist reflexiv}\} \\ \operatorname{Trans}(a) &:= \{f \in \operatorname{Fun}(a,a) \mid f \text{ ist transitiv}\} \\ \operatorname{Sym}(a) &:= \{f \in \operatorname{Fun}(a,a) \mid f \text{ ist symmetrisch}\} \\ \operatorname{Äq}(a) &:= \{f \in \operatorname{Fun}(a,a) \mid f \text{ ist reflexiv, transitiv und symmetrisch}\} \end{aligned}$$

Es fehlt die „Unendlichkeit" in FST. Hierzu gibt es zwei verschiedene Ansätze:

1. „Wir können immer etwas hinzufügen".
2. „Es existiert $Y \subsetneqq X$, so dass eine Bijektion $f \colon X \longrightarrow Y$ existiert".

Die Definition in 2. stammt von Dedekind. Wir nennen entsprechende Mengen demnach Dedekind-unendlich. Wir werden später mit dem Auswahlaxiom (!) zeigen, dass 1. und 2. äquivalent sind. In FST dürfen wir $\emptyset, \cup, \{\cdot\}$ schreiben und definieren

$$S(x) := x \cup \{x\}$$

den Nachfolger von x. (S steht für SUCCESSOR.) Im Modell

gilt beispielsweise $S(x) = x$. Ferner, beweist FST im Allgemeinen nicht, dass $\forall x\, x \neq S(x)$. Aber

$$\emptyset \neq \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = S(\emptyset)\; S(x) = \{\emptyset\} \neq \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = S(S(\emptyset)).$$

Definition Eine Menge I heißt induktiv (oder eine Nachfolgermenge), falls $\emptyset \in I$ und $\forall x (x \in I \to S(x) \in I)$.

Offensichtlich: Falls I induktiv, so sind $\emptyset, S(\emptyset), S(S(\emptyset))$ drei verschiedene Elemente von I. Daher gibt es in G_{Paar} keine induktive Menge (da jede Menge maximal zweielementig ist).

$$\exists I (I \text{ ist induktiv})$$
$$\exists I(\emptyset \in I \wedge \forall x(x \in I \to x \cup \{x\} \in I)) \tag{Unendl}$$

Sei I eine induktive Menge. Betrachte

$$\hat{I} := \{i \in I \mid \text{ für alle induktiven Mengen } J \text{ ist } i \in J\}.$$

Dabei lässt sich die Einschränkung schreiben als $\forall J(\textsc{Ind}(J) \to i \in J)$, wobei $\textsc{Ind}(J)$ die LST-Formel ist, welche „induktiv“ definiert. Informell schreiben wir dafür auch einfach $\bigcap\{J \mid J \text{ ist induktiv}\}$.

Bemerkung (Schnitte) Die folgende Definition eines Schnittes $x \cap y := \{z \in x \mid z \in y\}$ zeigt direkt, dass Schnitte von Mengen stets einen Spezialfall von (Aus) darstellen.

Behauptung. $\hat{I}$ ist induktiv.

Beweis. Klar ist $\emptyset \in \hat{I}$. Falls $x \in \hat{I}$, also für beliebiges J induktiv und $x \in J$, gilt somit $S(x) \in J$. Somit ist $S(x) \in \hat{I}$.
Offensichtlich: Falls J induktiv, so ist $\hat{I} \subseteq J$. Ebenso: Falls I, J induktiv, so gilt $\hat{I} = \hat{J}$. □

3 Natürliche Zahlen

Definition (Natürliche Zahlen) Wir definieren $\mathbb{N} := \hat{I}$ für eine beliebige induktive Menge I. Wir bezeichnen die Elemente von $\mathbb{N}$ als „natürliche Zahlen“.

Bemerkung Falls $Z \subseteq \mathbb{N}$ und Z induktiv ist, so gilt $Z = \mathbb{N}$.

Korollar 2.10 (Das Induktionstheorem) Sei $Z \subseteq \mathbb{N}$. Falls $\emptyset \in Z$ und für alle $x \in Z$ gilt $S(x) \in Z$, so ist $Z = \mathbb{N}$.

Definition (Transitive Mengen) Wir nennen eine Menge X <u>transitiv</u>, falls gilt:

$$\forall z \forall y \; z \in y \wedge y \in x \to z \in x.$$

Äquivalent dazu:

$$\forall y \, (y \in x \to y \subseteq x)$$

Die leere Menge $\emptyset$ ist beispielsweise transitiv (trivialerweise). Ferner: Falls x transitiv, so ist auch $S(x)$ transitiv, d. h. $z \in y \in S(x) \to z \in S(x)$.

Bemerkung (Eigenschaften von $\mathbb{N}$)

1. $\forall n \in \mathbb{N}$: $n = \emptyset$ oder $\exists m \in \mathbb{N} : n = S(m)$.

   [$Z := \{n \in \mathbb{N} \mid n = \emptyset \text{ oder } \exists m \in \mathbb{N}\, n = S(m)\}$. Offensichtlich ist $\emptyset \in Z$. Falls $x \in Z$, so ist $S(x) \in Z$.]

2. $\forall n \in \mathbb{N} : n$ ist transitiv.

   [$Z := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist transitiv}\}$ ist induktiv – siehe vorherige Definition.]

3. $\forall n \in \mathbb{N} : n \subseteq \mathbb{N}$.

   [$Z := \{n \in \mathbb{N} \mid n \subseteq \mathbb{N}\}$ ist induktiv: $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$ und falls $n \subseteq \mathbb{N}$, so $S(n) = n \cup \{n\} \subseteq \mathbb{N}$, da $n \subseteq \mathbb{N}$ und $\{n\} \subseteq \mathbb{N}$.]

4. Also: $\mathbb{N}$ ist transitiv.

5. $\forall n \in \mathbb{N}$: $n \notin n$.

   [$Z := \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin n\}$ ist induktiv: $\emptyset \notin \emptyset$ (per Definition) und angenommen $n \in Z$, also $n \notin n$. Zu zeigen ist nun $S(n) \notin S(n) = n \cup \{n\}$. Angenommen $S(n) \in n \cup \{n\}$. Fall 1: $S(n) \in n$. Dann folgt aus Transitivität, dass $n \in n$. Widerspruch zu $n \in Z$! Fall 2: $S(n) = n \Rightarrow n \in n$. Widerspruch zu $n \in Z$.]

6. $\forall n \forall m\, S(n) = S(m) \to n = m$.

   [Analog zu zuvor.]

7. $\forall n \forall m\; n \in m$ oder $n = m$ oder $m \in n$. Das heißt „$\in$“ entspricht der Ordnung auf $\mathbb{N}$.

Definition (Ordnungen) $(P, \leq)$ heißt <u>(partielle) Ordnung</u>, falls

$$\forall x \forall y \forall z\, (x \leq y \land y \leq z \to x \leq z) \qquad \text{(transitv)}$$
$$\forall x\, x \leq x \qquad \text{(reflexiv)}$$
$$\forall x \forall y\, (x \leq y \land y \leq x \to x = y). \qquad \text{(antisymmetrisch)}$$

Ferner heißt $(P, <)$ <u>strikte partielle Ordnung</u>, falls es transitiv ist und

$$\forall x\, \neg x < x. \qquad \text{(irreflexiv)}$$

Bemerkung Falls $(P, \leq)$ eine partielle Ordnung ist, so definiert

$$x < y :\Longleftrightarrow x \leq y \land x \neq y$$

eine strikte partielle Ordnung.
Andersherum falls $(P, <)$ eine strikte partielle Ordnung ist, so definiert

$$x \leq y :\Longleftrightarrow x < y \lor x = y$$

eine partielle Ordnung. Das obige heißt, dass die Relation $< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert durch (die Formel)

$$n < m :\Longleftrightarrow n \in m$$

eine strikte totale[1] Ordnung ist. Diese Definition liefert daher die Menge $\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \varphi(n, m)\}$, wobei $\varphi \equiv n \in m$.

Theorem 2.11 (Rekursionssatz) Es seien $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ und $x_0 \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine eindeutige Funktion $G\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit

1. $G(\emptyset) = x_0$,
2. $G(S(n)) = f(G(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

[1] Total bedeutet, dass je zwei beliebige n, m stets in einer Relation zueinander stehen (etwa $n \leq m$ oder $m \leq n$).

Beweis. Existenz durch Aussonderung aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Dafür brauchen wir eine Formel φ, so dass $G := \{(n, m) \mid \varphi(n, m)\}$ genau die obigen Bedingungen erfüllt. [Z.B. $(\emptyset, x_0), (S(\emptyset), f(x_0))$ sollten in G sein.] In anderen Worten: Wir suchen eine Formel φ mit $\varphi(n, m) \iff m = G(n)$ für so ein G.
Zur Eindeutigkeit: Seien G, G' zwei Funktionen mit Eigenschaften 1 + 2. Betrachte $Z := \{n \in \mathbb{N} \mid G(n) = G'(n)\}$. Diese Menge ist induktiv, da nach 1 gilt $G(\emptyset) = x_0 = G'(\emptyset)$, also $\emptyset \in Z$. Angenommen $n \in Z$, also $G(n) = G'(n)$. Dann gilt

$$G(S(n)) \overset{2.}{=} f(G(n)) = f(G'(n)) \overset{2.}{=} G'(S(n)).$$

Dies zeigt die Eindeutigkeit.
Wir nennen eine Funktion g einen (x_0, f)-Keim, falls

(1) Es gilt $\mathrm{dom}(g) \in \mathbb{N}$

(2) Bed. 1. von zuvor gilt, falls $\emptyset \in \mathrm{dom}(g)$ (also keine leere Abbildung)

(3) Bed. 2. von zuvor gilt, falls $S(n) \in \mathrm{dom}(g)$.

Z. B. ist $\emptyset$ ein Keim und $\{(\emptyset, x_0)\}$ ist ein Keim.
Der Eindeutigkeitsbeweis zeigt, dass falls g, g' Keime sind und $n \in \mathrm{dom}(g) \cap \mathrm{dom}(g')$, so ist $g(n) = g'(n)$. Betrachte nun $Z := \{n \in \mathbb{N} \mid \text{es existiert ein Keim } g \text{ mit } n \in \mathrm{dom}(g)\}$. Diese Menge ist induktiv, denn: [$g := \{(\emptyset, x_0)\}$ ist ein Keim mit $\mathrm{dom}(g) = \{\emptyset\}$, also ist $\emptyset \in Z$. Falls $m \in Z$, d. h. es existiert ein Keim g mit $m \in \mathrm{dom}(g)$. Definiere nun $g' := g \cup \{(S(m), f(g(m)))\}$. Dann ist g' eine Funktion (selbst wenn $S(m) \in \mathrm{dom}(g)$ war) und g' ist ein Keim. Außerdem $S(m) \in \mathrm{dom}(g')$.]
Daraus folgt $Z = \mathbb{N}$. Sei $\varphi(n, m)$ die Formel: $\exists g$ [g ist Keim und $n \in \mathrm{dom}(g)$ und $m = g(n)$]. Dann definiere

$$G(n, m) := \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \varphi(n, m)\}.$$ □

Bemerkung 1. Es gibt kompliziertere Varianten dieses Satzes, z.B. $f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$G(S(n)) = f(n, G(n)) \text{ oder}$$
$$G(S(S(n))) = f(G(n), G(S(n))).$$

Alle diese Varianten werden durch den gleichen Beweis bewiesen.

2. Genauso: Falls X eine beliebige Menge ist $f \colon X \longrightarrow X$ und $x_0 \in X$, dann existiert eine eindeutige Abbildung $G \colon \mathbb{N} \longrightarrow X$ mit $G(\emptyset) = x_0$ und $G(S(n)) = f(G(n))$. Am Schluss des Beweises wird nun aus $\mathbb{N} \times X$ ausgesondert.

Mit Rekursion definieren wir nun: Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Setze $\mathrm{plus}_n(\emptyset) := n$ und $\mathrm{plus}_n(S(m)) := S(\mathrm{plus}_n(m))$ (wir stellen uns plus vor wie „zu n hinzuaddieren“). Für jedes n ist $\mathrm{plus}_n \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Definiere

$$n + m := \mathrm{plus}_n(m).$$

Genauso: Definiere $\mathrm{mal}_n(\emptyset) := \emptyset$ und $\mathrm{mal}_n(S(m)) := \mathrm{plus}_n(\mathrm{mal}_n(m))$. Für jedes n ist $\mathrm{mal}_n \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Funktion. Definiere daher

$$n \cdot m := \mathrm{mal}_n(m).$$

Eigenschaften Betrachte etwa folgende Sätze: $\forall n\; n + \emptyset = n$ und $\forall n\; \emptyset + n = n$. Dabei folgt die erste Aussage direkt aus der Definition, allerdings nicht der Zweite. Zum Beweis: Betrachte $Z = \{n \in \mathbb{N} \mid \emptyset + n = n\}$. Dann gilt $\emptyset + \emptyset = \emptyset$, also $\emptyset \in Z$ und falls $n \in Z$ gilt $\emptyset + S(n) = S(\emptyset + n) = S(n)$. Daraus folgt $S(n) \in Z$. Daher ist Z induktiv und die Aussage ist bewiesen.

Definition (Symbole der nat. Zahlen) Definiere:

$$\begin{aligned} 0 &:= \emptyset \\ 1 &:= \{\emptyset\} = \{0\} \\ 2 &:= 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 &:= 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}. \end{aligned}$$

In FST konnten wir Strukturen auf Mengen definieren: „(X, R) ist eine partielle Ordnung.“
In FST + (Unend) =: Z (Zermelo-Mengenlehre) können wir ausdrücken:

$$\begin{array}{rr} (\mathbb{N}, <) \text{ ist eine strikte totale Ordnung.} & n < m :\iff n \in m. \\ (\mathbb{N}, +, 0) \text{ ist ein abelsches Monoid.} & \text{Siehe ÜA (35).} \end{array}$$

Aus letzterem können wir auch $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ in einem Modell von Z konstruieren.

Definition (Endlichkeit) Eine Menge x heißt endlich, falls $n \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\mathrm{Bij}(x, n) \neq \emptyset.$$

Definition (Gleichmächtigkeit) Bezeichne mit $X \sim Y$ die Aussage „X und Y sind gleichmächtig“. Definiere (nach Cantor)

$$X \sim Y :\iff \mathrm{Bij}(X, Y) \neq \emptyset.$$

Bezeichne mit $X \preccurlyeq Y$ die Aussage „X ist höchstens so mächtig wie Y“. Definiere

$$X \preccurlyeq Y :\iff \mathrm{Inj}(X, Y) \neq \emptyset.$$

Bezeichne mit $X \prec Y$ die Aussage „X ist kleiner als Y“. Definiere

$$X \prec Y :\iff X \preccurlyeq Y \text{ und } X \not\sim Y.$$

Definition (Unendlichkeit, Abzählbarkeit) Eine Menge X heißt unendlich, falls sie nicht endlich ist. Ferner heißt eine Menge X abzählbar, falls $X \preccurlyeq \mathbb{N}$ (d.h. insbesondere, falls X endlich ist) und X heißt überabzählbar, falls sie nicht abzählbar ist.

Theorem 2.12 (Satz von Cantor, FST) Für alle X gilt

$$X \prec \mathcal{P}(X).$$

Beweis. Es gilt, dass $x \mapsto \{x\}$ eine Injektion von X nach $\mathcal{P}(X)$ ist, also gilt $X \preccurlyeq \mathcal{P}(X)$. Wir werden zeigen: Falls $f\colon X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, so ist f keine Surjektion. Definiere $D \subseteq X$ durch

$$D := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

Die Menge D existiert nach (Aus).

Behauptung. Es gilt $D \notin \mathrm{ran}(f)$.

