Mathematische Logik und Mengenlehre

Oliver Gertke

21. Juni 2019

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung

Dieses Dokument basiert inhaltlich auf der Vorlesung „Mathematische Logik und Mengenlehre“, gehalten von Prof. Dr. Benedikt Löwe an der Universität Hamburg im Sommersemester 2019. Es hat den Anspruch, eine etwas umstrukturierte und überarbeitete Mitschrift zu sein. Trotz Bemühungen übernehmen wir keine Gewähr dafür, dass dieses Dokument fehlerfrei ist. Verbesserungsvorschläge oder Bemerkungen können gerne persönlich oder per E-Mail unter der Adresse **mitschrift.mlum@gmail.com** erfolgen.

Wir vereinbaren zudem noch einige Konventionen. Dazu gehören:

1. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ enthalten die 0. Für die positiven natürlichen Zahlen schreiben wir $\mathbb{N}^+$.

2. Die Buchstaben ’k’, ’l’, ’m’ und ’n’ stehen für natürliche Zahlen – vom Kontext abhängig sogar nur positiv.

3. Ebenso dem Kontext entsprechend können ’k’ und ’l’ auch für ganze Zahlen stehen.

4. Haben wir eine Familie $(\zeta_i)_{i\in I}$ definiert, so schreiben wir ’Für alle ζ_i gilt’ statt ’Für alle $i \in I$ gilt für ζ_i’. Ein Beispiel wäre die endliche Folge A in der Definition 1.1.16 auf Seite 9.

5. Für Ausdrücke wie „S-Term“ können wir das S auch weglassen, falls dies aus dem Kontext ersichtlich ist.

6. Im Verlauf werden Deklarationen für bestimmte Symbole festgelegt, die immer gelten, es sei denn, es ist anders festgelegt. Ein Beispiel dafür ist, dass $\mathfrak{I} = (A, \alpha, \beta)$ immer eine Interpretation mit Struktur (A, α) und Belegung β in A sein soll. Das heißt, dass ein vorkommendes A ab dem Punkt immer ein Universum der Interpretation $\mathfrak{I}$ ist. Diese allgemeinen Deklarationen werden nach der jeweiligen Definition angegeben.

7. Wir schreiben $\mathbb{Q}^+$ für die positiven, $\mathbb{Q}_0^+$ für die nichtnegativen, $\mathbb{Q}^-$ für die negativen und $\mathbb{Q}_0^-$ für die nichtpositiven rationalen Zahlen.

Zum Abschluss noch eine Bemerkung. Die Boxen, an denen links das Symbol 🔧 zu sehen ist, sind direkt beim Mitschreiben entstanden und noch nicht überarbeitet.

Teil I.

Mathematische Logik

1. Syntax der Sprachen erster Stufe

1.1. Terme

1.1.1 **Definition** (Logische Symbole). Als **logische Symbole** definieren wir folgende Zeichen:

(1) **Quantoren**: '$\exists$' '$\forall$'

(2) **Junktoren**: '$\wedge$' '$\vee$' '$\rightarrow$' '$\neg$'

(3) **Gleichheit**: '$=$'

(4) **Klammern** und **Komma**: '(' ')' ','

(5) **Variablen**: Elemente einer (unendlichen) Menge, welche wir mit S_V bezeichnen. Andere Schreibweisen dafür sind auch V oder Var.

Die Menge der logischen Symbole bezeichnen wir mit S_L.

1.1.2 **Definition** (Symbolmenge und Signatur). Als **Symbolmenge** definieren wir eine Menge S bestehend aus disjunkten Vereinigungen folgender Mengen:

(1) S_K, die Menge der **Konstantensymbole**.

(2) S_F, die Menge der **Funktionensymbole**.

(3) S_R, die Menge der **Relationensymbole**.

Eine Funktion $\sigma : S_R \cup S_F \rightarrow \mathbb{N}^+$ nennen wir **Signatur** für S. Diese ordnet die Relationen- und Funktionensymbole ihrer **Stelligkeit** zu. Für eine n-stellige Relation $\dot{R} \in S_R$ oder Funktion $\dot{f} \in S_F$ ist also $\sigma(\dot{R}) = n$ oder $\sigma(\dot{f}) = n$.

1.1.3 **Bemerkung** (Symbolmenge und Signatur). Ab jetzt seien immer S eine beliebige Symbolmenge und σ eine Signatur für S, falls nichts anderes angegeben ist.

1.1.4 **Beispiel** (Bekannte Symbolmengen 1). Für abelsche Gruppen benutzen wir eine Symbolmenge S mit $\dot{+}, \dot{-}, \dot{0} \in S$, wobei die Symbole wie folgt zu interpretieren sind.

(1) $\dot{+} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{+}) = 2$ als die Verknüpfung. In $\mathbb{Z}$ ist dies die Addition $+$.

(2) $\dot{-} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{-}) = 1$ als die Inversenabbildung. In $\mathbb{Z}$ ist dies das negative Vorzeichen einer Zahl, zum Beispiel -3. Es wird also die 3 auf ihr Inverses abgebildet, die -3.

(3) $\dot{0} \in S_K$ als das neutrale Element der Verknüpfung $\dot{+}$. In $\mathbb{Z}$ ist dies die 0.

1.1.5 **Beispiel** (Bekannte Symbolmengen 2). Für Äquivalenzrelationen benutzen wir eine Symbolmenge S mit $\dot{R} \in S$. Dabei ist $\dot{R} \in S_R$ die Relation mit $\sigma(\dot{R}) = 2$.

1.1.6 **Definition** (Alphabet und Zeichenketten). Wir nennen $\Sigma := S_L \cup S$ das **Alphabet** der Sprache mit Symbolmenge S. Eine endliche Folge von Elementen aus Σ heißt S-**Zeichenkette**. Die Menge aller Zeichenketten bezeichnen wir mit Σ^*.

1.1.7 **Beispiel** (Zeichenketten). Folgendes sind Zeichenketten:

(a) $\wedge\exists(((,\exists v \to$

(b) $)()(\to\to\to$

(c) $\exists x(x = x)$

(d) $\forall x(x = x)$

(e) $\exists x\neg(x = x)$

(f) $\exists x(\neg x = x)$

1.1.8 **Definition** (Vorkommende Variablen). Sei ζ eine Zeichenkette. Wir schreiben $\mathrm{var}(\zeta)$ für die Menge der in ζ vorkommenden Variablen.

1.1.9 **Definition** (Term). Wir definieren die Menge aller S-**Terme**, geschrieben T^S, rekursiv wie folgt:

(1) $T_0^S := S_V$.

(2) $T_1^S := T_0^S \cup S_K$.

(3) $T_{n+1}^S := T_n^S \cup \left\{ \dot{f}(t_1, \ldots, t_k) \,\middle|\, \dot{f} \in S_F \text{ mit } \sigma(\dot{f}) = k \text{ und } t_1, \ldots, t_k \in T_n^S \right\}$.

(4) $T^S := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n^S$.

1.1.10

Lemma (Induktion von Mengen). Seien $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen mit $Y := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ und X eine Menge mit $X \subseteq Y$. Seien zudem folgende Eigenschaften erfüllt:

(1) $Y_0 \subseteq X$.

(2) Falls $Y_n \subseteq X$, dann $Y_{n+1} \subseteq X$.

Dann gilt $Y = X$.

Beweis. Wir beweisen dies durch vollständige Induktion. Sei

$$Z := \{n \in \mathbb{N} \,|\, Y_n \subseteq X\} \,.$$

Nach (1) folgt $0 \in Z$. Sei nun $n \in Z$. Dann gilt $Y_n \subseteq X$. Durch (2) folgt nun $Y_{n+1} \subseteq X$, womit auch $n+1 \in Z$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt $Z = \mathbb{N}$, also $Y_n \subseteq X$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insgesamt gilt

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n \subseteq X \subseteq Y \,,$$

also $Y = X$. □

1.1.11

Satz (Terminduktion). Seien $X \subseteq T^S$ und folgende Eigenschaften erfüllt:

(1) $T_1^S \subseteq X$.

(2) Für alle $\dot{f} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{f}) = k$ und $t_1 \ldots, t_k \in X$ gilt $\dot{f}(t_1, \ldots, t_k) \in X$.

Dann gilt $T^S = X$.

Beweis. Wegen des Lemmas 1.1.10 über Induktion von Mengen reicht es, folgende Eigenschaften zu zeigen:

(a) $T_0^S \subseteq X$.

(b) Falls $T_n^S \subseteq X$, dann $T_{n+1}^S \subseteq X$.

Die Eigenschaft (a) folgt aus $T_0^S \subseteq T_1^S$ und (1). Damit ist (b) wegen (1) für $n = 0$ erfüllt. Es bleibt die Eigenschaft (b) für $n \geq 1$ zu zeigen. Seien dazu $T_n^S \subseteq X$ mit $n \geq 1$ und $\dot{f} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{f}) = k$. Für $t_1, \ldots, t_k \in T_n^S$ gilt nun $t_1, \ldots, t_k \in X$ und zusammen mit (2) auch $\dot{f}(t_1, \ldots, t_k) \in X$, also $T_{n+1}^S \subseteq X$. Nach dem Lemma folgt nun $T^S = X$. □

1.1.12 **Beispiel** (Terminduktion 1). Wir wollen zeigen, dass die leere Zeichenkette kein Term ist. Sei dazu

$$X = \left\{ t \in T^S \,\middle|\, t \text{ ist nicht die leere Zeichenkette} \right\} .$$

Es reicht zu zeigen, dass die Eigenschaften (1) und (2) aus dem Satz 1.1.11 über Terminduktion gelten.

(1) Da Variablen und Konstanten jeweils Zeichenketten der Länge 1 sind, folgt $T_1^S \subseteq X$.

(2) Seien nun $\dot{f} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{f}) = k$ und $t_1, \ldots, t_k \in X$. Dann ist $\dot{f}(t_1, \ldots, t_k) \in X$, denn wegen der Zeichen '$\dot{f}$', '(' und ')' ist die Zeichenkettenlänge des Terms mindestens 3.

Nach dem Satz folgt nun $T^S = X$.

1.1.13 **Beispiel** (Terminduktion 2). Wir wollen zeigen, dass kein Term mit dem Symbol '(' beginnt. Sei dazu

$$X = \left\{ t \in T^S \,\middle|\, t \text{ beginnt nicht mit '('} \right\} .$$

Es reicht zu zeigen, dass die Eigenschaften (1) und (2) aus dem Satz 1.1.11 über Terminduktion gelten.