Angenommen es existiert $d \in X$ mit $f(d) = D$. Dann gilt: $d \in D$ genau dann wenn $d \in f(d)$., aber $d \in D$ bedeutet, dass $d \notin f(d)$. Dies ist ein Widerspruch. □

Korollar 2.13 In Z können wir beweisen, dass überabzählbare Mengen existieren. Wir erhalten sogar
$$N \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) \prec \dots$$

Erinnerung X heißt Dedekind-unendlich, falls $Y \subsetneq X$ existiert mit $\mathrm{Bij}(X,Y) \neq \emptyset$. $\mathbb{N}$ erfüllt dies etwa wegen $Y := \mathbb{N} \setminus \{\emptyset\}$ dann ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to Y$ mit $x \mapsto x+1$ eine Bijektion von $\mathbb{N}$ nach Y.

Theorem 2.14 $\mathbb{N}$ ist unendlich.

Beweis. Zu widerlegen ist: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $n \longrightarrow \mathbb{N}$.
Zu zeigen durch Induktion: Falls $f\colon n \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Funktion ist, so existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ran}(f) \subseteq k$. Dies genügt zu zeigen, denn so folgt, dass es keine Surjektion von $n \in \mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$ geben kann.
Induktion nach n. Für $n = 0$ bedeutet $f\colon n \to \mathbb{N}$, dass $\mathrm{dom}(f) = \emptyset$, also $f = \emptyset \subseteq \emptyset = 0$. Angenommen, die Behauptung gelte für n. Sei $f\colon n+1 \longrightarrow \mathbb{N}$. Dann ist $n+1 = S(n) = n \cup \{n\}$ und wir können schreiben: $f|_n\colon n \longrightarrow \mathbb{N}$ für die Einschränkung auf n. Dann ist
$$f = f|_n \cup \{(n,k')\} \text{ für ein } k' \in \mathbb{N}.$$
Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ran}(f|_n) \subseteq k$. Fall 1: $k' \in k$. Dann ist $\mathrm{ran}(f) = \mathrm{ran}(f|_n) \cup \{k'\} \subseteq \{k\}$. Fall 2: $k' \notin k$. Dann gilt $k \in k'$ oder $k = k'$. Wegen Transitivität ist in jedem Fall $k \subseteq k'$. Daher gilt wegen $\mathrm{ran}(f|_n) \subseteq k \subseteq k'$, dass $\mathrm{ran}(f) \subseteq k'+1$. □

Zusammenfassend. In Z (Zermelo-Mengenlehre) können wir beweisen, dass es unendliche, abzählbare und überabzählbare Mengen gibt.
Genauso: Es gibt überabzählbare Mengen unterschiedlicher Kardinalität: $\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$.
Man beachte, es existiert jeweils eine Surjektion von $\mathcal{P}(X)$ auf X (für $X \neq \emptyset$) durch
$$s\colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow X, z \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } z = \{x\} \\ x_0, & \text{sonst} \end{cases}$$
für ein $x_0 \in X$. Das heißt, falls eine Surjektion s' von z.B. X auf $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ existiert, so könnte man mit $s \circ s'\colon X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ eine Surjektion definieren. Dies steht im Widerspruch zu Cantors Theorem.
Nun führen wir das Ersetzungsaxiom(-enschema) ein.

4 Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre

Definition (Ersetzungsaxiom) Wir nennen eine Formel Φ mit $n+2$ freien Variablen funktional[2], falls für alle $x_1, \dots, x_n$ und alle x, y, y' gilt:
$$\Phi(x,y,x_1,\dots,x_n) \wedge \Phi(x,y',x_1,\dots,x_n) \to y = y'.$$
Definiere nun folgendes Axiom(-enschema) für eine funktionale Formel Φ:
$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall X \exists r\, \forall z (z \in r \iff \exists x (x \in X \wedge \Phi(x,z,x_1,\dots,x_n))) \tag{Ers_Φ}$$
In Worten: Für jede Menge X gibt es eine Menge von Bildwerten der durch Φ definierten „Funktion“.

[2] Diese Definition entspricht dem typischen Funktionsbegriff. Funktionen wurden allerdings noch nicht definiert und wir möchten sie im Folgenden aus diesen Überlegungen definieren können.

(Ers$_\Phi$) impliziert unmittelbar, dass es eine Funktion $f\colon X \to r$ gibt mit $f(x) = z \iff \Phi(x, z, x_1, \ldots, x_n)$, falls $\forall x \exists y \Phi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$. Beweis durch Aussonderung aus $X \times r$. Beachte: Falls die zusätzliche Bedingung jedoch nicht gilt, können wir alle x für die kein solches y existiert auf „irgendwas“ abbilden, was die Funktionalität erhält.
Woher kommt der Name dieses Axioms? Schreiben wir z. B. $F(x) = y$ für $\Phi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$. Dann ist das r aus dem Axiom

$$r = \{F(x) \mid x \in X\}$$

in der üblichen Notation der Mathematik.

Theorem 2.15 (Rekursionssatz, stärkere Version) Sei Φ eine funktionale Formel mit

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall x \exists y \Phi(x, y, x_1, \ldots, x_n).$$

Sei x_0 beliebig und schreibe $F(x)$ für das eindeutig bestimmte y mit $\Phi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Funktion G mit $\mathrm{dom}(G) = \mathbb{N}$ und

$$G(0) = x_0 \text{ und}$$
$$G(n+1) = F(G(n)).$$

Beweisskizze. Wie zuvor definieren wir Keime und beweisen

1. für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein Keim g mit $n \in \mathrm{dom}(g)$ und
2. falls g, g' Keime und $n \in \mathrm{dom}(g) \cap \mathrm{dom}(g')$, dann $g(n) = g'(n)$.

Genauso wie vorher:

$$\Phi(n, y) \iff \text{es existiert Keim } g \text{ mit } n \in \mathrm{dom}(g) \text{ und } y = g(n).$$

Dann ist Φ funktional nach 2., also können wir (Ers$_\Phi$) anwenden und erhalten r, welches alle Werte von Keimen enthält. Sondere mit Φ aus $\mathbb{N} \times r$ aus.
Das derzeitige Axiomensystem

$$\mathbf{ZF_0} := \mathbf{Z} + (\mathrm{Ers})$$

heißt Zermelo-Fraenkel. Zwei Axiomen fehlen noch: Auswahl und Fundierung. Ersteres erhält später ein eigenes Kapitel. Die Fundierung folgt daher als nächstes.

5 Wohlordnungen und Ordinalzahlen

Definition (Ordnungen) $(P, \leq)$ heißt partielle Ordnung, falls $\leq$ transitiv, reflexiv und antisymmetrisch ist. Ferner heißt $\leq$ totale/ lineare Ordnung, falls $\leq$ total, d.h. für bel. x, y gilt stets $x \leq y$ oder $y \leq x$.

$(L, \leq)$ Eine totale Ordnung heißt dicht, falls

$$\forall x \forall y (x < y \iff \exists z (x < z < y)).$$

Eine totale Ordnung heißt diskret, falls

$$\forall x \exists p \exists s\, (p < x < s \land \forall y\, ((p \leq y \leq x \to p = y \lor y = x) \land (x \leq y \leq s \to x = y \lor y = s))).$$

Auf $\mathbb{N}$ haben wir eine Ordnung definiert:

$$n < m :\iff n \in m \Rightarrow n \subseteq m.$$

Also $n \leq m \iff n \subseteq m$. [Zu beweisen: $n \subseteq m \Rightarrow n \leq m$. Nach ÜA gilt $n \in m$ oder $n = m$ oder $m \in n$. Letzteres führt zum Widerspruch $m \in m$ wegen $m \in n \subseteq m$. Den Rest prüft man leicht.]
Was ist das Verhältnis zwischen n und $S(n)$? Klar: $n \in S(n) \Rightarrow n < S(n)$. Angenommen $n \leq m \leq S(n)$. Es gilt $n \in m$ oder $n = m$ oder $m \in n$. Im ersten Fall ist $n \in m$ und $\subseteq m$ und daher $m = S(n)$. In den anderen beiden Fällen ist $m \leq n$ und daher $m \subseteq S(n) = n \cup \{n\}$. Daraus folgt ebenfalls $n \in m$ und $n \subseteq m$.
Wir hätten gerne: falls $Z \subseteq \mathbb{N}$ mit $Z \neq \emptyset$, dann existiert ein minimales Element von Z. (Prinzip der kleisnten Zahl).

Beweis. Definiere $\hat{Z} := \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \text{ mit } m \leq n : m \notin Z\}$. Angenommen Z hat kein minimales Element. Dann ist $\hat{Z}$ eine induktive Menge. Daraus folgt, dass $\mathbb{N} = \hat{Z}$ und daher $Z = \emptyset$. Diese Behauptung zeigen wir nun:
Falls $0 \notin \hat{Z}$, dann ist $0 \in Z$. Also hat Z ein minimales Element und daher $0 \in \hat{Z}$. Angenommen $n \in \hat{Z}$. Das heißt $\forall m \leq n(m \notin Z)$. Wäre $S(n) \notin \hat{Z}$: Dann existiert $m \leq S(n)$, wobei $m \in Z$: $\exists m < S(n), m \in Z$ oder $S(n) \in Z$. Ersteres widerspricht Ind. Vor. Also ist $S(n) \in Z$. Behauptung: Dies ist minimal. (Folgt direkt aus Diskretheit.) □

Definition (Prinzip des kleinsten Elements) Sei $(P, \leq)$ eine partielle Ordnung. Wir sagen P erfüllt das Prinzip des kleinsten Elements oder P ist fundiert, g.d.w. für jede Teilmenge $X \subseteq P$ mit $X \neq \emptyset$ existiert ein $\leq$-minimales Element.
Dabei heißt $p \in X$ $\leq$-minimal in X, falls

$$\forall x \in X \ (x \not< p).$$

Üblicherweise heißt $p \in X$ $\leq$-kleinstes Element, falls

$$\forall x \in X \ (p \leq x).$$

Falls $(P, \leq)$ eine totale Ordnung ist, so ist jedes $\leq$-minimales Element von X ein $\leq$-kleinstes Element von X.

Definition Falls $(P, \leq)$ eine totale fundierte Ordnung ist, so nennen wir $(P, \leq)$ eine Wohlordnung. (Beachte im Englischen: Wohlordnung ist ‚Wellordering' und fundiert ist ‚well-founded').

Beispiel (Wohlordnungen und keine Wohlordnungen)

1. $(\mathbb{N}, \leq)$ sind eine Wohlordnung.
2. Falls $(W, \leq)$ eine Wohlordnung und $W' \subseteq W$, so ist $(W', \leq)$ auch eine Wohlordnung.
3. Also sind $(n, \leq)$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Wohlordnung.
4. $(\mathbb{Z}, \leq)$ ist keine Wohlordnung. Denn $\mathbb{Z}$ hat kein kleinstes Element.
5. $(\mathbb{Q}_0^+, \leq)$ mit $\mathbb{Q}_0^+ := \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 0\}$ hat ein kleinstes Element. Aber es ist keine Wohlordnung, da z. B. $\mathbb{Q}^+$ kein kleinstes Element besitzt.
6. Sei $(D, \leq)$ eine dichte lineare Ordnung mit $|D| \geq 2$. Dann seien $d_0 < d_1$ Elemente von D und somit hat $\{d \in D \mid d_0 < d\}$ kein kleinstes Element enthält.

7. Sei ∞ ein Objekt $\notin \mathbb{N}$. Betrachte $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Wir definieren
$$x \leq y :\Longleftrightarrow \begin{cases} x \leq y, & \text{falls } x, y \in \mathbb{N} \\ y = \infty & \text{sonst} \end{cases}$$
Sei nun $X \subseteq \overline{\mathbb{N}}$ mit $X \neq \emptyset$. Fall 1: $X \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$. Nach dem PKZ in $\mathbb{N}$ existiert ein $n_0 \in X \cap \mathbb{N}$ minimal. Dies ist auch minimal in X. Fall 2: $X \cap \mathbb{N} = \emptyset$. Dann ist $X = \{\infty\}$. Also ist ∞ das kleinste Element von X.

8. Im Allgemeinen gibt es eine Summenoperation von totalen Ordnungen. $(L_1, \leq_1)$, $(L_2, \leq_2)$. Bilde $(L_1, \leq_1) \oplus (L_2, \leq_2)$ als disjunkte Vereinigung von L_1 und L_2 mit der Ordnung, die auf L_i mit $\leq_i$ übereinstimmt und alle Elemente von L_1 vor alle Elemente von L_2 stellt. Übungsaufgabe: Falls $(L_1, \leq_1)$ und $(L_2, \leq_2)$ Wohlordnungen, so auch $(L_1, \leq_1) \oplus (L_2, \leq_2)$.

9. Wir schreiben $\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ und definieren $\sqsubseteq$ auf $\mathbb{N}$
$$n \sqsubseteq m :\Longleftrightarrow \begin{cases} n \leq m & n, m \in E \\ n \leq m & n, m \in O \\ n \in E \text{ und } m \in o \end{cases}$$
Das heißt die geraden Zahlen sind kleiner als alle ungeraden Zahlen. Es ergibt sich also die Reihenfolge
$$0\,2\,4\,6\,8\,10\,\ldots\,1\,3\,5\,7\,9\,\ldots$$
Dies ist nicht isomorph zu $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N} \oplus 1$. Beweis aus Übungsaufgabe: $\mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$ ist isomorph zu $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$ und somit ist dies eine Wohlordnung.

Definition Ist $(L, \leq)$ eine totale Ordnung, so nennen wir $I \subseteq L$ ein Anfangssegment von L, falls gilt $\forall x \forall y\ x \in I$ und $y \leq x$, dann $y \in I$. Ferner heißt ein Anfangssegment echt, falls $I \neq L$.

Falls $x \in L$, so ist
$$I_x := \{y \in L \mid y < x\}$$
ein Anfangssegment und es ist echt, da $x \notin I_x$.

Lemma 2.4 Falls $(W, \leq)$ eine Wohlordnung ist, so gilt für jedes Anfangssegment I: I ist echt g.d.w. es existiert $x \in W (I = I_x)$.

Bemerkung Im Allgemeinen (ohne Wohlordnung) gilt vorherige Aussage nicht: Für $(\mathbb{Q}, \leq)$ betrachte $I := \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0\}$. Dies ist offensichtlich ein echtes Anfangssegment. Aber falls $I \subseteq I_x$ für irgendein x, dann ist $x > 0$ und somit $\frac{x}{2} \in I_x$, aber $\frac{x}{2} > 0$ und somit $\frac{x}{2} \notin I$.

Beweis. (Lemma) „$\Leftarrow$“ ist klar.
„$\Rightarrow$“: Sei I echtes Anfangssegment. Also ist $W \setminus I \neq \emptyset$. Verwende die Wohlordnung, um das kleinste $x \in W \setminus I$ zu finden. Dann ist $I_x \subseteq I \subseteq I_x$ und daher $I = I_x$. □

Theorem 2.16 (Induktion für Wohlordnungen) Sei $(W, \leq)$ eine Wohlordnung und $Z \subseteq W$ mit der Eigenschaft
$$\forall x\, (I_x \subseteq Z \to x \in Z)$$
Dann gilt $Z = W$.

Beweis. Angenommen Z hat die Eigenschaft, aber $Z \subsetneq W$. Dann $W \setminus Z \neq \emptyset$. Nach Wohlordnung existiert $x \in W \setminus Z$ minimal. Das heißt $I_x \subseteq Z$. Nach Vor. $x \in Z$. Dies ist ein Widerspruch. □

Definition Sei $(W, \leq)$ eine Wohlordnung und X eine beliebige Menge. Dann definiere

$$\mathbf{ASF}(X) := \{f \in \mathrm{Rel}(W, X) \mid \exists w \in W, \mathrm{dom}(f) = I_w \text{ und } \mathrm{ran}(f) \subseteq X\}$$

ausgesondert aus $\mathrm{Rel}(W, X)$.

Theorem 2.17 (Rekursionstheorem für Wohlordnungen) Sei $(W, \leq)$ eine Wohlordnung und sei

$$f \colon \mathbf{ASF}(X) \longrightarrow X.$$

Dann existiert eine eindeutige Funktion $G \colon W \longrightarrow X$ mit

$$G(x) = f(G|_{I_x}).$$

Beweis. Wie zuvor: f-Keim ist eine Funktion $g \in \mathbf{ASF}(X)$ mit $g(x) = f(g|_{I_x})$ für alle $x \in \mathrm{dom}(g)$.
Wie zuvor: Falls g, g' Keime, $x \in \mathrm{dom}(g) \cap \mathrm{dom}(g')$, so gilt $g(x) = g'(x)$.
Nun: Für jedes $x \in W$ existiert g Keim mit $x \in$dom(g). Angenommen die Behauptung gilt nicht, sei x minimal, so dass kein Keim existiert mit $x \in \mathrm{dom}(g)$. Für jedes $y \in I_x$ existiert ein Keim g_y mit $y \in \mathrm{dom}(g_y)$. Nach Eindeutigkeit gilt für $z \in \mathrm{dom}(g_y) \cap$ dom$(g_{y'})$, dass $g_y(z) = g_{y'}(z)$. Also ist

$$g := \bigcup_{y \in I_x} g_y$$

ein Keim mit $\mathrm{dom}(g) \supseteq I_x$. Also ist $g^* := g \cup \{(x, f(g|_{I_x}))\}$ ein Keim mit $x \in$dom(g^*). Setze nun $G(x) = y$ g.d.w. es existiert Keim g mit $x \in$dom(g) und $g(x) = y$. □

Bemerkung Dieser Beweis mit fest vorgegebenem X funktioniert in Z, das heißt ohne (Ers). Wie auf $\mathbb{N}$ können wir in $\mathbf{ZF_0}$ (also mit (Ers)) eine Version formulieren, bei der X nicht vorher feststeht und f durch eine funktionale Formel gegeben ist.

Lemma 2.5 Falls $(L, \leq)$ eine totale Ordnung und $(P, \leq)$ eine partielle Ordnung sind, dann ist eine injektive und ordnungserhaltende Funktion (das heißt $\forall x, y x \leq y \rightarrow f(x) \leq f(y)$)

$$f \colon L \longrightarrow P$$

ein Isomorphismus zwischen $(L, \leq)$ und $(\mathrm{ran}(f), \leq)$.

Beweis. Recht einfach. □

Lemma 2.6 Falls $(W, \leq)$ eine Wohlordnung und $f \colon W \longrightarrow W$ ordnungserhaltend sind, so gilt $f(x) \geq x$ für alle $x \in W$.

Beweis. Angenommen die Aussage gilt nicht, dann existiert ein kleinstes x_0 mit $f(x_0) < x_0$. Wende f auf diese Ungleichung an und erhalten wegen der Ordnungserhaltung, dass $f(f(x_0)) < f(x_0)$. Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von x_0. □

Lemma 2.7 Falls $(W, \leq)$ Wohlordnung und f ein Automorphismus von $(W, \leq)$ ist, so ist $f = \mathrm{id}$.

Beweis. Folgt aus Lemma 2.6, da f und f^{-1} beide ordnungserhaltend sind, also $f(x) \geq x$ und $f^{-1}(x) \geq x$. Daraus folgt $f(x) = x$. □

Lemma 2.8 Falls $(W, \leq)$, $(W', \leq)$ Wohlordnungen und f, f' zwei Isomorphismen zwischen $(W, \leq)$ und $(W', \leq)$. Dann gilt $f = f'$.

Beweis. Beachte, dass $(f')^{-1} \circ f \colon W \longrightarrow W$ ein Automorphismus ist. Daher folgt nach Lemma 3, dass $(f')^{-1} \circ f = \mathrm{id}$. Also ist $f' = f$. □

Korollar 2.18 Keine Wohlordnung ist isomorph zu einem echten Anfangssegment von ihr selbst.

Beweis. Angenommen $f \colon W \longrightarrow I_x$ ist ein Isomorphismus. Dann ist $f \colon W \longrightarrow W$ ordnungserhaltend und $f(x) = x \notin I_x$. □

Theorem 2.19 (Hauptsatz der Wohlordnungen) Es seien W_1 und W_2 Wohlordnungen. Dann gilt

(1) $W_1 \cong W_2$ oder

(2) $W_1 \cong I_x$ für $x \in W_2$ oder

(3) $W_2 \cong I_y$ für $y \in W_1$.

Korollar 2.20 Bis auf Isomorphie sind Wohlordnungen total geordnet (bzw. sogar wohlgeordnet).

Man könnte daher $([W]_{\cong}, \leq)$ definieren durch $[W] \leq [W']$ g.d.w. Fall (2) aus dem Hauptsatz der Wohlordnungen gilt. Das wäre allerdings eine Klassen-Wohlordnung von echten Klassen (?) Dies ist ein Problem, daher:
Stattdessen: Wähle auf eine kanonische Weise Repräsentanten aus jeder $[W]_{\cong}$. In der Mengenlehre haben wir bereits die $\in$-Relation verwendet. Achtung: An sich ist $\in$ gar nicht transitiv oder total.

Definition Eine <u>Ordinalzahl</u> ist eine Menge α, so dass:

(1) α ist transitiv und

(2) $(\alpha, \in)$ ist eine Wohlordnung.

Beachte: Wenn das Fundierungsaxiom gilt, reicht es bereits, dass $(\alpha, \in)$ total und transitiv ist. Gibt es überhaupt Ordinalzahlen? Wir kennen bereits $\mathbb{N}$, wobei $0 = \emptyset$ und $n + 1 = \{0, \ldots, n\}$. Für $\mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} n < m &\iff n \in m \iff n \subsetneq m \\ n \leq m &\iff n \subseteq m. \end{aligned}$$

Daher ist $(\mathbb{N}, \in)$ und jede $(n, \in)$ sind Ordinalzahlen. Wir hatten definiert, dass $n+1 = n \cup \{n\}$. Schreibe $\mathbb{N} = \omega$. Setze nun

$$\begin{aligned} \omega + 1 &:= \omega \cup \{\omega\} \\ \omega + 2 &:= (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\} \\ &\vdots \\ \omega + n &:= \{0, 1, \ldots\} \cup \{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + n - 1\} \\ &\vdots \\ \omega + \omega &:= \{0, 1, \ldots\} \cup \{\omega, \omega + 1, \ldots\} \end{aligned}$$

Lemma 2.9 Es seien α und β Ordinalzahlen (schreibe hierfür $\alpha, \beta \in \mathrm{Oz}$). Dann gelten folgende Aussagen

(a) $\alpha \notin \alpha$.

(b) $\beta \in \alpha \Rightarrow \beta \in \mathrm{Oz}$.

(c) $\alpha \cap \beta \in \mathrm{Oz}$.

(d) $\alpha \in \beta \iff \alpha \subseteq \beta \wedge \alpha \neq \beta$.

(e) $\alpha \subseteq \beta$ oder $\beta \subseteq \alpha$.

Beweis. (a) Wenn Fundierung gilt, dann klar. Sonst: $\alpha \in \alpha \Rightarrow$ „$\alpha \in \alpha$“ widerspricht „$(\alpha, \in)$ ist Wohlordnung“.

(b) Transitivität: $\delta \in \gamma \in \beta \Rightarrow$ Da $\{\delta, \gamma, \beta\} \subseteq \alpha$, und $(\alpha, \in)$ Wohlordnung. Daraus folgt, dass $\delta \in \beta$.

Wohlordnung: Es reicht z.z., dass $\beta \subseteq \alpha$. Aber sei $\gamma \in \beta$. Dann $\gamma \in \beta \in \alpha$ und daher $\gamma \in \alpha$. Darum $\beta \subseteq \alpha$.

(c) Einfach

(d) $\alpha \in \beta$ Dann $\alpha \neq \beta$ wegen (a) und $\alpha \subseteq \beta$ wie zuvor bei (b). Sei nun $\alpha \subseteq \beta$, $\alpha \neq \beta$. Sei γ das Kleinste in $\beta \setminus \alpha$. Dann $I_\alpha = \{\delta \mid \delta \in \gamma\} = \{\delta \mid \delta \in \alpha\}$. Daraus folgt, dass $\gamma = \alpha \in \beta$.

(e) Sei $\gamma = \alpha \cap \beta$, $\gamma \in \mathrm{Oz}$ wegen (c) ist $\gamma \subseteq \alpha$ und $\gamma \subseteq \beta$. Wenn $\gamma \neq \alpha$ und $\gamma \neq \beta$ dann folgt (jeweils) aus (d), dass $\gamma \in \alpha$ und $\gamma \in \beta$. Daher ist insgesamt $\gamma \in (\alpha \cap \beta) = \gamma$. Daher $\gamma \in \gamma$. Widerspruch nach (a)! □

Definition Seien $\alpha, \beta \in \mathrm{Oz}$. Dann ist $\alpha < \beta$ g.d.w. $\alpha \in \beta$. Ferner

$$\begin{aligned} \alpha < \beta &\iff \alpha \in \beta \iff \alpha \subsetneqq \beta \\ \alpha \leq \beta &\iff \alpha \subseteq \beta. \end{aligned}$$

Ebenso ist

$$\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}.$$

Definition (Klassen) Eine Klasse ist eine Formel Φ, z. B.

$$\underbrace{X}_{\text{Klasse}} := \{x \mid \underbrace{\Phi(x)}_{\text{Formel}}\}.$$

Klassen können Mengen sein. Es gibt auch echte Klassen, z.B. $V = \{x \mid 1 = 1\}$ oder $V \setminus \{2019\} = \{x \mid x \neq 2019\}$. Es beschreibt daher alles, was sich mittels einer Formel beschreiben lässt. Man kann schreiben: $x \in X$ und ebenso $X \subseteq Y$ wegen $\forall z(\Phi(x) \to \Psi(x))$, falls Φ die Klasse X und Ψ die Klasse Y beschreibt. Aber man kann nicht so etwas schreiben wie $X \in \ldots$.

Lemma 2.10 $(\mathrm{Oz}, <)$ ist eine (Klassen-)Wohlordnung.

Beweis. Klar. □

Lemma 2.11 Sei α eine Ordinalzahl, dann ist $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ die kleinste Ordinalzahl $> \alpha$.

Beweis. Sei $\beta > \alpha$, dann ist $\alpha \in \beta$ und $\alpha \subseteq \beta$. Daher ist $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$ und daher $\alpha + 1 \leq \beta$.□

Definition (Nachfolgerordinalzahlen) $\alpha + 1$ heißt die Nachfolgerordinalzahl von α. Bzw.: α ist eine Nachfolgerordinalzahl, falls eine Ordinalzahl β existiert mit $\alpha = \beta + 1$. Sonst heißt α Limesordinalzahl. [Manchmal: 0 als Sonderfall]

Lemma 2.12 Sei $C \subseteq \mathrm{Oz}$. Dann sind sowohl $\bigcup C$ als auch $\bigcap C$ Ordinalzahlen und es gilt $\bigcap C \in C$ sowie

$$\begin{aligned} \bigcup C &= \sup(C), \\ \bigcap C &= \inf(C). \end{aligned}$$

Welche Arten von Ordinalzahlen gibt es?

1. $0 := \emptyset$
2. $\forall \alpha \in \mathrm{Oz}$: $\alpha + 1 \in \mathrm{Oz}$. (Nachfolgerordinalzahl)
3. Limesordinalzahl: λ, so dass $\lambda \neq \alpha + 1$ für alle $\alpha \in \mathrm{Oz}$.

Bemerkung Wenn λ Limesordinalzahl $\forall \alpha < \lambda\ \exists \beta$, so dass $\alpha < \beta < \lambda$.

Ferner ist $(\alpha, \in) \cong (\beta, \in)$, dann folgt $\alpha = \beta$. Denn sonst wäre z. B. $\alpha \cong$ echtem Anfangssegment von sich selbst. □

Theorem 2.21 (Hauptsatz von Ordinalzahlen) Jede Wohlordnung $(W, \leq)$ ist isomorph zu einer eindeutigen Ordinalzahl α.

Beweis. Eindeutigkeit folgt direkt aus vorheriger Bemerkung. Zur Existenz: $\forall x \in W$ sei x gut, wenn $\exists I_x : (I_x, \leq) \cong \alpha_x$. Sonst ist x schlecht. Klar ist: x gut $\Rightarrow \forall y < x : y$ ist gut. Wir wollen zeigen, dass alle $x \in W$ gut sind.
Angenommen, dies gilt nicht, dann sei $x \in W$ die kleinste schlechte Ordinalzahl. Dann existiert $\forall y < x$ ein $\alpha_y \in \mathrm{Oz}$, s.d. $I_y \cong \alpha_y$. Daraus folgt, dass $x \cong \{\alpha_y \mid y < x\} \subseteq$ Anfangssegment in Oz. Daher ist $\{\alpha_y \mid y < x\} \in \mathrm{Oz}$. Damit ist der Beweis der (Zwischen-)Behauptung beendet, da jede nach unten abgeschlossene Menge $X \subseteq \mathrm{Oz}$ eine Ordinalzahl ist.
Somit sind alle $x \in W$ gut und $W \cong \{\alpha_x \mid x \in W\}$ das ist aber wieder ein Anfangssegment. $\Rightarrow$ $W \cong \gamma \in \mathrm{Oz}$. □

Definition (Ordnungstyp) Solche $\alpha \cong W$ nennen wir Ordnungstyp von W. Wir schreiben auch $\alpha = \mathrm{o.t}(W)$.

Korollar 2.22 Die Ordinalzahlen Oz bilden keine Menge.

Beweis. Sonst wäre $(\mathrm{Oz}, <) \cong (\alpha, \in) \Rightarrow \alpha \in \mathrm{Oz} \Rightarrow \alpha = \mathrm{Oz} \Rightarrow \alpha \in \alpha$. Dies ist ein Widerspruch. □

Theorem 2.23 (Hartog) Es gibt überabzählbare Ordinalzahlen.

Beweis. Falls das Auswahlaxiom gilt: Sei $(\mathbb{R}, \trianglelefteq)$ eine Wohlordnung von $\mathbb{R}$. Dann ist $(\mathbb{R}, \trianglelefteq) \cong (\alpha, \in)$ dann ist $\alpha \in$ Oz überabzählbar.
Ohne Auswahlaxiom: Sei $WO_{\text{abz}} := \{(W, R) \mid W \subseteq \mathbb{N}$ Wohlordnung, $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$. Sei $\Gamma := \{\alpha \in \text{Oz} \mid \alpha$ abzählbar$\}$ Wenn Γ eine Menge ist, dann $\Gamma \in$ Oz. Aber dann ist Γ überabzählbar, denn sonst $\Gamma \in \Gamma$. Daher genügt es zu zeigen, dass Γ eine Menge ist. Definiere dazu $F\colon WO_{\text{abz}} \longrightarrow \Gamma$, $(W, R) \mapsto \text{o.t}(W, R)$. Behauptung: F ist surjektiv.
Sei α abzählbare Ordinalzahl. Dann ist $\alpha \cong \mathbb{N}$. Sei i ein Isomorphismus $\alpha \longrightarrow \mathbb{N}$. Definiere R durch $mRn :\iff i^{-1}(m) \in i^{-1}(n)$. Dann ist $(\alpha, \in) \cong (\mathbb{N}, R)$. Daher ist $F(\mathbb{N}, R) = \alpha$. □
Da $WO_{\text{abz}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, ist WO_{abz} eine Menge. Nach (Ers) ist $\Gamma = F[WO_{\text{abz}}]$ auch eine Menge. Dieses Γ ist W_1. □

Zusammenfassung Wohlordnungen. Ist $(W, <)$ eine strikte, totale Ordnung und fundiert, so heißt sie Wohlordnung. Darüber wissen wir bisher, dass

- Induktion und Rekursion auf Wohlordnungen möglich.
- Ein echtes Anfangssegment ist von der Form I_x für ein $x \in W$.
- Isomorphismen zwischen Wohlordnungen sind eindeutig.
- Keine Wohlordnung ist isomorph zu einem ihrer echten Anfangssegmente.
- Es gibt Ordnungen von Wohlordnungen – etwa:

Die Ordnung $(W, <_W) < (W', <_{W'})$ g.d.w. es existiert $w' \in W'$ mit $(W, <_W) \cong (I_{w'}, <_{W'})$ ist eine Wohlordnung von Wohlordnungen.
Ferner sagt der Hauptsatz von Wohlordnungen: Seien $(W, <_W)$ und $(W', <_{W'})$ Wohlordnungen. Dann gilt (genau) einer der folgenden Fälle:

(1) $(W, <_W) \cong (W', <_{W'})$,

(2) $(W, <_W) < (W', <_{W'})$ oder

(3) $(W', <_{W'}) < (W, <_W)$.