(1) Da Variablen und Konstanten jeweils Zeichenketten der Länge 1 sind und keine Klammern, folgt $T_1^S \subseteq X$.

(2) Seien nun $\dot{f} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{f}) = k$ und $t_1, \ldots, t_k \in X$. Da $\dot{f}(t_1, \ldots, t_k)$ mit dem Symbol $\dot{f}$ anfängt, folgt $\dot{f}(t_1, \ldots, t_k) \in X$.

Nach dem Satz folgt nun $T^S = X$.

1.1.14

Beispiel (Terminduktion 3). Wir wollen zeigen, dass kein Term die Zeichenkette '((' enthält. Sei dazu

$$X = \left\{ t \in T^S \,\middle|\, t \text{ enthält nicht '(('} \right\} .$$

Es reicht zu zeigen, dass die Eigenschaften (1) und (2) aus dem Satz 1.1.11 über Terminduktion gelten.

(1) Da Variablen und Konstanten jeweils Zeichenketten der Länge 1 sind, enthalten sie keine Zeichenketten der Länge 2, also auch nicht '((', womit $T_1^S \subseteq X$ folgt.

(2) Seien nun $\dot{f} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{f}) = k$ und $t_1, \ldots, t_k \in X$. In dem Term $\dot{f}(t_1, \ldots, t_k)$ ist an der rot markierten Stelle die einzige Möglichkeit, an der die Zeichenkette '((' vorkommen könnte, indem t_1 mit dem Symbol '(' beginnt. Aus dem Beispiel 1.1.13 wissen wir, dass kein Term mit dem Symbol '(' anfängt. Also ist auch $\dot{f}(t_1, \ldots, t_k) \in X$.

Nach dem Satz folgt nun $T^S = X$.

Achtung: Dies gilt nicht für '))', denn für die Symbolmenge $S = \{\dot{f}\}$ und $t \in T^S$, wobei $\dot{f} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{f}) = 2$, ist andererseits die Zeichenkette '))' in dem Term $\dot{f}(t, \dot{f}(t, t))$ enthalten.

1.1.15

Bemerkung (Infixnotation). Seien $\dot{+} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{+}) = 2$ und $t_1, t_2 \in T^S$. Wir können statt der formalen Schreibweise $\dot{+}(t_1, t_2)$ auch die semi-formale Infixnotation $t_1 \dot{+} t_2$ benutzen. Diese ist aber streng genommen syntaktisch nicht korrekt.

1.1.16

Definition (Termableitung). Sei $A = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ eine endliche Folge von Zeichenketten. Wir nennen A eine S-**Termableitung** von ζ_n, falls für alle ζ_i eine der folgenden Eigenschaften gilt:

(T1) $\zeta_i \in T_1^S$.

(T2) Es existiert ein $\dot{f} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{f}) = k$, so dass $\zeta_i = \dot{f}(\zeta_{i_1}, \ldots, \zeta_{i_k})$ ist mit $i_j < i$ für alle i_j.

Existiert zu einer Zeichenkette ζ eine endliche Folge von Zeichenketten, welche eine S-Termableitung von ζ ist, so nennen wir ζ auch S-**termableitbar**.

1.1.17 **Beispiel** (Termableitung 1). Seien $\dot{+} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{+}) = 2$ und $x, y \in S_V$. Für die Zeichenkette $\zeta_4 = \dot{+}(x, \dot{+}(x, y))$ sieht eine Termableitung $(\zeta_1, \ldots, \zeta_4)$ wie folgt aus:

Zeichenkette	Ableitungsregel
$\zeta_1 = x$	(T1)
$\zeta_2 = y$	(T1)
$\zeta_3 = \dot{+}(x, y)$	(T2) mit ζ_1 und ζ_2
$\zeta_4 = \dot{+}(x, \dot{+}(x, y))$	(T2) mit ζ_1 und ζ_3

1.1.18 **Beispiel** (Termableitung 2). Seien $\dot{c} \in S_K$, $\dot{f}, \dot{g} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{f}) = 1$ und $\sigma(\dot{g}) = 2$. Seien zudem $x, y \in S_V$. Für die Zeichenkette $\zeta_6 = \dot{g}(x, \dot{f}(\dot{g}(y, \dot{c})))$ sehen verschiedene Termableitungen $(\zeta_1, \ldots, \zeta_6)$ wie folgt aus:

Zeichenkette	Ableitungsregel
$\zeta_1 = y$	(T1)
$\zeta_2 = x$	(T1)
$\zeta_3 = \dot{c}$	(T1)
$\zeta_4 = \dot{g}(y, \dot{c})$	(T2) mit ζ_1 und ζ_3
$\zeta_5 = \dot{f}(\dot{g}(y, \dot{c}))$	(T2) mit ζ_4
$\zeta_6 = \dot{g}(x, \dot{f}(\dot{g}(y, \dot{c})))$	(T2) mit ζ_2 und ζ_5
$\zeta_1 = y$	(T1)
$\zeta_2 = \dot{c}$	(T1)
$\zeta_3 = x$	(T1)
$\zeta_4 = \dot{g}(y, \dot{c})$	(T2) mit ζ_1 und ζ_2
$\zeta_5 = \dot{f}(\dot{g}(y, \dot{c}))$	(T2) mit ζ_4
$\zeta_6 = \dot{g}(x, \dot{f}(\dot{g}(y, \dot{c})))$	(T2) mit ζ_3 und ζ_5
$\zeta_1 = y$	(T1)
$\zeta_2 = \dot{c}$	(T1)
$\zeta_3 = \dot{g}(y, \dot{c})$	(T2) mit ζ_1 und ζ_2
$\zeta_4 = \dot{f}(\dot{g}(y, \dot{c}))$	(T2) mit ζ_3
$\zeta_5 = x$	(T1)
$\zeta_6 = \dot{g}(x, \dot{f}(\dot{g}(y, \dot{c})))$	(T2) mit ζ_4 und ζ_5

1.1.19 **Bemerkung** (Zusammenfügen von Termableitungen). Seien jeweils $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ und $(\zeta_{n+1}, \ldots, \zeta_m)$ Termableitungen. Dann ist $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \zeta_{n+1}, \ldots, \zeta_m)$ ebenfalls eine Termableitung.

1.1.20

Satz (Ableitbarkeit von Termen)**.** Eine Zeichenkette ist genau dann ein Term, wenn sie termableitbar ist.

Beweis. Wir beweisen zunächst, dass jede termableitbare Zeichenkette ein Term ist, was wir durch Induktion nach Länge der Termableitung zeigen. Ist (ζ) eine Termableitung der Zeichenkette ζ, so muss ζ die Ableitungsregel (T1) erfüllen, womit ζ als Variable oder Konstante ein Term ist. Wir nehmen nun an, dass jede termableitbare Zeichenkette mit Termableitung der Länge n oder kleiner ein Term ist. Sei nun ζ_{n+1} eine Zeichenkette und $(\zeta_1, \dots, \zeta_{n+1})$ eine Termableitung von ζ_{n+1}. Erfüllt ζ_{n+1} die Ableitungsregel (T1), so ist ζ_{n+1} ein Term. Falls dies nicht der Fall ist, so muss ζ_{n+1} die Ableitungsregel (T2) erfüllen. Dann ist $\zeta_{n+1} = \dot{f}(\zeta_{i_1}, \dots, \zeta_{i_k})$ für ein $\dot{f} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{f}) = k$ und $i_j < n+1$ für alle i_j. Jedes der ζ_{i_j} ist termableitbar durch die Termableitung $(\zeta_1, \dots, \zeta_{i_j})$, welche eine Länge kleiner als $n+1$ besitzt. Wegen der Annahme sind nun alle ζ_{i_j} Terme, womit auch ζ_{n+1} ein Term ist. Insgesamt ist jede termableitbare Zeichenkette ein Term.

Nun zeigen wir, dass jeder Term auch termableitbar ist. Dies beweisen wir mittels Terminduktion. Wir betrachten dazu die Menge

$$X := \left\{ \zeta \in T^S \,\middle|\, \zeta \text{ ist termableitbar} \right\} .$$

Ist $\zeta \in T_1^S$, so ist (ζ) eine Termableitung von ζ. Demnach ist $T_1^S \subseteq X$. Seien nun $\zeta_1, \dots, \zeta_k \in X$ und $\dot{f} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{f}) = k$. Es existieren für alle ζ_i nun Termableitungen $(\zeta_{i_1}, \dots, \zeta_{i_{j_i}})$ der Länge j_i, wobei $\zeta_{i_{j_i}} = \zeta_i$ ist. Insgesamt ist nun

$$(\zeta_{1_1}, \dots, \zeta_{1_{j_1}}, \dots, \zeta_{k_1}, \dots, \zeta_{k_{j_k}}, \dot{f}(\zeta_1, \dots, \zeta_k))$$

eine Termableitung des Terms $\dot{f}(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$, womit dieser in X enthalten ist. Nach dem Prinzip der Terminduktion folgt $X = T^S$, womit jeder Term auch termableitbar ist. □

1.2. Formeln

1.2.1 **Definition** (Atomare Formel). Wir definieren **atomare S-Formeln** wie folgt:

(1) Falls $t_1, t_2 \in T^S$, so sei $t_1 = t_2$ eine atomare S-Formel.

(2) Falls $\dot{R} \in S_R$ mit $\sigma(\dot{R}) = k$ und $t_1, \ldots, t_k \in T^S$, so ist $\dot{R}(t_1, \ldots, t_k)$ eine atomare S-Formel.

(3) Es gibt keine anderen atomaren S-Formeln.

Wir schreiben At^S für die Menge aller atomaren S-Formeln.

1.2.2 **Definition** (Formel). Wir definieren die Menge aller S-**Formeln**, geschrieben F^S oder auch L^S, rekursiv wie folgt:

(1) $F_0^S := \mathrm{At}^S$.

(2) Angenommen F_n^S ist definiert, so setzen wir

$$\begin{aligned} F_{n+1}^S := &\left\{(\varphi \wedge \psi) \,\middle|\, \varphi, \psi \in F_n^S\right\} \cup \left\{\exists x \varphi \,\middle|\, \varphi \in F_n^S,\ x \text{ Variable}\right\} \\ &\cup \left\{(\varphi \rightarrow \psi) \,\middle|\, \varphi, \psi \in F_n^S\right\} \cup \left\{\forall x \varphi \,\middle|\, \varphi \in F_n^S,\ x \text{ Variable}\right\} \\ &\cup \left\{(\varphi \vee \psi) \,\middle|\, \varphi, \psi \in F_n^S\right\} \cup \left\{\neg \varphi \,\middle|\, \varphi \in F_n^S\right\}. \end{aligned}$$

(3) $L^S := F^S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n^S$.