Beachte, dass dies *fast* die Aussage ist, dass $<$ eine totale Ordnung ist: Jedoch nur bis auf Isomorphie.
Wir hätten gerne kanonische Repräsentanten der Isomorphieklassen von Wohlordnungen.

Zusammenfassung Ordinalzahlen. α ist eine Ordinalzahl g.d.w. $(\alpha, \in)$ eine Wohlordnung ist und α transitiv ist.[3]
<u>Eigenschaften von Ordinalzahlen</u>

(1) $\alpha \notin \alpha$.

(2) $\beta \in \alpha \Rightarrow \beta$ Ordinalzahl.

(3) $\alpha \cong \beta \Rightarrow \alpha = \beta$.

(4) $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha \in \beta$ oder $\alpha = \beta$.

[3] Beachte etwa, dass die Menge $2 = \{0, 1\}$ und $\{0, 2\}$ jeweils bezüglich der Relation $\in$ Wohlordnungen bilden, welche sogar isomorph zueinander sind. Jedoch ist $\{0, 1\}$ im Gegensatz zu $\{0, 2\}$ transitiv.

(5) $\alpha \in \beta$ oder $\beta \in \alpha$ oder $\alpha = \beta$. D.h. $<$ ist $\in$ und $\leq$ ist $\subseteq$.
Beispiel: Elemente von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ selbst. Historische Notation: $\omega := \mathbb{N}$.

(6) Transitive Mengen von Ordinalzahlen sind Ordinalzahlen.

[Beweis: Sei X transitive Menge von Ordinalzahlen. Z. z.: $(X, \in)$ ist Wohlordnung. Nach (5) und (1) ist klar: $(X, \in)$ ist totale Ordnung. Es bleibt z. z.: $(X, \in)$ ist fundiert. Sei also $Z \subseteq X$, $Z \neq \emptyset$. Fixiere $\alpha \in Z$. Fall 1: α ist minimal in Z. Dann sind wir fertig. Fall 2: α ist nicht minimal in Z. Das heißt $\alpha \cap Z \neq \emptyset$, wobei $\alpha \cap Z \subseteq \alpha$. Also ist $\alpha \cap Z$ eine nichtleere Teilmenge von α, $(\alpha, \in)$ war eine Wohlordnung. Also hat $\alpha \cap Z$ ein minimales Element μ. Dies ist auch minimal in Z.]

(7) Es gibt keine Menge aller Ordinalzahlen. [Folgt aus (1), (2) und (6)]
Beispiel: Es sei α eine Ordinalzahl, so dass $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$.

(8) Es gibt keine größte Ordinalzahl.

(9) Falls X eine Menge von Ordinalzahlen ist, so ist $\bigcup X$ eine Ordinalzahl. [Folgt aus (6)]

(10) Es gibt eine Menge aller abzählbaren Ordinalzahlen.

[Beweis: Nach dem Satz von Hartog: α abzählbar $\Rightarrow$ Es existiert $f_\alpha \colon \alpha \longrightarrow \mathbb{N}$ injektiv. Betrachte $R_\alpha := \operatorname{ran}(f_\alpha) \subseteq \mathbb{N}$ und definiere $nE_\alpha m$ g.d.w. $f_\alpha^{-1}(n) \in f_\alpha^{-1}(m)$ für $n, m \in R_\alpha$ durch f_α. Es gilt $(R_\alpha, E_\alpha) \cong (\alpha, \in)$. Betrachte nun die Menge(!):

$$\Xi := \{(X, E) \mid X \subseteq \mathbb{N} \text{ und } E \subseteq X \times X\}$$

und definiere F von Ξ in die Ordinalzahlen

$$F((X, E)) := \begin{cases} \alpha, & \text{falls } (X, E) \cong (\alpha, \in) \text{ Ordinalzahl} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

F ist funktional und somit ist der Bildbereich nach (Ers) eine Menge.]

(11) Die Menge ω_1 aller abzählbaren Ordinalzahlen ist transitiv und somit eine Ordinalzahl nach (6). Nach (1) ist ω_1 nicht abzählbar.

(12) Verallgemeinerung: Sei Z eine beliebige Menge. Dann existiert die Menge aller in Z injektiv einbettbaren Ordinalzahlen $\{\alpha \mid \alpha \preccurlyeq Z\}$ und diese ist selbst *nicht* in Z einbettbar.

Definition. Diese Ordinalzahl heißt <u>Hartogs-Aleph von Z</u>:

$$\aleph(Z)$$

Induktion auf Ordinalzahlen: Transfinite Induktion
Angenommen Φ ist eine Formel, so dass

(1) $\Phi(0)$.

(2) $\Phi(\alpha) \Rightarrow \Phi(\alpha + 1)$.

(3) Falls λ Limesordinalzahl und für alle $\xi < \lambda$ gilt $\Phi(\xi)$, dann gilt $\Phi(\lambda)$.

Rekursion auf Ordinalzahlen: Transfinite Rekursion
Angenommen x_0 ist gegeben und Φ_N, Φ_L sind funktionale Formeln. Dann gibt es eine funktionale Formel Ψ. Wir schreiben $F_N(x) = y$, falls $\Phi_N(x, y)$

$$G(\alpha) = \begin{cases} x_0, & \text{falls } \alpha = 0 \\ F_N(G(\beta)), & \text{falls } \alpha = \beta + 1 \\ F_L(G|_\lambda), & \text{falls } \alpha = \lambda \text{ Limesord.} \\ F_L(x) = y, & \text{falls } \Phi_L(x, y) \\ G(x) = y, & \text{falls } \Psi(x, y) \end{cases}$$

Ordinalzahloperationen.
Für Nachfolgeordinalzahlen:

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &:= \alpha \\ \alpha + (\beta + 1) &:= (\alpha + \beta) + 1 \\ \alpha \cdot 0 &:= 0 \\ \alpha \cdot (\beta + 1) &:= \alpha \cdot \beta + \alpha \\ \alpha^0 &:= 1 \\ \alpha^{\beta+1} &:= \alpha^\beta \cdot \alpha \end{aligned}$$

Für λ Limesordinalzahl:

$$\begin{aligned} \alpha + \lambda &:= \bigcup_{\xi<\lambda} \alpha + \xi \\ \alpha \cdot \lambda &:= \bigcup_{\xi<\lambda} \alpha \cdot \xi \\ \alpha^\lambda &:= \bigcup_{\xi<\lambda} \alpha^\xi. \end{aligned}$$

Die Operationen sind keine Funktionen, sondern funktionale Formeln. Im Allgemeinen sind diese nicht kommutativ (!). Betrachte

$$\omega = \mathbb{N} = \bigcup_{\xi<\omega} 1 + \xi \overset{\text{Def.}}{=} 1 + \omega \neq \omega + 1 = S(\omega) = \omega \cup \{\omega\} \cong \mathbb{N} \oplus 1.$$

Ebenso ist $2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$. Denn:

$$\begin{aligned} &\omega \cdot 2 = \omega \cdot (1 + 1) = \omega \cdot 1 + \omega = \omega + \omega > \omega \\ &2 \cdot \omega = \bigcup_{\xi<\omega} 2 \cdot \xi = \omega. \end{aligned}$$

Wobei $\omega + \omega > \omega$ direkt aus $\omega + \omega \cong \mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$ folgt.
Zur Intuition: Die Menge $2 \otimes \mathbb{N}$ entspricht etwa einem Gitter, in jedem jede Zeile zwei Elemente (0,1) besitzt und es für jede natürlich Zahl eine Spalte gibt. Hier gibt es keine Limesordinalzahlen (weil sie sich hintereinander anordnen lassen). Andererseits besitzt ein entsprechendes Gitter zu $\mathbb{N} \otimes 2$ zwei Zeilen mit jeweils unendlich vielen ($\mathbb{N}$) Einträgen (gewissermaßen zwei Kopien von $\mathbb{N}$ übereinander). Hier gibt es Limesordinalzahlen.
Insgesamt gilt die Assoziativität für Ordinalzahlen:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) + \gamma &= \alpha + (\beta + \gamma) \\ (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma &= \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma). \end{aligned}$$

Bemerkung (Zusammenhang zwischen + und $\oplus$ bzw. $\cdot$ und $\otimes$ auf Ordnung) Falls α, β Ordinalzahlen sind, so schreiben wir $\alpha \oplus \beta$ für die eindeutig bestimmte Ordinalzahl,welche isomorph zu $(\alpha, \in) \oplus (\beta, \in)$ ist. Ebenso schreiben wir $\alpha \otimes \beta$ für die eindeutig bestimmte Ordinalzahl, welche isomorph zu $(\alpha, \in) \otimes (\beta, \in)$ ist. Wir werden zeigen, dass für beliebige α, β gilt:

$$\alpha + \beta = \alpha \oplus \beta$$
$$\alpha \cdot \beta = \alpha \otimes \beta.$$

Dabei bezeichnen + und $\cdot$ die rekursiv definierten Operationen und $\oplus$ und $\otimes$ die synthetischen Definitionen.

Beweis. Es gilt $\alpha + \beta = \alpha \oplus \beta$. Wir zeigen dies per Induktion nach β. Wir zeigen eine sogar stärkere Behauptung: Definiere $f_{\alpha,\beta} \colon (\alpha, \in) \oplus (\beta, \in) \to \alpha + \beta$ durch $(0, \xi) \mapsto \xi$ und $(1, \eta) \mapsto \alpha + \eta$. Dann ist $f_{\alpha,\beta}$ ein Isomorphismus zwischen $\alpha \oplus \beta$ und $\alpha + \beta$.
Fall 1: $\beta = 0$. Klar, da $\alpha \oplus 0 \cong \alpha$ und $(0, \xi) \mapsto \xi$.
Fall 2: $\beta = 1$. Dies ist offensichtlich ein Isomorphismus $\alpha \oplus 1 \longrightarrow \alpha + 1$. Es gilt per Def. $(0, \xi) \mapsto \xi$ $(1, 0) \mapsto \alpha + 0 = \alpha$.
Fall 3: $\beta = \gamma + 1$. Ind.Vor.: $f_{\alpha,\gamma}$ ist Isomorphismus. Dann gilt

$$\alpha+\beta = \alpha+(\gamma+1) = (\alpha+\gamma)+1 = (\alpha\oplus\gamma)+1 = (\alpha\oplus\gamma)\oplus 1 = \alpha\oplus(\gamma\oplus 1) = \alpha\oplus(\gamma+1) = \alpha\oplus\beta.$$

Fall 4: β ist Limesordinalzahl. Es gilt

$$\alpha + \beta = \bigcup_{\xi<\beta} \alpha + \xi \overset{\text{Ind.Vor.}}{=} \bigcup_{\xi<\beta} \alpha \oplus \xi$$

Wir geben daher einen Isom. $\alpha \oplus \beta \longrightarrow \bigcup_{\xi<\beta} \alpha \oplus \xi$ durch $(0, \delta) \mapsto \delta$ und $(1, \eta) \mapsto \alpha + \eta$. Dies ist offensichtlich nach Ind.Vor. ein Isomorphismus. Dies beendet den Beweis für + und $\oplus$.
Zu $\alpha \cdot \beta = \alpha \otimes \beta$. Unser Isomorphismus $g_{\alpha,\beta}$ zw. $(\alpha, \in) \otimes (\beta, \in)$ und $\alpha \cdot \beta$ wird sein: $(\xi, \eta) \mapsto \alpha \cdot \eta + \xi$. Wir zeigen somit wieder die stärkere Behauptung: $g_{\alpha,\beta}$ ist ein Isomorphismus zwischen $(\alpha, \in) \otimes (\beta, \in)$ und $(\alpha, \beta, \in)$.
Der Beweis folgt analog zu $+/\oplus$ wie zuvor. Im Fall 3 verwenden wir, dass wir wissen

$$(\alpha, \in) \otimes (\beta + 1, \in) \cong ((\alpha, \in) \otimes (\beta, \in)) \oplus (\alpha, \in).$$

Somit gilt nach Ind.Vor. $\alpha \cdot \beta + \alpha = (\alpha \otimes \beta) \oplus \alpha = (\alpha \otimes \beta) + \alpha$. □

Weitere Eigenschaften. Vorüberlegung: Falls $f \colon \alpha \longrightarrow \beta$ ordnungserhaltend und injektiv, so ist $\beta \geq \alpha$ [Falls nicht: $\beta < \alpha$, also $\beta \in \alpha$ und somit ist $f(\beta) < \beta$ im Wid. zur Aussage, dass ordnungserhaltende Abbildungen nie $f(x) < x$ haben.]

Korollar 2.24 Für alle Ordinalzahlen α, β gilt

$$\alpha + \beta \geq \beta \tag{1}$$
$$\alpha + \beta \geq \alpha \tag{2}$$

Ebenso: Falls $\alpha \leq \beta$, so ist

$$\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma. \tag{3}$$

Etwas Interessanter: Falls $\alpha < \beta$, so gilt

$$\gamma + \alpha < \gamma + \beta. \tag{4}$$

[$\leq$ folgt wie oben]

Beweis. Induktion nach β. Fall 1: $\beta = 0$. Nichts zu zeigen.
Fall 2: $\beta = \delta + 1$. Ind.Vor.: Falls $\alpha < \delta$, so ist $\gamma + \alpha < \gamma + \delta$. Unterfall a: $\alpha < \delta$.

$$\gamma + \alpha \overset{\text{Ind.Vor.}}{<} \gamma + \delta < (\gamma + \delta) + 1 = \gamma + (\delta + 1) = \gamma + \beta.$$

Unterfall b: $\alpha = \delta$.

$$\gamma + \delta < (\gamma + \delta) + 1 = \gamma + \beta.$$

Fall 3: β ist Limesordinalzahl. Ind.Vor.: Für alle $\xi < \beta$ gilt falls $\alpha < \xi$, so ist $\gamma + \alpha < \gamma + \xi$. Sei nun $\alpha < \beta$. Zu zeigen: $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$. Da β Limesord., ist $\alpha + 1 < \beta$. Nach Ind.Vor. ist $\gamma + \alpha < \gamma + (\alpha + 1) \leq \gamma + \beta$. Aber es gilt

$$\gamma + \beta = \bigcup_{\xi < \beta} \gamma + \xi \supseteq \gamma + (\alpha + 1).$$ □

(5) „Subtraktion“: Falls $\alpha \leq \beta$, so existiert ein eindeutiges δ mit $\alpha + \delta = \beta$.

Beweis. $R := \beta \setminus \alpha \subseteq \beta$. Dies ist eine Wohlordnung und somit existiert ein eindeutiges δ mit $(\delta, \in) \cong (R, \in)$. Daher ist

$$(\beta, \in) \cong (\alpha, \in) \oplus (R, \in) \cong (\alpha, \in) \oplus (\delta, \in) \cong (\alpha \oplus \delta, \in) = (\alpha + \delta, \in).$$

□

(6) Dies geht nicht umgekehrt! Das heißt, dass die folgende Aussage *falsch* ist: Falls $\alpha \leq \beta$, so existiert δ mit $\delta + \alpha = \beta$. Denn ein Gegenbeispiel hierzu liefert etwa $\alpha = 1$ und $\beta = \omega$.

(7) „Division mit Rest“: Falls $\alpha > 0$ und γ beliebig, so existiert β und ein $\rho < \alpha$ mit

$$\gamma = \alpha \cdot \beta + \rho.$$

Beweis. Man überlege sich, dass $\alpha \cdot (\gamma + 1) \geq \gamma + 1 > \gamma$. Nach Ind. existiert also eine kleinste Ordinalzahl δ mit $\alpha \cdot \delta > \gamma$. Falls δ eine Limesord. ist und $\xi < \delta$, so ist $\alpha \cdot \xi \leq \gamma$. Dann ist $\alpha \cdot \delta = \bigcup_{\xi < \delta} \alpha \cdot \xi \leq \gamma$. Dies ist ein Widerspruch!

Also ist δ eine Nachfolgerordinalzahl. Z.B. $\delta = \beta + 1$. Also ist $\alpha \cdot \beta \leq \gamma$. Wende Eigenschaft (5) auf $\alpha \cdot \beta$ und γ an und erhalte ρ mit $\alpha \cdot \beta + \rho = \gamma$. Wieder nach Subtraktion $\rho = \alpha\theta$. Es bleibt z.z. $\rho < \alpha$. Es gilt

$$\left.\begin{array}{l} \gamma = \alpha \cdot \beta + \rho \\ \rho = \alpha + \theta \end{array}\right\} \gamma = \alpha \cdot \beta + (\alpha + \theta) = (\alpha \cdot \beta + \alpha) + \theta = (\alpha \cdot (\beta + 1)) + \theta = \alpha \cdot \delta + \theta.$$

Daraus folgt, dass $\alpha \cdot \delta \leq \gamma$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von δ. □

Bemerkung: Das Paar (β, ρ) ist eindeutig mit diesen Eigenschaften.

(8) Auch hier ist die Reihenfolge der Operationen wichtig.

Wann ist $1 + \alpha = \alpha$? Etwa bei $1 + \omega = \omega$ (‚Hilberts Hotel‘). Allerdings gilt $1 + (\omega + 1) = (1 + \omega) + 1 = \omega + 1$ und $1 + (\omega + \delta) = (1 + \omega) + \delta = \omega + \delta$[4].

Korollar 2.25 Es gilt

$$\alpha \in \mathbb{N} \iff 1 + \alpha > \alpha.$$

[4]Jede Ordnung $\gamma \geq \omega$ ist von der Form $\omega + \delta$ für ein geeignetes δ nach Subtraktion.

Gibt es α mit $\omega + \alpha = \alpha$? Nicht $\alpha = \omega$, da $\omega + \omega > \omega$. Definiere Fixpunkt der Operation $\alpha \mapsto \omega + \alpha$.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &:= \alpha \\ \alpha_{i+1} &:= \omega + \alpha_i \\ \alpha_\infty &:= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i \end{aligned}$$

Behauptung: $\omega + \alpha_\infty = \alpha_\infty$. Es gilt

$$\omega + \alpha_\infty = \bigcup_{\xi < \alpha_\infty} \omega + \xi = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \omega + \alpha_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \alpha_{i+1} = \alpha_\infty.$$

6 Kardinalzahlen

Kardinalität (auch: Mächtigkeit) setzt in gewissem Sinne auf natürliche Weise die Überlegungen zu Ordinalzahlen als kanonische Repräsentanten von Wohlordnungen fort.
Im Vergleich von Mächtigkeiten zwischen Mengen hatten wir bereits definiert:

$$\begin{aligned} X \sim Y &\text{ g. d. w. } \exists f\colon X \longrightarrow Y \text{ bij.} \\ X \preccurlyeq Y &\text{ g. d. w. } \exists f\colon X \longrightarrow Y \text{ inj.} \\ X \prec Y &\text{ g. d. w. } X \preccurlyeq Y \text{ und } X \not\sim Y. \end{aligned}$$

Bemerkung Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. Ferner ist $\preccurlyeq$ eine transitive, reflexive und es existiert stets $X \neq Y$ mit $X \preccurlyeq Y$ und $Y \preccurlyeq X$.

Satz 2.26 (Cantor-Schröder-Bernstein) Aus $X \preccurlyeq Y$ und $Y \preccurlyeq X$ folgt, dass $X \sim Y$.

Ein erster Ansatz hierzu wäre etwa: Setze $|X| = \{Y \mid X \sim Y\}$ und $|X| \leq |Y|$ genau dann, wenn $X \preccurlyeq Y$. Das Problem dabei ist allerdings, dass diese Definition keine Menge liefert (sondern eine echte Klasse). Daher:
Frage: Existiert für alle Mengen X eine Ordinalzahl α, so dass $X \sim \alpha$?
Für wohlgeordnete Mengen X wissen wir bereits, dass diese Aussage stimmt (Hauptsatz von Wohlordnungen). Daher genügt es stattdessen, sich die folgende Frage zu überlegen:
Frage: Existiert für jede Menge X eine Relation R, so dass (X, R) eine Wohlordnung ist?

6.1 Das Wohlordnungsprinzip

Ziel: Wir möchten zeigen, dass für jede Menge X eine Relation R existiert, so dass (X, R) eine Wohlordnung ist (d.h. jede Menge lässt sich wohl ordnen). Diese Eigenschafte nennen wir auch <u>wohlordenbar</u>.

Bemerkung X ist wohlordenbar $\iff$ $\exists \alpha \in \mathrm{Oz}$ mit $X \sim \alpha$.

Beweis. $\Leftarrow$: Sei $f\colon \alpha \longrightarrow X$ eine Bijektion. Dann definieren wir xRy genau dann, wenn $f^{-1}(x) \in f^{-1}(y)$. Dann ist $(\alpha, \in) \cong (X, R)$. □

Definition (Auswahlfunktion) Sei X eine Menge nichtleerer Mengen (d.h. sie enthält nicht die leere Menge als Element). Eine <u>Auswahlfunktion</u> für X ist eine Funktion c mit

- $\mathrm{dom}(c) = X$ und

- $\forall x \in X$ gilt $c(x) \in x$.

Definition (Auswahlaxiom, AC) Betrachte das folgende Axiom (engl.: ‚Axiom of Choice‘):

$$\forall X\, [\forall x(x \in X \to x \neq \emptyset) \to \exists c(\mathrm{Fun}(c) \wedge \mathrm{dom}(c) = X \wedge \forall x(x \in X \to c(x) \in x))] \qquad \text{(AC)}$$

In Worten: Für jede Menge X, die nicht die leere Menge enthält existiert eine Auswahlfunktion c.

Im Allgemeinen ist das Auswahlaxiom unabhängig von der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre, das heißt

$$\begin{aligned} \mathbf{ZF} &\not\models \ \mathrm{AC} \ \text{ und} \\ \mathbf{ZF} &\not\models \neg\, \mathrm{AC}. \end{aligned}$$

Die erste Aussage wurde 1963 von Cohen gezeigt. Die zweite Aussage zeigte Gödel im Jahr 1938.

Lemma 2.13 (ZF ohne AC) X hat eine Auswahlfunktion, wenn

(1) X endlich ist.

(2) Alle $x \in X$ einelementig sind.

(3) $\bigcup X$ eine Wohlordnung ist (z. B. falls X eine Menge von Teilmengen aus $\mathbb{N}$ ist.)

Beweis. (1) Sei $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\exists y_i \in x_i$. Sei

$$c = \Big\{\langle x, y\rangle \in X \times \bigcup X \mid (x = x_1 \wedge y = y_1) \vee \ldots \vee (x = x_n \wedge y = y_n)\Big\}.$$

(2) Setze

$$c = \Big\{\langle x, y\rangle \in X \times \bigcup X \mid y \in x\Big\}.$$

(3) Setze

$$c = \Big\{\langle x, y\rangle \in X \times \bigcup X \mid y \in x \wedge \forall z(z \in x \to yRz)\Big\}$$

Dann gilt stets, dass $(\bigcup X, R)$ eine Wohlordnung ist. □

Theorem 2.27 (Zermelo, 1904) AC $\Rightarrow$ WO-Prinzip.

Beweis. Sei $X \neq \emptyset$ beliebig. Es seien $Z = \mathcal{P}(X) \setminus \emptyset$, c eine Auswahlfunktion für Z, $\delta = \aleph(X) = \min\{\alpha \mid \alpha \not\preccurlyeq X\}$ und sei $\text{STOP} \notin X$.
Definiere $f \colon \delta \longrightarrow X \cup \{\text{STOP}\}$ rekursiv in δ: Für alle $\alpha < \delta$.

$$f(\alpha) = \begin{cases} c[X \setminus \{f(\beta) \mid b < \alpha\}], & \text{wenn } X \setminus \{f(\beta) \mid \beta < \alpha\} \neq \emptyset \\ \text{STOP} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann existiert $\alpha < \delta$, so dass $f(\alpha) = \text{STOP}$. Weil sonst ist $f \colon \delta \longrightarrow X$ injektiv. Sei α_0 das kleinste Element, so dass $f(\alpha_0) = \text{STOP}$. $\forall \alpha < \alpha_0$: $f(\alpha) \in X$. Dann ist $f|_{\alpha_0}$ sowohl injektiv als auch surjektiv. Daher ist $f \colon \alpha_0 \longrightarrow X$ eine Bijektion. □

Theorem 2.28 Es gilt
$$\text{Wohlordnungsprinzip} \iff \mathbf{AC}.$$

Beweis. Wie Lemma von zuvor. □

Wir schreiben von nun an
$$\mathbf{ZFC} = \mathbf{ZF} + \mathbf{AC}$$
und nehmen ferner von nun an das Auswahlaxiom zusätzlich an!

Definition (Kardinalität bzw. Mächtigkeit) Setze
$$|X| := \min\{\alpha \in \mathrm{Oz} \mid X \sim \alpha\}.$$

Definition (Kardinalzahl) Wir nennen eine Ordinalzahl $\kappa \in \mathrm{Oz}$ Kardinalzahl der Menge X, wenn $\kappa = |X|$

Beispiel

- $\omega := |X|$ für alle abzählbaren Mengen X. Wir schreiben hierfür auch $\aleph_0$, das heißt $\aleph_0 = \omega$.
- Alle natürlichen Zahlen sind Kardinalzahlen.
- $\aleph_1 :=$ kleinste (bzw. erste) überabzählbare Kardinalzahl.

Lemma 2.14 Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) κ ist eine Kardinalzahl ($\kappa = |X|$)

(2) $\kappa = |\kappa|$.

(3) $\forall \alpha < \kappa$ gilt $\kappa \not\preccurlyeq \alpha$.

(4) $\forall \alpha < \kappa$ gilt $\kappa \not\sim \alpha$.

Beweis. (4) $\Rightarrow$ (3): Ang. es ex. $\alpha < \kappa$ mit $\kappa \preccurlyeq \alpha$. Dann ist $\alpha < \kappa \Rightarrow \alpha \preccurlyeq \kappa$. Daraus folgt nach Cantor-Schröder-Bernstein, dass $\alpha \sim \kappa$. Dies ist ein Widerspruch.
(3) $\Rightarrow$ (2): Ang. $|\kappa| \neq \kappa$. Dann folgt, dass $|\kappa| = \alpha < \kappa$ und $\kappa \preccurlyeq \alpha$. Dies ist ein Widerspruch.
(2) $\Rightarrow$ (1): Klar.
(1) $\Rightarrow$ (4): Sei X, so dass $\kappa = |X|$. Aber wenn $\exists \alpha \in \kappa$ mit $\kappa \sim \alpha$, dann folgt daraus ein Widerspruch zur Minimalität von κ. □

Nun haben wir gezeigt, dass
$$\begin{aligned} X \sim Y &\text{ g. d. w. } |X| = |Y| \\ X \preccurlyeq Y &\text{ g. d. w. } |X| \leq |Y| \\ X \prec Y &\text{ g. d. w. } |X| < |Y|. \end{aligned}$$

Lemma 2.15 Jede unendliche Kardinalzahl ist eine Limesordinalzahl.

Beweis. Es gilt $(\alpha + 1) \sim \alpha$. Die Behauptung folgt aus der Minimalität von Kardinalzahlen. □

Lemma 2.16 $\aleph(X)$ ist eine Kardinalzahl, $\aleph(\kappa)$ ist die kleinste Kardinalzahl größer als κ.

Beweis. 1. Sei $\delta = \aleph(X)$. Wenn δ keine Kardinalzahl ist, so gibt es $\alpha < \delta$ mit $\alpha \sim \delta$. Aber $\alpha \not\preccurlyeq X$. Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von δ.

2. Wenn $\aleph(\kappa) \leq \kappa$; dann ist $\aleph(\kappa) \preccurlyeq \kappa$. Dies ist ein Widerspruch. Daher ist $\kappa < \aleph(\kappa)$. Wenn $\kappa < \lambda$ für eine weitere Kardinalzahl λ gilt, dann ist $\lambda \not\preccurlyeq \kappa$. Nach Minimalität ist $\aleph(\kappa) \leq \lambda$. □

Definition (Nachfolgerkardinalzahl) Setze $\kappa^+ = \aleph(\kappa)$ also die Nachfolgerkardinalzahl von κ.

Lemma 2.17 Sei X eine Menge von Kardinalzahlen. Dann ist $\bigcup X$ auch eine Kardinalzahl. Ferner ist $\bigcup X$ die kleinste Kardinalzahl $\geq \kappa$ für alle $\kappa \in X$.

Beweis. Sonst existiert $\alpha < \bigcup X$, aber $\alpha \sim \bigcup X$. Dann ist $\alpha \in \bigcup X$. Dann existiert $\kappa \in X$ (also $\kappa \subseteq \bigcup X$), so dass $\alpha \in \kappa$. Daher $\alpha \in \kappa \subseteq \bigcup X$. Daraus folgt, dass $\alpha \in \kappa \subseteq \bigcup X \sim \alpha$. Daher ist

$$\alpha \preccurlyeq \kappa \preccurlyeq \bigcup X \preccurlyeq \alpha.$$

Daher ist $\alpha \sim \kappa$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass κ eine Kardinalzahl ist. Die zweite Aussage folgt, weil $\bigcup X = \sup(X)$. □

Definition Für alle Ordinalzahlen α definiere $\aleph_\alpha$ durch:

- $\aleph_0 := \omega$.
- $\aleph_{\alpha+1} := \aleph_\alpha^+ = \aleph(\aleph_\alpha)$.
- $\aleph_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha$.

Lemma 2.18 Für alle Kardinalzahlen κ gilt: κ ist endlich oder es existiert ein α, so dass $\kappa = \aleph_\alpha$.

Beweis. Offensichtlich: $\kappa \leq \aleph_\kappa$. Sei α die kleinste Ordinalzahl, so dass $\kappa < \aleph_\alpha$. Wir zeigen α ist keine Limesordinalzahl.
Beweis: Sonst gilt für alle $\beta < \alpha$, dass $\aleph_\beta \leq \kappa$. Daher ist $\aleph_\alpha \leq \kappa$.
Also ist $\alpha = \beta + 1$. Dann ist $\aleph_\alpha = \aleph_\beta^+$. Daraus folgt, dass $\aleph_\beta \leq \kappa < \aleph_\beta^+$. Insgesamt gilt somit $\aleph_\beta = \kappa$. □

Zusammenfassung Kardinalzahlen. Ein κ ist eine Kardinalzahl, falls X existiert, s.d. $\kappa = \aleph(X)$. Also ist κ eine Ordinalzahl.
Die Kardinalität von X ist gegeben durch $|X| = \min\{\alpha \mid \alpha \sim X\}$. Die Kardinalität von X ist nur definiert, wenn X wohlordenbar ist. Daher setzen wir für die Theorie der Kardinalzahlen **AC** voraus.