1.2.3 **Bemerkung** (Klammern). Seien $t_1, t_2 \in T^S$. Dann ist $(t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_1)$ eine Formel, die Zeichenkette $t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_2$ jedoch nicht. Ebenso ist $\forall x \neg x = x$ eine Formel, nicht jedoch $\forall x(\neg(x = x))$. Es ist also für die Syntax eine korrekte Schreibweise entscheidend.

1.2.4 **Beispiel** (Formel 1). Sei $S = S_R = \{\dot{Q}\}$ eine Symbolmenge mit $\sigma(\dot{Q}) = 2$. Dann ist $\forall x \dot{Q}(x, x)$ eine Formel, denn $\dot{Q}(x, x) \in \mathrm{At}^S$ mit $x \in S_V$ und damit $\forall x \dot{Q}(x, x) \in F_1^S$.

1.2.5 **Beispiel** (Formel 2). Sei $S = S_R = \{\dot{P}, \dot{R}\}$ eine Symbolmenge mit $\sigma(\dot{P}) = 1$ und $\sigma(\dot{R}) = 3$. Dann ist $\forall y(\dot{P}(x) \rightarrow \dot{R}(x, y, z))$ eine Formel, denn für $x, z \in T^S$ und $y \in S_V$ sind $\dot{P}(x), \dot{R}(x, y, z) \in \mathrm{At}^S$ und damit $(\dot{P}(x) \rightarrow \dot{R}(x, y, z)) \in F_1^S$, womit insgesamt $\forall y(\dot{P}(x) \rightarrow \dot{R}(x, y, z)) \in F_2^S$

1.2.6 **Beispiel** (Formel 3). Sei $S = S_R = \{\dot{Q}\}$ eine Symbolmenge mit $\sigma(\dot{Q}) = 2$. Dann ist $\forall z \forall z \exists z \dot{Q}(y, z)$ eine Formel, denn für $y \in T^S$ und $z \in S_V$ ist $\dot{Q}(y, z) \in \mathrm{At}^S$ und somit $\forall z \dot{Q}(y, z) \in F_1^S$, also $\forall z \forall z \dot{Q}(y, z) \in F_2^S$ und schließlich $\forall z \forall z \exists z \dot{Q}(y, z) \in F_3^S$.

1.2.7 **Satz** (Formelinduktion). Seien $X \subseteq L^S$ und folgende Eigenschaften erfüllt:

(1) $\mathrm{At}^S \subseteq X$.

(2) Für alle $\varphi, \psi \in X$ sind $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi), \neg\varphi, \forall x \varphi, \exists x \varphi \in X$, wobei $x \in S_V$.

Dann gilt $X = L^S$.

Beweis. Genau wie im Beweis von Satz 1.1.11 über Terminduktion. □

1.2.8 **Definition** (Formelableitung). Sei $A = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ eine endliche Folge von Zeichenketten. Wir nennen A eine S-**Formelableitung** von ζ_n, falls für alle ζ_i eine der folgenden Eigenschaften gilt:

(F1) ζ_i ist $t = t'$ für $t, t' \in T^S$.

(F2) ζ_i ist $\dot{R}(t_1, \ldots, t_k)$ für $\dot{R} \in S_R$ mit $\sigma(\dot{R}) = k$ und $t_1, \ldots, t_k \in T^S$.

(F3) Es gibt ein $j < i$, so dass ζ_i von der Form $\neg\zeta_j$ ist.

(F4) Es gibt $j, j' < i$, so dass ζ_i von der Form $(\zeta_j \wedge \zeta_{j'})$ ist.

(F5) Es gibt $j, j' < i$, so dass ζ_i von der Form $(\zeta_j \vee \zeta_{j'})$ ist.

(F6) Es gibt $j, j' < i$, so dass ζ_i von der Form $(\zeta_j \to \zeta_{j'})$ ist.

(F7) Es gibt ein $j < i$ und ein $x \in S_V$, so dass ζ_i von der Form $\exists x \zeta_j$ ist.

(F8) Es gibt ein $j < i$ und ein $x \in S_V$, so dass ζ_i von der Form $\forall x \zeta_j$ ist.

Existiert zu einer Zeichenkette ζ eine endliche Folge von Zeichenketten, welche eine S-Formelableitung von ζ ist, so nennen wir ζ auch S-**formelableitbar**.

1.2.9 **Satz** (Ableitbarkeit von Formeln). Eine Zeichenkette ist genau dann eine Formel, wenn sie formelableitbar ist.

Beweis. Genau wie in Satz 1.1.20 über Ableitbarkeit von Termen. □

1.2.10 **Definition** (Quantorvariablen und Wirkungsbereich). Seien $\varphi \in L^S$ und $x \in S_V$. In den Formeln $\exists x\varphi$ und $\forall x\varphi$ nennen wir x die **Quantorvariable** und φ den **Wirkungsbereich** von $\exists x$ beziehungsweise $\forall y$.

1.2.11 **Beispiel** (Quantorvariablen und Wirkungsbereich). Seien $S = \{\dot{R}\}$ mit $\dot{R} \in S_R$ und $\sigma(\dot{R}) = 2$ eine Symbolmenge, $x, y \in S_V$ und $\varphi \in L^S$. In der Formel $\exists x x = y$ ist x die Quantorvariable von $\exists x$ und $x = y$ der Wirkungsbereich von $\exists x$. In der Formel $\forall x \exists y(\dot{R}(x, y) \to x = y)$ ist $\exists y(\dot{R}(x, y)$ der Wirkungsbereich von $\forall x$.

1.2.12 **Definition** (Freie und gebundene Variablen). Seien $\varphi \in L^S$ und $x \in S_V$. Wir sagen, dass x in φ **frei** vorkommt, wenn x an mindestens einer Stelle in φ nicht im Wirkungsbereich eines Quantors innerhalb von φ mit Quantorvariable x vorkommt. Wir schreiben $\text{frei}(\varphi)$ für die Menge der in φ frei vorkommenden Variablen. Kommt eine Variable in einer Formel vor, jedoch nicht frei, so nennen wir sie **gebunden**.

1.2.13 **Beispiel** (Freie und gebundene Variablen). Seien S eine Symbolmenge und $x, y \in S_V$. In der Formel $x = y$ kommen x und y frei vor. In der Formel $\forall x \forall y x = y$ jedoch nicht, denn x und y sind beide jeweils an einem Quantor vor ihnen gebunden.

1.2.14 **Definition** (Satz). Sei $\varphi \in L^S$. Ist $\text{frei}(\varphi) = \emptyset$, so nennen wir φ einen S-**Satz**.

1.2.15 **Beispiel** (Satz). Seien $x, y \in S_V$. Die Formel $\forall x \forall y x = y$ ist ein Satz, $x = y$ jedoch nicht.

1.2.16 **Definition** (Quantorenfreie Formeln). Eine Formel $\varphi \in L^S$ heißt **quantorenfrei**, falls es eine Formelableitung von φ gibt, welche die Ableitungsregeln (F7) und (F8) nicht verwendet.

1.2.17 **Bemerkung** (Quantorenfreie Formeln). Äquivalent zur obigen Definition wäre es auch zu sagen, dass φ quantorenfrei ist, falls $\forall$ und $\exists$ nicht vorkommen. (Vergleiche den Äquivalenzbeweis in Übungsaufgabe 7)

1.2.18 **Definition** (Universelle Ausdrücke und Sätze). Eine Formel φ heißt **universeller Ausdruck**, falls es eine quantorenfreie Formel ψ gibt, so dass φ von der Form $\forall x_1 \ldots \forall x_k \psi$ ist. Ein universeller Ausdruck φ heißt **universeller Satz**, falls φ ein Satz ist.

1.2.19 **Beispiel** (Universelle Ausdrücke und Sätze). Die Formel $\forall x \forall y x = y$ ist ein universeller Satz, jedoch nicht $\forall x \forall x \forall y \exists y y = x$.

1.3. Hinblick auf Rekursion

Wir können Rekursion auf $\mathbb{N}$, T^S und L^S definieren. Warum dies geht, werden wir noch später beweisen.

1.3.1 **Satz** (Rekursion auf $\mathbb{N}$). Seien X eine nichtleere Menge, $a_0 \in X$ und die Funktion $R : X \to X$ gegeben. Wir setzen rekursiv:

(1) $F(0) := a_0$.

(2) $F(n+1) := R(F(n))$.

Nach dem Rekursionsprinzip existiert nun eine eindeutige Funktion $F : \mathbb{N} \to X$, welche die obigen Rekursionsgleichungen erfüllt.

Beweis. Folgt aus dem Prinzip der vollständigen Induktion der natürlichen Zahlen. □

1.3.2 **Bemerkung** (Rekursionsvorschrift und Rekursionsgleichungen). Die oben vorkommende Abbildung R nennen wir **Rekursionsvorschrift** und die Gleichungen (1) und (2) **Rekursionsgleichungen**.

1.3.3 **Beispiel** (Rekursion auf $\mathbb{N}$). Wir setzen $a_0 := S_V$, $a_1 := S_V \cup S_K$ und definieren die Rekursionsvorschrift $R : X \to X$ wie folgt:

$$R(M) := M \cup \left\{ \dot{f}(t_1, \ldots, t_k) \,\middle|\, \dot{f} \in S_F,\ \sigma(\dot{f}) = k \text{ und } t_1, \ldots, t_k \in M \right\} .$$

Nun existiert nach dem Satz 1.3.1 eine eindeutige Funktion, welche die Rekursionsgleichungen (1) und (2) aus dem Satz erfüllt. Diese ist T^S, wobei $T^S_n = T^S(n)$.

1.3.4 **Satz** (Rekursion auf T^S). Seien X eine beliebige Menge und folgende Rekursionsvorschriften gegeben:

$$\begin{aligned} B_V &: S_V \to X\,. \\ B_K &: S_K \to X\,. \\ R_{\dot f} &: X^k \to X \quad \text{für jedes } \dot f \in S_F \text{ mit } \sigma(\dot f) = k. \end{aligned}$$

Wir setzen nun folgende Rekursionsgleichungen:

(1) $F(t) = B_V(t)$, falls $t \in S_V$.