Bemerkung In **ZF** (ohne **AC**) können wir *nicht* beweisen, dass $\mathbb{R}$ wohlordenbar ist.

Die Ordinalzahlen

$$\omega, \omega + 1, \ldots, \omega + \omega, \ldots, \omega \cdot 3, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^\omega, \ldots,$$

sind bis (exklusive) ω_1 abzählbar. Somit existiert eine Bijektion zwischen ihnen. Aber warum sind Ordinalzahlen der Form $\omega \cdot 3, \omega^2, \omega^\omega$ abzählbar? Nach Cantor existiert eine Bijektion b von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Falls $f\colon \alpha \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion ist, dann folgt dass

$$\hat{f}\colon \alpha \times \alpha \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}, (\gamma, \delta) \mapsto (f(\gamma), f(\delta))$$

ebenfalls bijektiv ist. Dann ist $b^{-1} \circ \hat{f}\colon \alpha \times \alpha \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion.
Also: Produkte abzählbarer Ordinalzahlen sind abzählbar. Und

$$\omega^\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega^n.$$

Per Induktion ist ω^n abzählbar und somit ist ω^ω abzählbar als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen.
Frage. Wieso hatten wir eigentlich „abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind abzählbar." noch nicht bewiesen?
Antwort: Weil man dafür **AC** braucht. Bemerkung: Trotzdem beweist **ZF**, dass ω^ω abzählbar ist!
Darstellung von Ordinalzahlen. Zunächst haben wir: Falls δ irgendeine Ordinalzahl ist, so gibt es eine eindeutige Limesordinalzahl λ und $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\delta = \lambda + n.$$

[Warum? Falls λ Limesordinalzahl klar. Ansonsten existiert eine maximale Limesordinalzahl $< \lambda$, denn falls das nicht so wäre, wäre die Menge der Limesordinalzahlen $< \lambda$ unbeschränkt und somit wäre λ eine Limesordinalzahl im Widerspruch zur Annahme.]

Definition (Gerade, ungerade Ordinalzahlen) Eine Ordinalzahl δ heißt <u>gerade</u>, falls $\delta = \lambda + 2n$ und <u>ungerade</u>, falls $\delta = \lambda + 2n + 1$.

Falls δ Limesordinalzahl ist, so betrachte

$$f_G\colon \lambda + n \mapsto \lambda + 2n,$$
$$f_U\colon \lambda + n \mapsto \lambda + 2n + 1.$$

Dabei ist f_G eine Bijektion zwischen δ und den geraden Elementen von δ und f_U ist eine Bijektion zwischen δ und den ungeraden Elementen von δ. Das heißt $(\delta + \delta, \in) \cong (\delta, \in) \oplus (\delta, \in)$, denn:

$$\delta + \delta \sim (\{0\} \times \delta) \cup (\{1\}, \delta) \sim \{\lambda + 2n \in \delta\} \cup \{\lambda + 2n + 1 \in \delta\} = \delta.$$

Also ist $\omega_1 + \omega_1 \sim \omega_1$.
Behauptung. Falls $\kappa < \lambda$ beide Kardinalzahlen. Dann gilt

$$|\lambda \setminus \kappa| = \lambda.$$

Beweis. Es gilt $\kappa \cup \lambda \setminus \kappa = \lambda$. Sei $\mu := \max(\kappa, |\lambda \setminus \kappa|)$. Angenommen $\mu < \lambda$. Dann folgt ein Widerspruch aus

$$\lambda = \kappa \cup \lambda \setminus \kappa \preccurlyeq \mu + \mu \sim \mu < \lambda.$$

□

Theorem 2.29 Abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind abzählbar.

Beweis. Sei A_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Menge. Wir wollen, dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar ist.
Aus beweistechnischen Gründen heißt dies, dass die Menge $\mathrm{Surj}(\mathbb{N}, A_n) \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei c eine Auswahlfunktion für $\{\mathrm{Surj}(\mathbb{N}, A_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Sei

$$c_n := c\left(\mathrm{Surj}(\mathbb{N}, A_n)\right).$$

Dann ist $c_n \colon \mathbb{N} \longrightarrow A_n$ surjektiv. Dann ist

$$\hat{c} := \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \\ (k,l) & \mapsto c_k(l) \end{cases}$$

eine Surjektion von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ nach $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Mit der Cantorschen Bijektion $b\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ erhalten wir eine Surjektion

$$\hat{c} \circ b \colon \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n. \qquad \square$$

Theorem 2.30 (Satz von Hessenberg) Falls α eine unendliche Ordinalzahl ist, so ist

$$\alpha \times \alpha \sim \alpha.$$

Bemerkung Dieser Satz gilt bereits in **ZF** – das heißt er verwendet kein **AC**. Der Beweis ist angelehnt an den vorherigen und verwendet die sog. Gödel'sche Paarfunktion.

Theorem 2.31 Sei κ^+ eine Nachfolgerkardinalzahl:

$$\kappa^+ = \aleph_{\alpha+1} = \aleph(\aleph_\alpha).$$

Dann gilt κ^+ ist nicht die Vereinigung von κ vielen Mengen der Kardinalität $\leq \kappa$.

Beweis. Jetzt ist A_α für $\alpha < \kappa$ mit $\mathrm{Surj}(\kappa, A_\alpha) \neq \emptyset$. Die Auswahlfunktion $c\colon \{\mathrm{Surj}(\kappa, A_\alpha) \mid \alpha < \kappa\} \longrightarrow \bigcup\{\mathrm{Surj}(\kappa, A_\alpha) \mid \alpha < \kappa\}$. Sei erneut $c_\alpha := c(\mathrm{Surj}(\kappa, A_\alpha))$. Für einen Widerspruch nehmen wir, dass $\kappa^+ = \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$. Dann ist

$$\begin{aligned} \hat{c}\colon \kappa \times \kappa &\longrightarrow \kappa^+ \\ (\alpha, \beta) &\mapsto c_\alpha(\beta) \end{aligned}$$

eine Surjektion von $\kappa \times \kappa$ nach κ^+. Nach Hessenberg existiert eine Bijektion $b\colon \kappa \longrightarrow \kappa \times \kappa$. Also ist

$$\hat{c} \circ b\colon \kappa \longrightarrow \kappa^+$$

eine Surjektion. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von κ^+. $\square$

Bemerkung Dieses Theorem gilt *nicht* für Limeskardinalzahlen. Denn etwa:

$$\aleph_\omega = \bigcup_{n\in\omega} \aleph_n.$$

Dies ist eine *abzählbare* Vereinigung kleinerer Mengen.

Wir wissen, dass $|\mathbb{R}| > \aleph_0$, also ist $|\mathbb{R}| = \aleph_\alpha$ für ein $\alpha \geq 1$.
Frage. Was ist α? Dies entspricht dem ersten Hilbert-Problem. (!) Es wird als Kontinuumsproblem bezeichnen. Cantor vermutete, dass $\alpha = 1$. Dies wird als Kontinuumshypothese (CH) bezeichnet.
Antwort. Es gilt

$$\begin{gathered} \mathbf{ZFC} \not\models \text{(CH)} \\ \mathbf{ZFC} \not\models \neg\text{(CH)} \end{gathered}$$

Das heißt, diese Frage ist in **ZFC** nicht zu beantworten. Die erste Aussage wurde 1963 von Cohen bewiesen und die zweite Aussage von Gödel 1938.

7 Das letzte Axiom – Fundierung / Regularität

Fragen. Gibt es x mit $x \in x$? Oder gibt es x, y mit $x \in y \in x$? Dies könnte beliebig weitergedacht werden. Daher:
Fundierungsaxiom

$$\forall x(x \neq \emptyset \to \exists m(m \in x \wedge m \cap x = \emptyset)) \tag{Fund}$$

Es stellt sich heraus, dass

$$\mathbf{ZF} + (\text{Fund}) \Rightarrow \forall x(x \notin x)$$

Um dies einzusehen, betrachte $\{x\}$. Falls $\{x\}$ ein minimales Element enthält, so ist dies x. Dann ist $x \cap \{x\} = \{x\} \neq \emptyset$. Dies ist ein Widerspruch.
In **ZF** können wir per transfiniter Rekursion definieren:

$$\begin{aligned} V_0 &:= \emptyset \\ V_{\alpha+1} &:= \mathcal{P}(V_\alpha) \\ V_\lambda &:= \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha && \text{(Für } \lambda \text{ Limesord.)} \end{aligned}$$

Diese Definition heißt die Kumulative Hierarchie von VON NEUMANN (auch: VON-NEUMANN-Hierarchie). Per Induktion können wir nun beweisen, dass

(1) V_α ist transitiv.

(2) $\alpha < \beta \Rightarrow V_\alpha \subseteq V_\beta$.

(3) $\alpha \subseteq V_\alpha$.

Theorem 2.32 In der Mengenlehre ohne (Fund) können wir zeigen, dass

$$(\text{Fund}) \iff \forall x \exists \alpha (x \in V_\alpha).$$

3 Zurück zur Logik

Wir hatten bisher folgende Aspekte behandelt:

- Syntax (Zeichenketten – zunächst ohne Bedeutung)
- Semantik. Etwa: $\Phi \models \varphi$ war definiert als: „Für alle Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt: Falls $\mathcal{I} \models \Phi$, so $\mathcal{I} \models \varphi$."

Über den syntaktischen Begriff der Beweisbarkeit wurde noch nicht (explizit) gesprochen. Wir haben (als Mathematiker/in) einen intuitiven Begriff von „Beweis", den wir formalisieren wollen.
Intuitiver Begriff: Ein Beweis ist eine endliche Abfolge von Sätzen, so dass jeder entweder ein Axiom ist oder – gemäß vorgegebenen Regeln – aus vorigen folgt. Dann ist φ beweisbar aus Φ, falls ein Beweis existiert, so dass φ der letzte Satz im Beweis ist und die „Axiome" aus Φ sind. Wir könnten analog zur Semantik schreiben:

$$\Phi \vdash \varphi$$

Wir sagen dann etwa „φ kann aus Φ abgeleitet/ bewiesen werden" oder „Φ beweist φ".
Frage 1. Gilt $\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \Phi \models \varphi$? [Wenn nicht, dann ist etwas fundamental schiefgegangen!]
Frage 2. Gilt $\Phi \models \varphi \Rightarrow \Phi \vdash \varphi$? [Wenn nicht, dann zweifeln wir an der Rolle des Beweises in der Mathematik.]
Antwort. Es gibt einen adäquaten Beweisbegriff $\vdash$, d. h. für alle Φ, φ gilt:

$$\Phi \models \varphi \iff \Phi \vdash \varphi. \qquad \text{(GÖDEL'scher Vollständigkeitssatz, 1929)}$$

In Worten bedeutet dies

$$\text{Für jedes } \mathcal{I}, \text{ so dass } \mathcal{I} \models \Phi \text{ gilt } \mathcal{I} \models \varphi. \iff \text{Es gibt eine endliche Ableitung } D \text{ von } \varphi \text{ aus } \Phi.$$

Beachte, dass links eine All-Aussage und rechts eine Existenz-Aussage steht.

Bemerkung Es gibt unzählige Versionen von $\vdash$ (formale Beweisbegriffe). Beispielweise lassen sich hierzu finden:

- Tableaux-Kalkül,
- Smullyan-Kalkül und
- Das Natürliche Schließen.

Wir betrachten jedoch das GENTZEN'sche Sequenzkalkül.

Definition (Sequenz) Eine Folge von S-Formeln heißt Sequenz.

$$\underbrace{\varphi_0\ \varphi_1 \cdots \varphi_{n-1}}_{\text{Antezedens}}\ \underbrace{\varphi_n}_{\text{Sukzedens}}$$

Wir interpretieren dies als „Wenn $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$ gelten, dann gilt φ_n".
Oft schreiben wir dies als $\Gamma\varphi_n$, wobei $\Gamma = (\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1})$.

Definition (Regeln) Eine Regel ist eine Menge von Tupeln der gleichen Länge von Sequenzen.

Z. B. R ist eine Menge von Paaren von Sequenzen oder Tripeln von Sequenzen oder auch einfach von Sequenzen (also 1-Tupeln). Den letzten Fall bezeichnen wir als 0-stellige Regel, im Fall von Sequenzpaaren sagen wir 1-stellige Regel und im Fall von Tripeln sagen wir 2-stellige Regel.

Beispiel Sei R eine 2-stellige Regel mit $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) \in R$. Dann soll dies interpretiert werden als: Falls Δ_1, Δ_2 bereits bewiesen wurden, so kann man gemäß R Δ_3 folgern. Z. B. falls R eine 0-stellige Regel ist und $\Delta \in R$, so darf Δ in jeder Abl. gemäß R auftauchen (dies entspricht in etwa „Axiomen“).

Definition (Kalkül, $\mathfrak{K}$-Ableitung) Eine Menge $\mathfrak{K}$ von Regeln heißt Kalkül. Dann nennen wir eine endliche Folge von Sequenzen $D = (\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ eine $\mathfrak{K}$-Ableitung, falls für alle $i \leq n$ eine Regel $R \in \mathfrak{K}$ existiert, so dass

(a) R ist eine nullstellige Regel und $\Delta_i \in R$ oder

(b) R ist eine einstellige Regel und es gibt $j < i$, so dass $(\Delta_j, \Delta_i) \in R$ oder

(c) R ist eine zweistellige Regel und es gibt $j, l < i$, so dass $(\Delta_j, \Delta_l, \Delta_i) \in R$.

Definition ($\mathfrak{K}$-ableitbar) Eine Sequenz $\Gamma\varphi$ ist $\mathfrak{K}$-ableitbar, falls es eine $\mathfrak{K}$-Ableitung gibt, so dass $\Gamma\varphi$ in D auftaucht – oder anders gesagt: falls ein $i \leq n$ existiert mit $\Gamma\varphi = \Delta_i$. Wir schreiben

$$\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi.$$

Wir schreiben $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$ g.d.w. eine endliche Sequenz Γ existiert, die aus Elementen von Φ besteht, so dass $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$.

Wir erinnern uns (an die Begriffe):

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \Rightarrow \Phi \models \varphi \qquad \text{(Korrektheit)}$$
$$\Phi \models \varphi \Rightarrow \Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi. \qquad \text{(Vollständigkeit)}$$

Definition (Korrektheit) Eine Regel R heißt korrekt für

0-stellige Regeln,	falls $\Gamma\varphi \in R$, so ist $\Gamma \models \varphi$
1-stellige Regeln,	falls $(\Gamma\varphi, \Gamma'\varphi') \in R$, so gilt: Falls $\Gamma \models \varphi$, so $\Gamma' \models \varphi'$
2-stellige Regeln,	falls $(\Gamma\varphi, \Gamma'\varphi', \Gamma''\varphi'') \in R$, so gilt: Falls $\Gamma \models \varphi$, und $\Gamma' \models \varphi'$, so $\Gamma'' \models \varphi''$

$\mathfrak{K}$ heißt korrekt, falls: Wenn $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$, so $\Gamma \models \varphi$.

Es gibt viele triviale korrekte Kalküle:

- Falls $\mathfrak{K}$ keine 0-stelligen Regeln hat, so gilt für kein $\Gamma\varphi$, dass $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$. Also ist $\mathfrak{K}$ trivialerweise korrekt.
- Sei R eine korrekte 0-stellige Regel und R' eine 1-stellige Regel mit $(\Delta, \Delta') \in R' \Rightarrow \Delta \notin R$. Dann gilt $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$ genau dann wenn $\Gamma\varphi \in R$.

1 Die Regeln des Gentzenkalküls

Abschwächungsregel

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\varphi\\ \Gamma'\varphi'\end{array}}{\Gamma''\varphi''} \iff (\Gamma\varphi, \Gamma'\varphi', \Gamma''\varphi'') \in R$$

Oder auch $\frac{\Gamma\varphi}{\Gamma'\varphi}$ falls Γ' alle Elemente von Γ enthält. [Bem.: Dies impliziert, dass falls Γ' eine Permutation von Γ ist, dann ist $(\Gamma\varphi, \Gamma'\varphi) \in R$.]
Korrektheit: Ang. $(\Gamma\varphi, \Gamma'\varphi) \in R$ und $\Gamma \models \varphi$, also $\{\psi \mid \psi \text{ kommt in } \Gamma \text{ vor}\} \models \varphi$. Aber $\{\psi \mid \psi \text{ kommt in } \Gamma' \text{ vor}\} \supseteq \{\psi \mid \psi \text{ kommt in } \Gamma \text{ vor}\}$. Daraus folgt $\Gamma' \models \varphi$.
Voraussetzungsregel 0-stellige Regel:

$$\frac{\text{(nichts)}}{\Gamma\varphi}$$

g.d.w. φ kommt in Γ vor. Korrektheit: $\{\psi \mid \psi \text{ kommt in } \Gamma \text{ vor }\} \models \varphi$.
Fallunterscheidungsregel 2-stellige Regel:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\psi\varphi\\ \Gamma\neg\psi\varphi\end{array}}{\Gamma\varphi}$$

Korrektheit: Ang. $\Gamma\psi \models \varphi$ und $\Gamma\neg\psi \models \varphi$. Das heißt für alle Interpretationen $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \{\psi\}$ gilt $\mathcal{I} \models \varphi$ und $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \{\neg\psi\}$ gilt $\mathcal{I} \models \varphi$. Sei $\mathcal{J}$ eine beliebige Interpretation mit $\mathcal{J} \models \Gamma$.
Fall 1: $\mathcal{J} \models \psi$, also $\mathcal{J} \models \Gamma \cup \{\psi\}$, also $\mathcal{J} \models \varphi$. Fall 2: $\mathcal{J} \models \neg\psi$, also $\mathcal{J} \models \Gamma \cup \{\neg\psi\}$. Daher $\mathcal{J} \models \varphi$. Da $\mathcal{J}$ beliebig war gilt die Behauptung. □
Widerspruchsregel 2-stellige Regel:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\neg\varphi\psi\\ \Gamma\neg\varphi\neg\psi\end{array}}{\Gamma\varphi}$$

Korrektheit: $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \models \psi$ und $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \models \neg\psi$. Sei $\mathcal{J} \models \Gamma$. Ang. $\mathcal{J} \not\models \varphi$, also $\mathcal{J} \models \neg\varphi$. Dann $\mathcal{J} \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Daher folgt $\mathcal{J} \models \psi$ und $\mathcal{J} \models \neg\psi$. Dies ist ein Widerspruch, was die Korrektheit beweist. □

Bemerkung Oft findet man auch die sog. Alternative Widerspruchsregel (auch: Explosionsregel). Sie ist *nicht* im Gentzenkalkül enthalten. Jedoch lässt sie sich in ihm ableiten: Dazu müssen wir zeigen, dass eine Ableitung der Explosionsregel zeigt.

1. $\Gamma\psi$
2. $\Gamma\neg\psi$
3. $\Gamma\neg\varphi\psi$ (Abschwächung angewandt auf Zeile 1)
4. $\Gamma\neg\varphi\neg\psi$ (Abschwächung angewandt auf Zeile 2)
5. $\Gamma\varphi$ Widerspruch auf Zeilen 3 und 4.

Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül und R eine Regel (nicht notwendigerweise $R \in \mathfrak{K}$). Dann heißt R <u>$\mathfrak{K}$-ableitbar</u>, falls gilt: Wenn $(\Delta, \Delta') \in R$ und Δ ist $\mathfrak{K}$-ableitbar, so ist Δ' $\mathfrak{K}$-ableitbar.
Ferner brauchen wir auch Regeln für $\vee, \wedge, \rightarrow, \exists$ und $=$. Dazu erinnern wir uns daran, dass falls $\Gamma\varphi$ eine Sequenz ist, dann ist Γ der Antezedens und φ das Sukzedens – dabei ist das Sukzedens stets am Schluss und alles zuvor ist der Antezedens. Wir definieren nun

$$\wedge_S : \frac{\begin{array}{c}\Gamma\varphi\\ \Gamma\psi\end{array}}{\Gamma(\varphi \wedge \psi)} \qquad \wedge_A : \frac{\Gamma\varphi X}{\Gamma(\varphi \wedge \psi)X}\ \frac{\Gamma\varphi X}{\Gamma(\psi \wedge \varphi)X} \tag{Regel $\wedge$}$$

Zur Korrektheit: Ang. $\Gamma \models \varphi$ und $\Gamma \models \psi$. Z. z. ist $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$. Sei $\mathcal{I} \models \Gamma$ beliebig. Nach Ann. ist $\mathcal{I} \models \varphi$ und $\mathcal{I} \models \psi$, also $\mathcal{I} \models \varphi \wedge \psi$. Ebenso für $(\wedge_A)$. Definiere nun analog

$$\vee_A : \frac{\begin{array}{c}\Gamma\varphi X\\ \Gamma\psi X\end{array}}{\Gamma(\varphi \vee \psi)X} \qquad \vee_S : \frac{\Gamma\varphi}{\Gamma(\varphi \vee \psi)}\ \frac{\Gamma\varphi}{\Gamma(\psi \vee \varphi)} \tag{Regel $\vee$}$$

$$\rightarrow_A : \frac{\begin{array}{c}\Gamma\varphi\\ \Gamma\psi X\end{array}}{\Gamma(\varphi \rightarrow \psi)X} \qquad \rightarrow_S : \frac{\Gamma\varphi\psi}{\Gamma(\varphi \rightarrow \psi)} \tag{Regel $\rightarrow$}$$

Zur Korrektheit: Per Voraussetzung gilt $\Gamma \models \varphi$ und $\Gamma, \psi \models X$. Sei nun $\mathcal{I} \models \Gamma, (\varphi \rightarrow \psi)$. Nach der ersten Vor. gilt $\mathcal{I} \models \varphi$. Also nach Semantikregeln für $\rightarrow$ gilt $\Gamma \models \psi$. Also folgt aus der zweiten Vor., dass $\mathcal{I} \models X$.
Zur Gleichheit: Für jeden Term $t \in T^S$ gilt:

$$\frac{}{t = t} \tag{Regel $=$}$$

Zur Substitution: Für beliebige Terme $t, t' \in T^S$ ist

$$\frac{\Gamma\varphi\frac{t}{x}}{\Gamma t = t'\varphi\frac{t'}{x}} \tag{Regel Subst.}$$

$$\exists_S : \frac{\Gamma\varphi\frac{t}{x}}{\Gamma\exists x\varphi},\ \text{falls } t \in T^S \qquad \exists_A : \frac{\Gamma\varphi\frac{y}{x}\psi}{\Gamma\exists x\varphi\psi},\ \text{falls } y \text{ nicht frei in } \Gamma, \exists x\varphi \text{ und } \psi \text{ ist} \tag{Regel $\exists$}$$

Zur Korrektheit: Ang. $\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \models \psi$ und $\mathcal{I} \models \Gamma, \exists x\varphi$. Da $\mathcal{I} \models \exists x\varphi$ existiert $a \in A$ mit $\mathcal{I}\frac{a}{x} \models \varphi$. Was ist $\left(\mathcal{I}\frac{a}{y}\right)\frac{a}{x}$? Falls $x = y$, so ist $\left(\mathcal{I}\frac{a}{y}\right)\frac{a}{x} = \mathcal{I}\frac{a}{x}$, also ist $\left(\mathcal{I}\frac{a}{y}\right)\frac{a}{x} \models \varphi$.
Falls $x \neq y$, so ist y nicht frei in φ, also ist $\left(\mathcal{I}\frac{a}{y}\right)\frac{a}{x} \models \varphi$ nach dem Koinzidenzlemma.
Also ist immer

$$\left.\begin{array}{l}\left(\mathcal{I}\frac{a}{y}\right)\frac{a}{x} \models \varphi\\ \mathcal{I}\frac{a}{y}(y) = a\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\mathcal{I}\frac{a}{y}\right)\frac{\mathcal{I}\frac{a}{y}(y)}{x} \models \varphi$$
$$\overset{\text{Subst.Lem.}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{I}\frac{a}{y} \models \varphi\frac{y}{x}.$$

Aber $\mathcal{I}\frac{a}{y} \models \Gamma$, da y nicht frei in Γ vorkommt nach dem Koinzidenzlemma. Also nach $\varphi\frac{y}{x} \models \psi$ folgt, dass $\mathcal{I}\frac{a}{y} \models \psi$. Wiederum nach dem Koinzidenzlemma gilt, da y nicht frei in ψ vorkommt, dass $\mathcal{I} \models \psi$.

Bemerkung Die Bedingung „y ist nicht frei in Γ, $\exists x\varphi$, ψ“ ist notwendig.

Beispiel Betrachte $\varphi := x = f(y)$, $\psi := y = f(y)$ und sei Γ eine leere Folge. Dann ist

$$\varphi\frac{y}{x} \equiv y = f(y) \equiv \psi$$

$\varphi\frac{y}{x}\ \psi$ ist korrekt: $\psi\psi$. $\exists x\varphi\ \psi$ ist jedoch keine korrekte Sequenz.

Der Kalkül, welcher aus den Regeln:

Abschwächung, Voraussetzung, Falluntersch., Widerspruch, $\wedge_A$, $\wedge_S$, $\vee_A$, $\vee_S$, $\rightarrow_A$, $\rightarrow_S$, Gleichheit, Subst., $\exists_A$, $\exists_S$

besteht, heißt Gentzenkalkül $\mathfrak{K}_{\text{Gentzen}}$.

Theorem 3.1 Der Gentzenkalkül $\mathfrak{K}_{\text{Gentzen}}$ ist korrekt.

Erinnerung: $\mathfrak{K}$ Kalkül bedeutet: $\Psi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$ g.d.w. es existiert eine Sequenz $\Gamma\varphi$ mit allen Elementen von Γ in Ψ, so dass $\Gamma\varphi$ $\mathfrak{K}$-ableitbar ist.
Bemerkung (ÜA): Also gilt: Falls $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$, so existiert eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$.

Definition Wir definieren nun

$$\vdash := \vdash_{\mathfrak{K}_{\text{Gentzen}}}.$$

Theorem 3.2 (Vollständigkeitssatz, Gödel, 1929) Der Gentzen-Kalkül ist vollständig: Für alle Φ, φ gilt:

$$\Phi \models \varphi \iff \Phi \vdash \varphi.$$

Beweis. (Es werden Aspekte des folgenden Kapitels vorausgesetzt(!)) Grundidee: Verwandle die Syntax selbst in ein Modell. Sprache der Arithmetik $S = \{0, s, +, <\}$. Kanonische Terme für die natürlichen Zahlen $t_0 := 0$ und $t_{k+1} := S(t_k)$. Problem dabei: $t_5 \neq t_2 + t_3$ als Term, aber t_5 und $t_2 + t_3$ sollen das gleiche Objekt bezeichnen. Daher definieren wir eine Äquivalenzrelation zwischen Termen:

$$t \sim_\Phi t' :\iff \Phi \vdash t = t'.$$

Idee hierbei: Objekte unseres Modells werden $\sim_\Phi$-Äquivalenzklassen von T^S.

Problem 1 Manche Sprachen haben kaum Terme, z.B. Sprachen ohne Konstanten- und Funktionssymbole – etwa $S = \mathbf{LST}$. Dort gibt es nur Variablen und $\mathbf{ZFC} \vdash x = y$ g.d.w. $x = y$.

Problem 2 Falls $\Phi \nvdash \varphi$ und $\Phi \nvdash \neg\varphi$, was wird im syntaktischen Modell gelten und warum?

Das Termmodell von Φ

$$\begin{aligned}
A^\Phi &:= \left\{[t]_{\sim_\Phi} \mid t \in T^S\right\} && \\
\alpha^\Phi(c) &:= [c]_{\sim_\Phi} && \text{für } c \in S_K \\
\alpha^\Phi(f)([t_1], \dots, [t_n]) &:= [f(t_1, \dots, t_n)]_{\sim_\Phi} && \text{für } f \in S_F\ n\text{-stellig} \\
([t_1], \dots, [t_n]) \in \alpha^\Phi(R) &:\iff \Phi \vdash R(t_1, \dots, t_n) && \text{für } R \in S_R\ n\text{-stellig} \\
\mathfrak{A}^\Phi &:= (A^\Phi, \alpha^\Phi) && \\
\beta^\Phi(x) &:= [x]_{\sim_\Phi} && \\
\mathcal{I}^\Phi &:= (\mathfrak{A}^\Phi, \beta^\Phi) &&
\end{aligned}$$

Dabei bleibt noch die Wohldefiniertheit der Definitionen zu $f \in S_F$ und $R \in S_R$ zu zeigen.
Hoffnung: $(A^\Phi, \alpha^\Phi) \models \Phi$.
Einige Beobachtungen:

1. $\sim_\Phi$ ist eine Äquivalenzrelation.
2. Wohldefiniertheit von $\alpha^\Phi(f)$ und $\alpha^\Phi(R)$. Das heißt, falls $t_1 \sim t_1', \ldots, t_n \sim t_n'$ und $([t_1], \ldots, [t_n]) \in \alpha^\Phi(R)$ (das heißt $\Phi \vdash R(t_1, \ldots, t_n)$), dann ist zu zeigen, dass $([t_1'], \ldots, [t_n']) \in \alpha^\Phi(R)$ (das heißt $\Phi \vdash R(t_1', \ldots, t_n')$). Per Annahme folgt $\Phi \vdash t_1 = t_1', \ldots, \Phi \vdash t_n = t_n'$. Also folgt die Wohldefiniertheit direkt aus der Substitutionsregel des Gentzenkalküls. Ebenso zeigen wir die Wohldefiniertheit für f.
3. $\mathcal{I}^\Phi(t) = [t]_\sim$ [Beweis durch Induktion nach dem Termaufbau.]
4. Falls φ atomar ist, so gilt
$$\Phi \vdash \varphi \iff \mathcal{I}^\Phi \models \varphi.$$
[Beweis mit 3. für die Termgleichungen und mit der Definition für relationale Ausdrücke.]
5. $\mathcal{I}^\Phi \models \exists x \varphi \iff$ es existiert ein Term t mit $\mathcal{I}^\Phi \models \varphi\frac{t}{x}$.
Beweis. Es gilt
$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\Phi \models \exists x\varphi &\overset{\text{Def. }\models}{\iff} \text{es existiert } a \in A^\Phi \text{ mit } \mathcal{I}^\Phi\frac{a}{x} \models \varphi \\ &\overset{\text{Def. }A^\Phi}{\iff} \text{es existiert } t \in T^S \text{ mit } \mathcal{I}^\Phi\frac{[t]}{x} \models \varphi \\ &\overset{(3)}{\iff} \text{es existiert } t \in T^S \text{ mit } \mathcal{I}^\Phi\frac{\mathcal{I}^\Phi(t)}{x} \models \varphi \\ &\overset{\text{Subst.Lem.}}{\iff} \text{es existiert } t \in T^S \text{ mit } \mathcal{I}^\Phi \models \varphi\frac{t}{x}. \end{aligned}$$

Bemerkung. Sei $\Phi = \mathbf{ZFC}$. Dann ist $S = \{\in\}$, also $T^S = \text{Var}$. Wann gilt für $v, w \in \text{Var}$, dass $\mathbf{ZFC} \vdash v = w$? Nur wenn $v = w$. Also ist $\sim$ die Identität auf Var. Was ist $\alpha^{\mathbf{ZFC}}(\in)$? Es gilt
$$([x],[y]) \in \alpha^{\mathbf{ZFC}}(\in) :\iff \mathbf{ZFC} \vdash x \in y.$$
Das ist jedoch *nie* der Fall. Also ist $\alpha^{\mathbf{ZFC}}(\in) = \emptyset$. Also ist $\mathfrak{A}^{\mathbf{ZFC}} \not\models \mathbf{ZFC}$.
Idee um dieses Problem zu umgehen (nach Leon Henkin, 1947): Statt Φ zu nehmen, reichern wir Φ zunächst an.