(2) $F(t) = B_K(t)$, falls $t \in S_K$.

(3) $F(\dot f(t_1, \ldots, t_k)) = R_{\dot f}(F(t_1), \ldots, F(t_k))$, falls $\dot f \in S_F$ mit $\sigma(\dot f) = k$.

Nach dem Rekursionsprinzip existiert nun eine eindeutige Funktion $F : T^S \to X$, welche die obigen Rekursionsgleichungen erfüllt.

Beweis. Folgt später. □

1.3.5 **Beispiel** (Rekursion auf T^S 1). Die Menge der in einem Term $t \in T^S$ vorkommenden Variablen können wir auch rekursiv bestimmen. Seien dazu $X = \mathcal{P}(S_V)$ und die Rekursionsgleichungen wie folgt gesetzt:

$$\begin{aligned} B_V(x) &:= \{x\}\,. \\ B_K(\dot c) &:= \emptyset\,. \\ R_{\dot f}(X_1, \ldots, X_k) &:= \bigcup_{i=1}^{k} X_k \quad \text{für jedes } \dot f \in S_F \text{ mit } \sigma(\dot f) = k. \end{aligned}$$

Nun existiert nach dem Satz 1.3.4 eine eindeutige Funktion, welche die Rekursionsgleichungen (1) bis (3) aus dem Satz erfüllt. Diese ist $\mathrm{var} : T^S \to \mathcal{P}(S_V)$, also var aus der Definition 1.1.8 als Funktion eingeschränkt auf der Menge der Terme.

1.3.6 **Beispiel** (Rekursion auf T^S 2)**.** Seien $\dot{g} \in S_F$, $X = \mathbb{N}$ und die Rekursionsgleichungen wie folgt gesetzt:

$$B_V(x) := 0\,.$$
$$B_K(\dot{c}) := 0\,.$$
$$R_{\dot{f}}(X_1, \ldots, X_k) := \begin{cases} \max_{i=1}^k X_i & \text{falls } \dot{g} \neq \dot{f} \\ \max_{i=1}^k X_i + 1 & \text{falls } \dot{g} = \dot{f} \end{cases}$$

für jedes $\dot{f} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{f}) = k$. Nun existiert nach dem Satz 1.3.4 eine eindeutige Funktion, welche die Rekursionsgleichungen (1) bis (3) aus dem Satz erfüllt. Diese bezeichnen wir mit $\mathrm{ST}_{\dot{g}}$ und nennen sie $\dot{g}$-Schachtelungstiefe.

1.3.7 **Satz** (Rekursion auf L^S)**.** Seien X eine beliebige Menge und folgende Rekursionsvorschriften gegeben.

$$B : \mathrm{At}^S \to X\,.$$
$$R_\wedge, R_\vee, R_\rightarrow : X^2 \to X\,.$$
$$R_\neg : X \to X\,.$$
$$R_\forall, R_\exists : S_V \times X \to X\,.$$

Seien außerdem folgende Rekursionsgleichungen gegeben:

(1) $F(\varphi) = B(\varphi)$ für $\varphi \in \mathrm{At}^S$.

(2) $F((\varphi \wedge \psi)) = R_\wedge(F(\varphi), F(\psi))$.

(3) $F((\varphi \vee \psi)) = R_\vee(F(\varphi), F(\psi))$.

(4) $F((\varphi \rightarrow \psi)) = R_\rightarrow(F(\varphi), F(\psi))$.

(5) $F(\neg\varphi) = R_\neg(F(\varphi))$.

(6) $F(\forall x \varphi) = R_\forall(x, F(\varphi))$.

(7) $F(\exists x \varphi) = R_\exists(x, F(\varphi))$.

Nach dem Rekursionsprinzip existiert nun eine eindeutige Funktion $F : L^S \to X$, welche die obigen Rekursionsgleichungen erfüllt.

Beweis. Folgt noch. □

1.3.8

Beispiel (Rekursion auf L^S 1)**.** Die Menge der in einer Formel $\varphi \in L^S$ vorkommenden Variablen können wir ebenfalls rekursiv bestimmen. Seien dazu $X = \mathcal{P}(S_V)$ und die Rekursionsgleichungen wie folgt gesetzt:

$$\begin{aligned}
B(t_1 = t_2) &:= \operatorname{var}(t_1) \cup \operatorname{var}(t_2) \quad \text{für } t_1, t_2 \in T^S. \\
B(\dot{R}(t_1, \ldots, t_k)) &:= \bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{var}(t_i) \quad \text{für } \dot{R} \in S_R \text{ mit } \sigma(\dot{R}) = k \text{ und } t_1, \ldots, t_k \in T^S. \\
R_\wedge, R_\vee, R_\rightarrow(M, N) &:= M \cup N\,. \\
R_\neg(M) &:= M\,. \\
R_\forall, R_\exists(x, M) &:= M \cup \{x\}\,.
\end{aligned}$$

Nun existiert nach dem Satz 1.3.7 eine eindeutige Funktion, welche die Rekursionsgleichungen (1) bis (7) aus dem Satz erfüllt. Diese ist $\operatorname{var} : L^S \to \mathcal{P}(S_V)$, also var aus der Definition 1.1.8 als Funktion.

1.3.9

Beispiel (Rekursion auf L^S 2)**.** Wir können die Menge der freien Variablen auch rekursiv bestimmen. Seien dazu $X = \mathcal{P}(S_V)$ und die Rekursionsgleichungen wie folgt gesetzt:

$$\begin{aligned}
B(\varphi) &:= \operatorname{var}(\varphi)\,. \\
R_\wedge, R_\vee, R_\rightarrow(M, N) &:= M \cup N\,. \\
R_\neg(M) &:= M\,. \\
R_\forall, R_\exists(x, M) &:= M \setminus \{x\}\,.
\end{aligned}$$

Nun existiert nach dem Satz 1.3.7 eine eindeutige Funktion, welche die Rekursionsgleichungen (1) bis (7) aus dem Satz erfüllt. Diese ist $\operatorname{frei} : L^S \to \mathcal{P}(S_V)$, also frei aus der Definition 1.2.12

2. Semantik der Sprachen erster Stufe

2.1. Strukturen und Interpretation

2.1.1 **Definition** (Struktur). Wir definieren eine S-**Struktur** als ein Tupel $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$, wobei A eine nicht leere Menge ist, welche wir **Universum** oder auch **Grundmenge** nennen, und α eine Abbildung mit S als Urbildbereich, für die gilt:

(1) $\alpha(\dot{c}) \in A$ für alle $\dot{c} \in S_K$.

(2) $\alpha(\dot{R}) \subseteq A^{\sigma(\dot{R})}$ für alle $\dot{R} \in S_R$.

(3) $\alpha(\dot{f}) : A^{\sigma(\dot{f})} \to A$ für alle $\dot{f} \in S_F$.

2.1.2 **Bemerkung** (Struktur). Ab jetzt seien $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ immer eine S-Struktur, falls nicht anders angegeben. Wir benutzen also A und α und gehen davon aus, dass eine S-Struktur $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ vorhanden ist.

2.1.3 **Notation** (Struktur). Falls $S = \{\dot{c}_1, \ldots, \dot{c}_k, \dot{R}_1, \ldots, \dot{R}_m, \dot{f}_1, \ldots, \dot{f}_n\}$ ist, so schreiben wir auch

$$\mathfrak{A} = (A, \alpha(\dot{c}_1), \ldots, \alpha(\dot{c}_k), \alpha(\dot{R}_1), \ldots, \alpha(\dot{R}_m), \alpha(\dot{f}_1), \ldots, \alpha(\dot{f}_n))\,.$$

2.1.4 **Beispiel** (Struktur 1). Wir setzen $S_{\mathrm{Gr}} := \{\dot{+}, \dot{-}, \dot{0}\}$, wobei $\dot{+} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{+}) = 2$, $\dot{-} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{-}) = 1$ und $\dot{0} \in S_K$ sind. Dann ist zum Beispiel eine Gruppe $(G, +, -, 0)$ eine S_{Gr}-Struktur mit $\alpha(\dot{+}) = +$, $\alpha(\dot{-}) = -$ und $\alpha(\dot{0}) = 0$.

2.1.5 **Beispiel** (Struktur 2). Nicht jede S_{Gr}-Struktur ist eine Gruppe. Ein Beispiel dafür ist $(A, \oplus, -, 0)$ mit $A := \{0, 1\}$ und den Funktionen

(1) $\oplus : (x, y) \mapsto 1$ für alle $x, y \in A$ und

(2) $- : x \mapsto x$ für alle $x \in A$.

Dies ist eine S_{Gr}-Struktur, aber wegen $1 \oplus (-1) = 1$ keine Gruppe.

2.1.6 **Bemerkung** (Algebraische Strukturen). Die meisten uns bekannten algebraischen Strukturen fallen unter dieses Muster:

(1) Gruppen $(G, +, -, 0)$.

(2) Ringe $(R, +, -, 0, \cdot)$

(3) Eins-Ringe $(R, +, -, 0, \cdot, 1)$

(4) Körper $(K, +, -, 0, \cdot, ^{-1}, 1)$

(5) Partielle Ordnung $(P, \leq)$

(6) Geordnete Körper $(K, +, -, 0, \cdot, ^{-1}, 1, \leq)$.

Jedoch gehören Vektorräume nicht dazu, da die Vektormultiplikation nicht durch α abgebildet werden kann.

2.1.7 **Definition** (Unterstruktur). Sei $B \subseteq A$. Wir nennen das Tupel (B, α) eine S-**Unterstruktur** von $\mathfrak{A}$, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(1) $\alpha(\dot{f})(b_1, \ldots, b_n) \in B$ für alle $\dot{f} \in S_F$ und $b_1, \ldots, b_n \in B$.

(2) $\alpha(\dot{c}) \in B$ für alle $\dot{c} \in S_K$.

Statt α schreiben wir auch $\tilde{\alpha}$ mit $\tilde{\alpha}(\dot{f}) = \alpha(\dot{f}) \upharpoonright B^{\sigma(\dot{f})}$, wobei $\upharpoonright$ für „eingeschränkt auf" steht.

2.1.8 **Bemerkung** (Unterstruktur). Wir können den Begriff der Unterstruktur auch anders definieren. Dazu sei $\mathfrak{A}' = (A', \alpha')$ eine zusätzliche Struktur. Dann ist $\mathfrak{A}'$ eine Unterstruktur von $\mathfrak{A}$ genau dann, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(1) $A' \subseteq A$.

(2) $\alpha'(\dot{c}) = \alpha(\dot{c})$ für alle $\dot{c} \in S_K$.

(3) $\alpha'(\dot{f}) = \alpha(\dot{f}) \upharpoonright (A')^{\sigma(\dot{f})}$ für alle $\dot{f} \in S_F$.

2.1.9 **Definition** (Belegung). Eine **Belegung** in A ist eine Funktion $\beta : S_V \to A$.

2.1.10 **Bemerkung** (Belegung). Von nun an sei β immer eine Belegung in A, falls nicht anders angegeben.

2.1.11 **Definition** (Interpretation). Wir definieren $\mathfrak{I} = (A, \alpha, \beta)$ als S-**Interpretation**.

2.1.12 **Bemerkung** (Interpretation). Ab nun sei $\mathfrak{I} = (A, \alpha, \beta)$ immer eine Interpretation, falls nicht anders angegeben.

2.1.13 **Notation** (Belegung). Seien $x \in S_V$ und $a \in A$. Dann ist $\beta\frac{a}{x} : S_V \to A$ eine Funktion mit

$$y \mapsto \begin{cases} \beta(y) & \text{für } y \neq x\,, \\ a & \text{für } y = x\,. \end{cases}$$

Wir schreiben dann auch $\mathfrak{I}\frac{a}{x} = (A, \alpha, \beta\frac{a}{x})$.

2.1.14 **Definition** (Interpretation von Termen). Wir setzen folgende Gleichungen:

(1) $\mathfrak{I}(x) := \beta(x)$, falls $x \in S_V$.

(2) $\mathfrak{I}(\dot{c}) := \alpha(\dot{c})$, falls $\dot{c} \in S_K$.

(3) $\mathfrak{I}(\dot{f}(t_1, \ldots, t_k)) := \alpha(\dot{f})(\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_k))$, falls $\dot{f} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{f}) = k$.

2.1.15 **Beispiel** (Interpretation). Seien $S = \{\dot{+}, \dot{0}\}$ mit $\dot{0} \in S_K$ und $\dot{+} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{+}) = 2$ eine Symbolmenge und $x, y \in S_V$. Sei zudem $\mathfrak{I} = (\mathbb{Z}, +, \beta)$ eine Interpretation mit $\alpha(\dot{+}) = +$, $\alpha(\dot{0}) = 0$. Dann ist $\mathfrak{I}\frac{1}{x}\frac{2}{y}(\dot{+}(\dot{+}(x, y), \dot{0})) = 1 + 2 + 0$.

2.1.16 **Definition** (Wahrheit). Wir definieren **Wahrheit** als eine Relation $\models$ zwischen Interpretationen und Formeln:

(W1) $\mathfrak{I} \models t = t'$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}(t')$, falls $t, t' \in T^S$.

(W2) $\mathfrak{I} \models \dot{R}(t_1, \ldots, t_k)$ genau dann, wenn $(\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_k)) \in \alpha(\dot{R})$, falls $\dot{R} \in S_R$ mit $\sigma(\dot{R}) = k$ und $t_1, \ldots, t_k \in T^S$.

(W3) $\mathfrak{I} \models (\varphi \wedge \psi)$ genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \varphi$ und $\mathfrak{I} \models \psi$.

(W4) $\mathfrak{I} \models (\varphi \vee \psi)$ genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \varphi$ oder $\mathfrak{I} \models \psi$.

(W5) $\mathfrak{I} \models (\varphi \to \psi)$ genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \psi$ aus $\mathfrak{I} \models \varphi$ folgt.

(W6) $\mathfrak{I} \models \neg\varphi$ genau dann, wenn nicht $\mathfrak{I} \models \varphi$. Wir schreiben $\mathfrak{I} \not\models \varphi$.

(W7) $\mathfrak{I} \models \forall x \varphi$ genau dann, wenn für alle $a \in A$ gilt: $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$.

(W8) $\mathfrak{I} \models \exists x \varphi$ genau dann, wenn ein $a \in A$ existiert, für das gilt: $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$.

Nach dem Rekursionsprinzip definiert dies $\mathfrak{I} \models \varphi$ für alle $\varphi \in L^S$. Falls $\mathfrak{I} \models \varphi$ für $\varphi \in L^S$ gilt, so sagen wir: „$\mathfrak{I}$ macht φ wahr“, „$\mathfrak{I}$ modelliert φ“, „$\mathfrak{I}$ ist ein Modell von φ“, „$\mathfrak{I}$ macht φ gültig“, $\mathfrak{I}$ glaubt φ“, „$\mathfrak{I}$ denkt φ“.

2.1.17

Beispiel (Wahrheit 1). Seien $S := \{\dot{+}, \dot{-}, \dot{0}, \dot{\times}, \dot{1}\}$ eine Symbolmenge und außerdem $\mathfrak{I} = (\mathbb{Q}, +, -, 0, \cdot, 1, \beta)$ eine Interpretation. Wir betrachten die Formel

$$\exists x \dot{\times}(x, x) = \dot{+}(\dot{1}, \dot{1})\,.$$

Nun gilt $\mathfrak{I} \models \exists x \dot{\times}(x, x) = \dot{+}(\dot{1}, \dot{1})$ nach (W8) genau dann, wenn ein $a \in \mathbb{Q}$ existiert mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \dot{\times}(x, x) = \dot{+}(\dot{1}, \dot{1})$. Es gelten außerdem folgende Gleichungen:

(1) $\mathfrak{I}\frac{a}{x}(\dot{\times}(x, x)) = \alpha(\dot{\times})(\beta\frac{a}{x}(x), \beta\frac{a}{x}(x)) = a \cdot a = a^2$

(2) $\mathfrak{I}\frac{a}{x}(\dot{+}(\dot{1}, \dot{1})) = \alpha(\dot{+})(\alpha(\dot{1}), \alpha(\dot{1})) = 1 + 1 = 2$

Wir erinnern uns an die konventionelle Mathematik, in der die Gleichung $x^2 = 2$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$ hat. Demnach existiert kein $a \in Q$, so dass $a^2 = 2$, womit die Interpretation $\mathfrak{I}$ kein Modell der Formel $\exists x \dot{\times}(x, x) = \dot{+}(\dot{1}, \dot{1})$ ist. Man beachte, dass die Wahl von β keine Rolle gespielt hat.

2.1.18

Beispiel (Wahrheit 2). Seien $S := \{\dot{+}, \dot{-}, \dot{0}, \dot{\times}, \dot{1}\}$ eine Symbolmenge und außerdem $\mathfrak{I} = (\mathbb{Q}, +, -, 0, \cdot, 1, \beta)$ eine Interpretation. Wir betrachten die Formel

$$\forall x \exists y \dot{+}(y, y) = x\,.$$

Wir überprüfen, ob $\mathfrak{I} \models \forall x \exists y \dot{+}(y, y) = x$ gilt. Dies ist nach (W7) genau dann der Fall, wenn $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \exists y \dot{+}(y, y) = x$ für alle $a \in \mathbb{Q}$ gilt. Dies wiederum ist nach (W8) genau dann der Fall, wenn für alle $a \in \mathbb{Q}$ ein $b \in \mathbb{Q}$ existiert, so dass $\mathfrak{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y} \models \dot{+}(y, y) = x$. Wir haben $\mathfrak{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}(x) = a$ und $\mathfrak{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}(y) = b$. Somit ist $\mathfrak{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}(\dot{+}(y, y)) = b+b$. Falls nun $x \neq y$ ist, gilt $\mathfrak{I} \models \forall x \exists y \dot{+}(y, y) = x$ genau dann, wenn für alle $a \in \mathbb{Q}$ ein $b \in \mathbb{Q}$ mit $2b = a$ existiert. Falls jedoch $x = y$ ist, so gilt $\mathfrak{I} \models \forall x \exists y \dot{+}(y, y) = x$ genau dann, wenn für alle $a \in \mathbb{Q}$ ein $b \in \mathbb{Q}$ existiert, so dass $2b = b$, also genau dann, wenn ein $b \in \mathbb{Q}$ mit $b = 2b$ existiert. Der pathologische Fall $\forall x \exists x \dot{+}(x, x) = x$ erhält eine konkrete Interpretation. Der wesentliche Punkt ist $\mathfrak{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y} = \mathfrak{I}\frac{b}{x}$. Man beachte ebenso, dass die Wahl von β keine Rolle gespielt hat.

2.1.19

Lemma (Koinzidenzlemma). Seien S_1 und S_2 zwei Symbolmengen mit $S = S_1 \cap S_2$, $\mathfrak{I}_1 = (A, \alpha_1, \beta_1)$ eine S_1-Interpretation und $\mathfrak{I}_2 = (A, \alpha_2, \beta_2)$ eine S_2-Interpretation. Dann gilt:

(1) Falls $t \in T^S$, $\beta_1(x) = \beta_2(x)$ für alle $x \in \mathrm{var}(t)$ und $\alpha_1(s) = \alpha_2(s)$ für alle $s \in S$, dann gilt $\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_2(t)$.

(2) Falls $\varphi \in L^S$, $\beta_1(x) = \beta_2(x)$ für alle $x \in \mathrm{frei}(t)$ und $\alpha_1(s) = \alpha_2(s)$ für alle in φ vorkommende Symbole $s \in S$, dann ist $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$.

Beweis. Übungsblatt 3 $\square$

2.1.20 **Bemerkung** (Koinzidenzlemma). Seien $\varphi \in L^S$ und $x \in S_V$ mit $x \notin \mathrm{var}(\varphi)$. Wir betrachten die (pathologische) Formel $\forall x \varphi$. Wegen (W7) gilt $\mathfrak{I} \models \forall x \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$ für alle $a \in A$ gilt. Dies ist aber nach dem Koinzidenzlemma genau dann der Fall, wenn $\mathfrak{I} \models \varphi$, denn β und $\beta\frac{a}{x}$ stimmen auf $\mathrm{frei}(\varphi)$ überein.

2.1.21 **Satz** (Koinzidenzlemma auf Sätzen). Seien β' eine weitere Belegung in A und $\varphi \in L^S$ ein Satz. Dann ist $(A, \alpha, \beta) \models \varphi$ genau dann, wenn $(A, \alpha, \beta') \models \varphi$.