Definition (Henkin) Eine Menge von Formeln Φ heißt negationstreu, falls für jedes φ gilt:
$$\text{entweder } \Phi \vdash \varphi \text{ oder } \Phi \vdash \neg\varphi.$$
Eine Menge Φ enthält Beispiele, falls für jede Formel φ ein Term $t \in T^S$ existiert, so dass
$$\left(\exists x\varphi \to \varphi\frac{t}{x}\right) \in \Phi.$$
Solche Terme heißen auch „Skolemterme“ für φ.

Sei nun Φ eine widerspruchsfreie Menge, die negationstreu ist und Beispiele enthält.
Eigenschaften.

(1) Es gilt $\Phi \vdash \neg\varphi \iff \Phi \nvdash \varphi$

[$\Rightarrow$ folgt aus der Widerspruchsfreiheit. und $\Leftarrow$ folgt aus der Negationstreue.]

(2) Es gilt $\Phi \vdash (\varphi \vee \psi) \iff \Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \psi$.

Beweis: $\Leftarrow$ ist die Regel $(\vee_S)$. $\Rightarrow$: Angenommen $\Phi \vdash (\varphi \vee \psi)$ und $\Phi \nvdash \varphi$ Dann folgt nach (1), dass $\Phi \vdash \neg\varphi$. Betrachte folgende Ableitung:

1. $\Gamma(\varphi \vee \psi)$.
2. $\Gamma\neg\varphi$.
3. $\Gamma\varphi\neg\varphi$ (Abschw. auf 2.)
4. $\Gamma\varphi\varphi$ (Vor.-Regel)
5. $\Gamma\psi\psi$ (Vor.-Regel)
6. $\Gamma\varphi\psi$ (Wid. auf 3,4)
7. $\Gamma(\varphi \vee \psi)\psi$ ($\vee_A$ auf 5,6)
8. $\Gamma\psi$ (Kette auf 1,7)

(3) Es gilt $\Phi \vdash \exists x\varphi \iff$ es existiert ein Term t mit $\Phi \vdash \varphi\frac{t}{x}$.

[$\Leftarrow$ folgt aus $(\exists_S)$-Regel. $\Rightarrow$: $\exists x\varphi \to \varphi\frac{t}{x} \in \Phi$, also $\Phi \vdash \exists x\varphi \to \varphi\frac{t}{x}$. Mit $\Phi \vdash \exists x\varphi$ und mit Modus Ponens erhalten wir $\Phi \vdash \varphi\frac{t}{x}$.]

Henkins Lemma: Falls Φ widerspruchsfrei, negationstreu mit Beispielen ist, so gilt:

$$\mathcal{I}^\Phi \models \varphi \iff \Phi \vdash \varphi.$$

Beweis. Induktion nach Formelaufbau. Atomar war Eigenschaft (4) vom Termmodell. Für $\neg, \vee$ und $\exists$ sind das gerade die soeben bewiesenen Eigenschaften (1) bis (3). $\square$

Korollar 3.3 Ist Φ negationstreu und enthält Beispiele. Dann gilt:

$$\Phi \text{ widerspruchsfrei} \Rightarrow \Phi \text{ erfüllbar.}$$

Nach Henkins Lemma gilt: $\mathcal{I}^\Phi \models \Phi$.

Bemerkung Leider erfüllen fast alle natürlichen Theorien *nicht* die Bedingungen von Henkins Lemma.

Idee: Zu beliebigem widerspruchsfreiem Φ, finde $\Psi \supseteq \Phi$ widerspruchsfrei, negationstreu und Beispiel-enthaltend.
Wir sagen, eine Satzmenge Φ lässt unendlich viele Variablen unbenutzt, falls eine unendliche Menge $V' \subseteq \mathrm{Var}$ existiert, sodass kein $v \in V'$ in einer Formel in Φ auftaucht.
Bemerkung: Falls Φ eine bel. Satzmenge ist, so können wir Φ äquivalent zu Φ' umformulieren, sodass Φ' unendlich viele Variablen unbenutzt lässt. [In Φ ersetze Variable v_i durch v_{2i}. Dann tauchen Variablen v_{2i+1} nicht mehr auf.]
Von jetzt an gehen wir o.B.d.A. davon aus, dass Φ unendlich viele Variablen unbenutzt lässt. Sagen wir w_i ($i \in \mathbb{N}$) sind unbenutzte Variablen.
Von nun an sei S abzählbar. Daraus folgt, dass sowohl T^S als auch L^S abzählbar sind (also abzählbare Vereinigungen). Wir wählen eine Abzählung

$$\{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}\} = L^S.$$

Setze nun

$$\Phi_0 := \Phi$$
$$\Phi_{n+1} := \begin{cases} \Phi_n \cup \{\varphi_n\}, & \text{falls dies widerspruchsfrei ist} \\ \Phi_n, & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\Psi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n$$

Nach Konstruktion ist Φ_n widerspruchsfrei und somit auf Ψ, denn: Falls Ψ widersprüchlich wäre, so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit Φ_N widersprüchlich. Dies ist ein Widerspruch.

Behauptung. Ψ ist negationstreu.

Beweis. Angenommen $\Phi \nvdash \varphi$. Finde i mit $\neg\varphi = \varphi_i$. Dann gilt $\Phi_i \nvdash \varphi$. Also ist $\Phi_i \cup \{\varphi_i\}$ widerspruchsfrei. Nach Konstruktion ist $\neg\varphi \in \Phi_{i+1}$. Das heißt $\Phi_{i+1} \vdash \neg\varphi$ und daher $\Psi \vdash \neg\varphi$.□

Zusammenfassend. Falls Φ widerspruchsfrei, so ist $\Psi \subseteq \Phi$ widerspruchsfrei und negationstreu.
Genauso: Sei $E \subseteq L^S$ die Menge aller Formeln der Form $\exists x\varphi$ für ein x und ein φ. Dies ist eine abzählbare Menge, also listen wir sie auf:

$$\{\exists x_i\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Dann setze $\psi_i := \exists x_i\varphi_i \to \varphi_i\frac{w_i}{x_i}$. Setze dann $\Phi_0 := \Phi$ und $\Phi_{n+1} := \Phi \cup \{\psi_n\}$ – das heißt $\Phi_{n+1} = \Phi \cup \{\psi_0, \dots, \psi_n\}$ und $\Psi := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Phi_i$. Dann ist Ψ widerspruchsfrei und enthält Beispiele. Falls Φ widerspruchsfrei, so existiert $\Psi \supseteq \Phi$ widerspruchsfrei, das Beispiele enthält und $\Psi' \supseteq \Psi$ widerspruchsfrei, das Beispiele enthält und negationstreu ist. Aus dem Korollar folgt nun: Ψ' ist erfüllbar $[\mathcal{I}^{\Psi'} \models \Psi']$ und daher ist Φ erfüllbar.

2 Konsequenzen des Vollständigkeitssatzes

Da wir gesehen hatten, dass $\Phi \vdash \varphi$ genau dann gilt, wenn ein $\Phi_0 \supseteq \Phi$ endlich existiert mit $\Psi_0 \vdash \varphi$, erhalten wir

Satz 3.4 (Kompaktheitssatz, Endlichkeitssatz)

$$\Phi \models \varphi \;\text{ g. d. w. }\; \text{es existiert } \Phi_0 \subseteq \Phi \text{ endlich mit } \Phi_0 \models \varphi.$$

Erstes Gefühl des Unwohlseins: $\varphi_{\geq n}$: „Es gibt mindestens n verschiedene Elemente“. Betrachte nun $\Phi := \{\varphi_{\geq n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Es gilt $\mathfrak{A} \models \Phi \iff A$ hat unendlich viele Elemente.

Korollar 3.5 Es kann in der Sprache $\mathcal{L}_\emptyset$ keine Formel φ geben, mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff A \text{ ist unendlich.}$$

Beweis. Ang. doch. Dann gilt $\Phi \models \varphi$, also $\Phi \vdash \varphi$, also existiert $\Phi_0 = \{\varphi_{\geq 0}, \dots, \varphi_{\geq N}\}$ mit $\Phi_0 \vdash \varphi$. Sei nun A eine N-elementige endliche Menge. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \Phi_0$ aber $\mathfrak{A} \not\models \varphi$. □

Bemerkung Also gibt es auch keine Formel φ' mit $\mathfrak{A} \models \varphi' \iff A$ ist endlich. Denn ansonsten wäre $\varphi' = \neg\varphi$ im Widerspruch zu vorigem Korollar.

Definition Φ heißt <u>widersprüchlich</u>, falls für alle ψ gilt: $\Phi \vdash \psi$. [Dies ist gleichbedeutend mit $\exists\varphi : \Phi \vdash \varphi$ und $\Phi \vdash \neg\varphi$.]
Ansonsten heißt Φ <u>widerspruchsfrei</u>.

Bemerkung Φ hieß <u>erfüllbar</u>, g.d.w. es existiert $\mathcal{I} \models \Phi$. Korrektheit des Kalküls impliziert: Φ erfüllbar $\Rightarrow$ Φ ist widerspruchsfrei.
Die Vollständigkeit des Kalküls impliziert: Φ widerspruchsfrei $\Rightarrow$ Φ ist erfüllbar.
Φ widerspruchsfrei: Es existiert ψ mit $\Phi \nvdash \psi$. Also ist $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ widerspruchsfrei. Wir wissen ferner, dass $\Phi \not\models \psi$, da dies bedeutet $\exists\mathcal{I}(\mathcal{I} \models \Phi \wedge \mathcal{I} \not\models \psi)$. Also ist Φ erfüllbar.
Um den Vollständigkeitssatz zu beweisen, reicht es aus, für alle Φ zu zeigen: Falls Φ widerspruchsfrei ist, so ist Φ erfüllbar.

Lemma 3.1 Es gilt
$$\Phi \text{ erfüllbar} \iff \Phi \text{ widerspruchsfrei.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$" hatten wir uns bereits überlegt (folgt direkt aus Korrektheit).
„$\Leftarrow$" Ist nichttrivial und verwendet den Vollständigkeitssatz.[1]
Annahme: Das Lemma gilt und weiterhin $\Phi \models \varphi$. Es gilt zu zeigen, dass dann $\Phi \vdash \varphi$. Angenommen $\Phi \nvdash \varphi$. Es gilt $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsfrei ist. Also folgt nach dem Lemma: $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ ist erfüllbar, also existiert $\mathcal{I} \models \Phi \cup \{\neg\varphi\}$. Widerspruch zu $\Phi \models \varphi$. $\square$

Weitere Anwendungen der Endlichkeit bzw. Kompaktheit

1. Sei Φ eine Menge von Sätzen, so dass für jedes n ein endliches Modell $\mathfrak{A}_n$ mit $|\mathfrak{A}_n| \geq n$ und $\mathfrak{A}_n \models \Phi$ existiert. Dann gibt es ein unendliches Modell von Φ.

   Kurz gesagt: Falls Φ beliebig große endliche Modelle hat, so hat Φ ein unendliches Modell. Also Φ axiomatisiert die Eigenschaft „unendlich".

   Erinnerung Eine Eigenschaft P von Strukturen heißt <u>axiomatisierbar</u>, falls eine Menge von Sätzen Ψ existiert mit $\mathfrak{A} \models \Psi \iff \mathfrak{A}$ hat Eigenschaft P.

   Beweis. Betrachte $\Phi := \{\varphi_{\geq n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\Phi \cup \Psi$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \Phi \cup \Psi$. Wir müssen zeigen: $\Phi \cup \Psi$ ist erfüllbar. Es reicht aus zu zeigen, dass $\Phi \cup \Psi$ widerspruchsfrei ist. Nach der Endlichkeit reicht aus: Jede endliche Teilmenge von $\Phi \cup \Psi$ ist widerspruchsfrei. Aber falls $\Phi_0 \subseteq \{\varphi_{\geq i} \mid i \in \mathbb{N}\}$, so ist $\mathfrak{A}_N \models \Phi_0 \cup \Psi$. $\square$

2. Sei $S = \{+, \cdot, 0, 1\ \leq\}$ die Sprache der angeordneten Körper. Ein angeordneter Körper heißt <u>archimedisch</u>, falls für alle $x \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $x \leq t_n$. (Setze etwa $t_0 := 0$, $t_{k+1} := t_k + 1$ bzgl. der 0 des Körpers.)

   Archimedizität ist zentral für die grundsätzliche Theorie der Analysis. Die Definition „archimedisch" ist nicht in der Sprache S formuliert, da „$\mathbb{N}$" auftaucht.

   Frage. Ist „Archimedizität" axiomatisierbar?

   Betrachte $S^* := S \cup \{c\}$. Sei $\psi_n := c \geq t_n$ und $\Psi := \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Sei Φ eine S-Satzmenge, welche mindestens die Axiome der angeordneten Körper enthält. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \Phi \cup \Psi \iff \mathfrak{A} \models \Phi$ und $\mathfrak{A}$ ist nicht archimedisch. Sei nun Φ eine erfüllbare Satzmenge, z. B. $\mathfrak{A} \models \Phi$. Sei $\Psi_0 \subseteq \Psi$ endlich. Dann ist $\Phi \cup \Psi_0$ erfüllbar: Sei $N := \max\{n \mid t_n \text{ kommt in } \Psi_0 \text{ vor}\}$. Setze $\alpha^*(c) := \alpha(t_N)$ und $\alpha^* = \alpha$ für alle Symbole aus S. Dann ist

[1] Da dieses Lemma den Vollständigkeitssatz impliziert, wird es später genug sein, dieses Lemma zu beweisen.

$\mathfrak{A}^* = (A, \alpha^*)$ eine S^*-Struktur. Dann gilt $\mathfrak{A}^* \models \Phi \cup \Phi_0$. Daher folgt nach Kompaktheit, dass $\Phi \cup \Psi$ erfüllbar ist und daher gibt es einen nichtarchimedischen Körper.

Daraus folgt ferner: Der Begriff „Archimedizität" kann nicht axiomatisierbar sein. Denn: Angenommen Φ axiomatisiere die archimedischen angeordneten Körper, also ist $\mathfrak{A} \models \Phi$ g.d.w. $\mathfrak{A}$ ein archimedischer angeordneter Körper ist. Nach obigem Argument ist dann auch $\Phi \cup \Psi$ erfüllbar. Sei nun $\mathfrak{A}^* \models \Phi \cup \Psi$. Dann ist $\mathfrak{A}^* \models \Phi \Rightarrow \mathfrak{A}^*$ archimedisch und gleichzeitig $\mathfrak{A}^* \models \Psi \Rightarrow$ nichtarchimedisch.

Beispiel Betrachte $\mathcal{R} := (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ und $\mathrm{Th}(\mathcal{R}) := \{\varphi \mid \varphi \text{ ist ein } S\text{-Satz mit } \mathcal{R} \models \varphi\}$. Dann ist $\Phi := \mathrm{Th}(\mathcal{R})$ auch so eine Satzmenge und somit ist $\Phi \cup \Psi$ erfüllbar und daher existiert ein $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}(\mathcal{R}) \cup \Psi$, also ein nicht-archimedischer Körper, welcher elementaräquivalent zu $\mathbb{R}$ ist. So etwas nennt man ein Nichtstandardmodell von $\mathbb{R}$.