Beweis. Folgt aus dem Koinzidenzlemma. □

2.1.22 **Notation** (Schreibweise für Wahrheit). Sei φ ein Satz. Dann schreiben wir statt $(A, \alpha, \beta) \models \varphi$ auch $\mathfrak{A} \models \varphi$.

2.1.23 **Definition** (Semantische Folgerungsbeziehung). Seien Γ eine Menge von Sätzen und φ ein Satz. Dann schreiben wir $\Gamma \models \varphi$, falls für alle Strukturen $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \psi$ für alle $\psi \in \Gamma$ auch $\mathfrak{A} \models \varphi$ gilt. In der Schreibweise $\Gamma \models \varphi$ nennen wir $\models$ dabei die **semantische Folgerungsbeziehung** und sagen „φ folgt semantisch aus Γ“.

2.1.24 **Bemerkung** (Das Symbol $\models$). Das Symbol $\models$ ist ursprünglich als Wahrheit zu interpretieren. Haben wir nicht eine Interpretation $\mathfrak{I}$ und eine Formel φ für $\mathfrak{I} \models \varphi$, sondern andere Objekte beziehungsweise Symbole, so beziehen wir uns nur indirekt auf die Wahrheit und schreiben dennoch das Symbol $\models$. Die bisherigen Notationen dafür sehen wir nun.

2.1.25 **Notation** (Verschiedene Notationen). Wir wollen nun die verschiedenen Notationen zusammenfassen:

(1) Falls $\mathfrak{I}$ eine Interpretation und φ eine Formel sind, so schreiben wir $\mathfrak{I} \models \varphi$.

(2) Falls φ ein Satz ist, so schreiben wir $\mathfrak{A} \models \varphi$.

(3) Falls Γ eine Menge von Sätzen und $\mathfrak{A}$ eine Struktur sind, so schreiben wir $\mathfrak{A} \models \Gamma$, falls $\mathfrak{A} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Gamma$ gilt.

(4) Falls $\Gamma = \{\varphi\}$, so schreiben wir ebenfalls $\mathfrak{A} \models \varphi$.

(5) Falls φ ein Satz und Γ eine Menge von Sätzen sind, so schreiben wir $\Gamma \models \varphi$.

(6) Falls $\Gamma = \{\psi\}$, so schreiben wir $\psi \models \varphi$.

(7) Falls $\Gamma = \emptyset$, so sind die Sätze φ mit $\emptyset \models \varphi$ die sogenannten **Tautologien**.

2.2. Axiome und Strukturerhaltung

2.2.1 **Definition** (Axiom). Wollen wir eine Klasse $\mathcal{E}$ von Strukturen durch Sätze klassifizieren, so benötigen wir eine Menge Γ von Sätzen, für die gilt: Für jede Struktur $\mathfrak{A}$ ist $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Wir nennen dann die Elemente von Γ die **Axiome** von $\mathcal{E}$, also Γ ein **Axiomensystem**, und sagen, dass $\mathcal{E}$ **axiomatisierbar** ist.

2.2.2 **Beispiel** (Axiom). Sei $S_{Gr} := \{\dot{+}, \dot{-}, \dot{0}\}$, wobei $\dot{+} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{+}) = 2$, $\dot{-} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{-}) = 1$ und $\dot{0} \in S_K$. Die folgenden S_{Gr}-Sätze axiomatisieren die Klasse der Gruppen:

(1) $\forall x x \dot{+} (\dot{-} x) = (\dot{-} x) \dot{+} x = 0$, abgekürzt durch φ_I.

(2) $\forall x \forall y \forall z (x \dot{+} y) \dot{+} z = x \dot{+} (y \dot{+} z)$, abgekürzt durch φ_A.

(3) $\forall x x \dot{+} 0 = 0 \dot{+} x = x$, abgekürzt durch φ_N.

Für die andere Art, Gruppen zu definieren, ist $S_{Gr} = \{\dot{+}, \dot{0}\}$ mit φ_A, φ_N und folgendem Axiom:

$$\forall x \exists y x \dot{+} y = y \dot{+} x = 0\,.$$

2.2.3 **Bemerkung** (Axiom). Ist Γ ein Axiomensystem und φ ein Satz, so schreiben wir auch $\Gamma + \varphi$ statt $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

2.2.4 **Definition** (Strukturerhaltende Abbildung). Sei $\mathfrak{A}' = (A', \alpha')$ eine zusätzliche Struktur. Eine Abbildung $F : A \to A'$ heißt S-**strukturerhaltend**, falls folgende Eigenschaften vorhanden sind:

(K) $F(\alpha(\dot{c})) = \alpha'(\dot{c})$ für jedes $\dot{c} \in S_K$.

(F) $F(\alpha(\dot{f})(a_1, \ldots, a_k)) = \alpha'(\dot{f})(F(a_1), \ldots, F(a_k))$ für jedes $\dot{f} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{f}) = k$ und $a_1, \ldots, a_k \in A$.

(R) $(a_1, \ldots, a_k) \in \alpha(\dot{R})$ genau dann, wenn $(F(a_1), \ldots, F(a_k)) \in \alpha'(\dot{R})$ für jedes $\dot{R} \in S_R$ mit $\sigma(\dot{R}) = k$ und $a_1, \ldots, a_k \in A$.

Ist F injektiv, so nennen wir F eine S-**Einbettung**, und falls sie bijektiv ist, einen S-**Isomorphismus**. Falls $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ dieselbe Struktur sind, so nennen wir einen Isomorphismus von A nach A' auch einen **Automorphismus**.

2.2.5 **Definition** (Isomorphie). Sei $\mathfrak{A}' = (A', \alpha')$ eine weitere Struktur. Wir schreiben $(A, \alpha) \cong (A', \alpha')$, falls ein Isomorphismus von A nach A' existiert.

2.2.6 **Lemma** (Strukturerhaltung von Termen). Seien $t \in T^S$ und $\mathfrak{I}' = (A', \alpha', F \circ \beta)$ eine zusätzliche Interpretation mit einer strukturerhaltenden Abbildung F von A nach A'. Dann gilt $F(\mathfrak{I}(t)) = \mathfrak{I}'(t)$.

Beweis. Wir beweisen dies per Terminduktion und betrachten folgende Fälle:

1. Fall: Für $t \in S_V$ gilt $F(\mathfrak{I}(t)) = F(\mathfrak{I}(x)) = F(\beta(x))$.
2. Fall: Für $t \in S_K$ gilt $F(\mathfrak{I}(t)) = F(\alpha(t)) \overset{(K)}{=} \alpha'(t) = \mathfrak{I}'(t)$.
3. Fall: Für $t = \dot{f}(t_1, \ldots, t_k)$ mit $\dot{f} \in S_F$, $\sigma(\dot{f}) = k$ und $t_1, \ldots, t_k \in T^S$ gilt

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{I}(t)) &= F(\mathfrak{I}(\dot{f}(t_1, \ldots, t_k))) \\ &= F(\alpha(\dot{f})(\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_k))) \\ &= \alpha'(\dot{f})(F(\mathfrak{I}(t_1)), \ldots, F(\mathfrak{I}(t_k))) \\ &= \alpha'(\dot{f})(\mathfrak{I}'(t_1), \ldots, \mathfrak{I}'(t_k)) \\ &= \mathfrak{I}'(\dot{f}(t_1, \ldots, t_k)) \end{aligned}$$

□

2.2.7 **Lemma** (Strukturerhaltung atomarer Formeln). Seien $\varphi \in \mathrm{At}^S$ und $\mathfrak{I}' = (A', \alpha', F \circ \beta)$ eine zusätzliche Interpretation mit einer strukturerhaltenden Abbildung F von A nach A'. Dann gilt $\mathfrak{I} \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}' \models \varphi$.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle:

1. Fall: φ ist von der Form $t = t'$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} \models t = t' \quad &\text{gdw} \quad \mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}(t') \\ &\text{gdw} \quad F(\mathfrak{I})(t) = F(\mathfrak{I}(t')) \\ &\text{gdw} \quad \mathfrak{I}'(t) = \mathfrak{I}'(t') \quad \text{Lemma 2.2.6} \\ &\text{gdw} \quad \mathfrak{I}' \models t = t' \end{aligned}$$

2. Fall: φ ist $\dot{R}(t_1, \ldots, t_k)$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} \models \dot{R}(t_1, \ldots, t_k) \quad &\text{gdw} \quad (\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_k)) \in \alpha(\dot{R}) \\ &\text{gdw} \quad (F(\mathfrak{I}(t_1)), \ldots, F(\mathfrak{I}(t_k))) \in \alpha'(\dot{R}) \\ &\text{gdw} \quad (\mathfrak{I}'(t_1), \ldots, \mathfrak{I}'(t_k)) \in \alpha'(\dot{R}) \\ &\text{gdw} \quad \mathfrak{I}' \models \varphi \end{aligned}$$

□

2.2.8 **Lemma** (Strukturerhaltung quantorenfreier Formeln). Seien $\varphi \in L^S$ quantorenfrei und $\mathfrak{I}' = (A', \alpha', F \circ \beta)$ eine zusätzliche Interpretation mit einer Einbettung F von A nach A'. Dann ist $\mathfrak{I} \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}' \models \varphi$.

Beweis. Induktiv mithilfe des letzten Lemmas über den Regeln (F3) bis (F6). □

2.2.9 **Lemma** (Strukturerhaltung universeller Ausdrücke). Seien $\varphi \in L^S$ ein universeller Ausdruck und $\mathfrak{I}' = (A', \alpha', F \circ \beta)$ eine zusätzliche Interpretation mit einer Einbettung F von A nach A'. Dann folgt aus $\mathfrak{I}' \models \varphi$, dass $\mathfrak{I} \models \varphi$.

Beweis. Nach dem vorheriWgen Lemma bleibt noch zu zeigen: Wenn $\mathfrak{I}' \models \forall x \psi$, dann $\mathfrak{I} \models \forall x \psi$. Es gilt: $\mathfrak{I}' \models \forall x \psi$ genau dann, wenn für alle $a' \in A'$ gilt $\mathfrak{I}' \frac{a'}{x} \models \psi$ (*). Zu zeigen: $\mathfrak{I} \models \forall x \psi$, also sei $a \in A$ beliebig. Zeige $\mathfrak{I} \frac{a}{x} \models \psi$. Das ist gleichbedeutend mit $\mathfrak{I}' \frac{F(a)}{x} \models \psi$. Das gilt aber wegen (*). □

2.2.10 **Bemerkung** (Strukturerhaltung universeller Ausdrücke 1). Sei $S = \{\dot{+}, \dot{-}, \dot{0}\}$ eine Symbolmenge mit $\dot{c}$ und $\dot{+}, \dot{-} \in S_F$, wobei $\sigma(\dot{+}) = 2$ und $\sigma(\dot{-}) = 1$. Wir betrachten die S-Struktur $(A, +, -, e)$ mit $A = \{e\}$ und $\alpha(\dot{+}) = +$, $\alpha(\dot{-}) = -$ und $\alpha(\dot{0}) = e$. Seien zudem $e + e = e$, $-e = e$ und der Satz $\forall x x = \dot{0}$, abgekürzt mit φ, gegeben. Dann gilt $(A, +, -, e) \models \varphi$. Wir erinnern uns an φ_A, φ_I und φ_N aus Beispiel 2.2.2. Für $\varphi_A \wedge \varphi_I \wedge \varphi_N \wedge \varphi$ existiert bis auf Isomorphie genau ein Modell. Das Beispiel zeigt also, dass so ein φ nicht im Allgemeinen von Einbettungen erhalten bleiben kann.

2.2.11 **Bemerkung** (Strukturerhaltung universeller Ausdrücke 2). Man beachte, dass $\mathfrak{A}'$ genau dann eine Unterstruktur von $\mathfrak{A}$ ist, wenn $\mathrm{id} : A' \to A$ strukturerhaltend ist.

2.2.12 **Satz** (Strukturerhaltung universeller Sätze). Falls $\mathfrak{A}'$ eine Unterstruktur von $\mathfrak{A}$ ist und φ ein universeller Satz, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ gilt. Dann gilt $\mathfrak{A}' \models \varphi$.

Beweis. Folgt aus den vorherigen Lemmata. □

2.2.13 **Bemerkung** (Strukturerhaltung universeller Sätze). Betrachte S_{Gr} wie vorher mit unseren drei Axiomen φ_A, φ_I, φ_N, welches alle drei universelle Sätze sind. Wenn $\mathfrak{G}'$ eine S_{Gr}-Unterstruktur von $\mathfrak{G}$ ist und $\mathfrak{G} \models \varphi_A \wedge \varphi_I \wedge \varphi_N$ gilt, dann ist auch $\mathfrak{G}' \models \varphi_A \wedge \varphi_I \wedge \varphi_N$.

2.3. Erhaltung und Definierbarkeit

2.3.1 **Definition** (Erhaltung von Formeln). Sei (A', α) eine zusätzliche Struktur, φ eine Formel mit freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und $\pi : A \to A'$ eine Abbildung. Wir sagen, dass π die Formel φ **erhält**, falls für alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ und alle Belegungen β in A und Belegungen β' in A' gilt:

(1) Wenn $\left(A, \alpha, \beta\frac{a_1 \ldots a_n}{x_1 \ldots x_n}\right) \models \varphi$, dann $\left(A', \alpha', \beta'\frac{\pi(a_1) \ldots \pi(a_n)}{x_1 \ldots x_n}\right) \models \varphi$. Dabei sagen wir „$\pi$ erhält φ abwärts".

(2) Wenn $\left(A', \alpha', \beta'\frac{\pi(a_1) \ldots \pi(a_n)}{x_1 \ldots x_n}\right) \models \varphi$, dann $\left(A, \alpha, \beta\frac{a_1 \ldots a_n}{x_1 \ldots x_n}\right) \models \varphi$. Dabei sagen wir „$\pi$ erhält φ aufwärts".

Ist Γ eine Menge von Formeln, welche jeweils von π erhalten werden, so sagen wir auch „π **erhält** Γ".

2.3.2 **Beispiel** (Erhaltung von Formeln). Es gilt:

(a) Falls π eine Einbettung ist, so erhält π alle quantorenfreien Formeln.

(b) Falls π eine Einbettung ist, so erhält π alle universellen Ausdrücke abwärts.

(c) (A, α) ist genau dann eine Unterstruktur von (A', α'), wenn $\mathrm{id} : A \to A'$ eine Einbettung ist.

(d) Universelle Sätze werden auf Unterstrukturen übertragen.

2.3.3 **Definition** (Theorie und elementare Aquivalenz). Wir definieren die **Theorie** von $\mathfrak{A}$ als die Menge

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) := \{\varphi \,|\, \mathfrak{A} \models \varphi \text{ und } \varphi \text{ ist } S\text{-Satz}\} \,.$$

Ist $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{A}')$, so schreiben wir $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}'$ und nennen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ **elementar äquivalent**.

2.3.4 **Definition** (Vollständigkeit). Sei Γ eine Menge von Sätzen. Wir sagen Γ ist **vollständig**, falls $\varphi \in \Gamma$ oder $\neg\varphi \in \Gamma$ für jeden Satz φ gilt.

2.3.5 **Bemerkung** (Vollständigkeit). Für jedes $\mathfrak{A}$ ist $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ eine vollständige Satzmenge, denn es gilt $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$ nicht gilt.

2.3.6 **Beispiel** (Vollständigkeit). Wir betrachten die Menge der Gruppenaxiome $\Gamma_{\mathrm{Gr}} = \{\varphi_A, \varphi_N, \varphi_I\}$ und die Menge $\Gamma := \{\varphi \,|\, \Gamma_{Gr} \models \varphi\}$. Nun ist Γ die Menge der Sätze, die in jeder Gruppe gelten. Diese ist jedoch nicht vollständig. Betrachte dazu den universellen Satz

$$\exists x \exists y \exists z (x \neq z \wedge y \neq y \wedge y \neq z)\,,$$

abgekürzt durch $\varphi_{\geq 3}$. Nun gilt weder $\varphi_{\geq 3} \in \Gamma$ noch $\varphi_{\geq 3} \notin \Gamma$. Sei nun $\mathfrak{A}$ „die zweielementige Gruppe“. Dann gilt $\Gamma \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, wobei diese Theorie vollständig ist und $\neg\varphi_{\geq 3} \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ gilt.

2.3.7 **Definition** (Elementare Einbettung). Sei $\pi : A \to A'$ eine Einbettung. Wir sagen, dass π **elementar** ist, falls π jede Formel φ erhält. Wir schreiben $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{A}'$, falls eine elementare Einbettung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}'$ existiert.

2.3.8 **Satz** (Unterstrukturen sind elementar äquivalent). Falls $\mathfrak{A}'$ eine Unterstruktur von $\mathfrak{A}$ ist, so gilt $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}$.

Beweis. Falls φ ein Satz ist, so gilt nach dem Koinzidenzlemma, dass $\mathfrak{A}' \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$, also $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{A}')$. □

2.3.9 **Bemerkung** (Einbettungen nicht unbedingt elementar). Sei $S_K := \{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{0}, \dot{1}\}$ die Sprache der Körper. Wir betrachten die Formel $\exists(x^2 = 2)$, oder formal korrekt auch $\exists w \dot{\times}(w, w) = \dot{+}(1, 1)$, was wir mit $\varphi_{\sqrt{2}}$ abkürzen. Wir wissen, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1) \models \neg\varphi_{\sqrt{2}}$. Ebenso wissen wir, dass $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen unter $+$ und $\cdot$ ist und die Konstanten 0 und 1 erbt, also ist $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ eine Unterstruktur von $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ und damit $\mathrm{id} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ eine Einbettung. Wegen $\varphi_{\sqrt{2}} \in \mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ und $\varphi_{\sqrt{2}} \notin \mathrm{Th}(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ folgt $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1) \neq \mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ und damit $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1) \not\equiv (R, +, \cdot, 0, 1)$. Insbesondere ist id eine Einbettung, die nicht elementar ist. Man beachte, dass $\exists x(x^2 = 2)$ kein universeller Satz ist. Im Gegensatz dazu ist $\forall x(x^2 \neq 2)$ ein universeller Satz und wird dann auch auf Unterstrukturen vererbt. Man kann sich fragen, wie es mit der Formel $\forall x(x^2 = -1)$ aussieht.

2.3.10 **Lemma** (Isomorphielemma). Falls $\pi : A \to A$ ein Isomorphismus ist, so sind π und π^{-1} elementare Einbettungen.

Beweis. Nach Definition ist π eine Einbettung. Wegen der Symmetrie reicht es zu zeigen, dass π elementar ist. Nach dem Lemma 2.2.8 erhält π quantorenfreie Formeln. Wir zeigen nun per Induktion, dass π die Formeln $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$, $\neg\varphi$, $\exists x\varphi$ und $\forall x\varphi$ erhält, falls sie φ und ψ erhält.

Wir betrachten zuerst die Formeln mit Junktoren. Hierbei zeigen wir nur den Fall der Konjunktion. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\left(A, \alpha, \beta\frac{a_1 \dots a_n}{x_1 \dots x_n}\right) \models \varphi \wedge \psi \quad \text{gdw} \quad & \left(A, \alpha, \beta\frac{a_1 \dots a_n}{x_1 \dots x_n}\right) \models \varphi \quad \text{und} \\
& \left(A, \alpha, \beta\frac{a_1 \dots a_n}{x_1 \dots x_n}\right) \models \psi \\
\text{gdw} \quad & \left(A', \alpha', \beta'\frac{\pi(a_1) \dots \pi(a_n)}{x_1 \dots x_n}\right) \models \varphi \quad \text{und} \\
& \left(A', \alpha', \beta'\frac{\pi(a_1) \dots \pi(a_n)}{x_1 \dots x_n}\right) \models \psi \\
\text{gdw} \quad & \left(A', \alpha', \beta'\frac{\pi(a_1) \dots \pi(a_n)}{x_1 \dots x_n}\right) \models \varphi \wedge \psi
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für diesen Fall gezeigt. Wir betrachten nun die Formeln mit Quantoren. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
& \left(A, \alpha, \beta\frac{a_1 \dots a_n}{x_1 \dots x_n}\right) \models \forall x \varphi \\
\text{gdw f. a. } a \in A \text{ gilt } & \left(A, \alpha, \beta\frac{a_1 \dots a_n}{x_1 \dots x_n}\frac{a}{x}\right) \models \varphi \\
\text{gdw f. a. } a \in A \text{ gilt } & \left(A', \alpha', \beta'\frac{\pi(a_1) \dots \pi(a_n)}{x_1 \dots x_n}\frac{\pi(a)}{x}\right) \models \varphi \\
\text{gdw f. a. } a' \in A' \text{ gilt } & \left(A', \alpha', \beta'\frac{\pi(a_1) \dots \pi(a_n)}{x_1 \dots x_n}\frac{a'}{x}\right) \models \varphi \\
\text{gdw } & \left(A', \alpha', \beta'\frac{\pi(a_1) \dots \pi(a_n)}{x_1 \dots x_n}\right) \models \forall x \varphi
\end{aligned}$$

Der Fall $\exists x \varphi$ folgt analog. □

2.3.11 **Bemerkung** (Beobachtung zu $\cong$, $\preceq$ und $\equiv$)**.** Für zwei Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ folgt $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}'$ aus $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{A}'$ und dies wiederum aus $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$. Die Rückrichtung gilt jedoch nicht, was wir am Ende der Vorlesung zeigen werden. (Vollständigkeitssatz)

2.3.12 **Definition** (Definierbarkeit)**.** Sei $X \subseteq A$ eine Menge. Wir sagen X ist **S-definierbar** genau dann, wenn es eine S-Formel φ mit einer freien Variable x gibt, so dass für alle $a \in A$ gilt, dass $a \in X$ genau dann, wenn $(A, \alpha, \beta\frac{a}{x}) \models \varphi$ für alle β gilt. Wir sagen dann, φ definiert X.

2.3.13 **Lemma** (Erhaltbar- und Definierbarkeit). Seien π ein Automorphismus von $\mathfrak{A}$ und $X \subseteq A$ eine von π nicht erhaltenen Menge. Dann ist X nicht S-definierbar.

Beweis. Wenn $X \neq \pi[X]$, so existiert entweder $y \in X \setminus \pi[X]$ oder $y \in \pi[X] \setminus X$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei also $a' \in X \setminus \pi[X]$. Angenommen, eine Formel φ definiert X, so ist $a \in X$ genau dann, wenn $(A, \alpha, \beta\frac{a}{x}) \models \varphi$ für alle Belegungen β gilt. Da π ein Automorphismus ist bleibt φ erhalten, womit $(A, \alpha, \beta\frac{a'}{x}) \models \varphi$ und $(A, \alpha, \beta\frac{\pi^{-1}(a')}{x}) \models \varphi$ sind, also $\pi^{-1}(a') \in X$. Damit ist aber $a' = \pi(\pi^{-1}(a')) \in \pi[X]$, was ein Widerspruch ist. $\square$

2.3.14 **Beispiel** (Erhaltbar- und Definierbarkeit). Sei $S = \{\dot{+}, \dot{0}\}$ eine Symbolmenge mit $\dot{0} \in S_K$ und $\dot{+} \in S_F$, wobei $\sigma(\dot{+}) = 2$ ist. Sei zudem $(\mathbb{Q}, +, 0)$ eine S-Struktur. Die Abbildung $\pi : q \mapsto aq$ für ein $a \neq 0$ ist ein $(\dot{+}, \dot{0})$-Automorphismus. Nun gilt:

(1) Für $a = -1$ wird die Menge $\{q \,|\, q > 0\}$ von π nicht erhalten und ist somit nicht definierbar.

(2) Für $a = 2$ wird die Menge $\{q \,|\, q \leq 1\}$ von π nicht erhalten und ist somit ebenfalls nicht definierbar.

2.3.15 **Beispiel** (Isomorphie 1). Sei $S = \{\dot{0}\}$ eine Symbolmenge mit $\dot{0} \in S_K$. Seien zudem $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, 0)$ und $\mathfrak{A}' = (\mathbb{N}, 0)$ zwei S-Strukturen und π eine beliebige Bijektion von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{N}$, so dass $\pi(0) = 0$ ist. Dann ist π strukturerhaltend, woraus $(\mathbb{Q}, 0) \cong (\mathbb{N}, 0)$ folgt.

2.3.16 **Beispiel** (Isomorphie 2). Sei $S = \{\dot{0}, \dot{<}\}$ eine Symbolmenge mit $\dot{0} \in S_K$ und $\dot{<} \in S_R$ mit $\sigma(\dot{<}) = 2$. Seien zudem $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, 0, <)$ und $\mathfrak{A}' = (\mathbb{N}, 0, <)$ zwei S-Strukturen. Wir zeigen nun, dass es keinen Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}'$ gibt. Angenommen, π ist ein solcher Isomorphismus. Wähle dazu $q < 0$, zum Beispiel $q = -1$. Da $\mathfrak{A}\frac{q}{x} \models x \dot{<} \dot{0}$ gilt, müsste gelten, dass $\mathfrak{A}'\frac{\pi(q)}{x} \models x \dot{<} \dot{0}$. Dies folgert dann $\pi(q) < \pi(0)$, wobei aber kein $n \in \mathbb{N}$ mit $n < 0$ existiert. Demnach existiert kein solches π, womit $(\mathbb{Q}, 0, <) \ncong (\mathbb{N}, 0, <)$ ist. Haben wir $\mathbb{Z}$ statt $\mathbb{N}$, so gilt ebenso $\mathfrak{A} \ncong \mathfrak{A}'$. Dafür nehmen wir an, π wäre ein Isomorphismus von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Z}$. Sei nun q mit $\pi(0) = 0$ und $\pi(q) = 1$. Damit folgt $\mathfrak{A}'\frac{\pi(q)}{x} \models \exists z(\dot{0} \dot{<} z \wedge z \dot{<} x)$ aus $\mathfrak{A}\frac{q}{x} \models \exists z(\dot{0} \dot{<} z \wedge z \dot{<} x)$, da π ein Isomorphismus ist. Es existiert also ein $w \in \mathbb{Z}$, so dass $\mathfrak{A}\frac{q}{x}\frac{w}{z} \models (\dot{0} \dot{<} z \wedge z \dot{<} x)$, also ein $w \in \mathbb{Z}$ mit $0 < w < 1$. Dies ist jedoch ein Widerspruch, womit kein Isomorphismus existiert und die Behauptung folgt.

2.3.17 **Bemerkung** (Elementare Äquivalenz). Sei $S = \{\dot{0}, \dot{<}\}$ eine Symbolmenge mit $\dot{0} \in S_K$ und $\dot{<} \in S_R$ mit $\sigma(\dot{<}) = 2$. Seien zudem $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, 0, <)$ und $\mathfrak{A}' = (\mathbb{Z}, 0, <)$ zwei S-Strukturen und der Satz

$$\forall x \forall y (x \dot{<} y \to \exists z (x \dot{<} z \land z \dot{<} y))\,,$$

abgekürzt durch φ, gegeben. Nun ist $\mathfrak{A} \models \varphi$, jedoch $\mathfrak{A}' \not\models \varphi$, womit $\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{A}'$ folgt. Dabei ist φ ein $\{\dot{<}\}$-Satz.

2.3.18 **Beispiel** (Definierbarkeit 1). Sei $S = \emptyset$ eine Symbolmenge. In diesem Fall ist jede Bijektion von einer Struktur in eine anderen ein S-Isomorphismus. Sei nun $(\mathbb{Q})$ eine S-Struktur. Dann ist jede Bijektion $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ein S-Automorphismus. Ebenso sind dann folgende Mengen definierbar:

(1) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$, definiert durch $x = x$.

(2) $\emptyset \subseteq \mathbb{Q}$, definiert durch $x \neq x$.

Sei nun $X \subseteq \mathbb{Q}$ nicht von der Form aus (1) oder (2). Dann existieren $q, q' \in \mathbb{Q}$ mit $q \in X$ und $q' \notin X$. Wir betrachten die Funktion $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \neq q \text{ und } x \neq q', \\ q' & \text{falls } x = q, \\ q & \text{falls } x = q'. \end{cases}$$

Dann ist π eine Bijektion, also auch ein S-Automorphismus. Es gilt nun $q \in X$ und $\pi(q) \notin X$. Nach dem Lemma 2.3.13 über Erhaltbar- und Definierbarkeit ist nun X nicht S-definierbar.

2.3.19 **Bemerkung** (Definierbarkeit). Falls eine Menge $X \subseteq A$ durch eine Formel φ definiert ist, so ist $A \setminus X$ durch $\neg\varphi$ definiert.

2.3.20

Beispiel (Definierbarkeit 2)**.** Seien $S = \{\dot{0}\}$ eine Symbolmenge und $(\mathbb{Q}, 0)$ eine S-Struktur. Dann ist eine Bijektion $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ genau dann ein S-Automorphismus, wenn $\pi(0) = 0$ ist. Ebenso sind nun folgende Mengen definierbar:

(1) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$, definiert durch $x = x$.

(2) $\emptyset \subseteq \mathbb{Q}$, definiert durch $x \neq x$.

(3) $\{0\} \subseteq \mathbb{Q}$, definiert durch $x = \dot{0}$.

(4) $\mathbb{Q} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{Q}$, definiert durch $x \neq \dot{0}$.

Sei nun $X \subseteq \mathbb{Q}$ nicht von der Form aus (1), (2), (3) oder (4). Dann existieren $q, q' \in \mathbb{Q}$ mit $q \neq 0 \neq q'$, $q \in X$ und $q' \notin X$. Wir betrachten die Funktion $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ x & \text{falls } x \neq q \text{ und } x \neq q', \\ q' & \text{falls } x = q, \\ q & \text{falls } x = q'. \end{cases}$$

Dann ist π eine Bijektion mit $\pi(0) = 0$, also auch ein S-Automorphismus. Es gilt nun $q \in X$ und $\pi(q) \notin X$. Nach dem Lemma 2.3.13 über Erhaltbar- und Definierbarkeit ist nun X nicht S-definierbar.

2.3.21

Beispiel (Definierbarkeit 3)**.** Seien $S = \{\dot{+}\}$ eine Symbolmenge und $(\mathbb{Q}, +)$ eine S-Struktur. Falls $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $\pi(x) = q \cdot x$ für ein $q \neq 0$ ist, so ist π eine Bijektion. Falls zusätzlich

$$\pi(a + b) = q \cdot (a + b) = q \cdot a + q \cdot b = \pi(a) + \pi(b)$$

gilt, so ist π ein S-Automorphismus. Es sind nun folgende Mengen definierbar:

(1) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$, definiert durch $x = x$.

(2) $\emptyset \subseteq \mathbb{Q}$, definiert durch $x \neq x$.

(3) $\{0\} \subseteq \mathbb{Q}$, definiert durch $\forall z (z \dot{+} x = z)$.

(4) $\mathbb{Q} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{Q}$, definiert durch $\neg \forall z (z \dot{+} x = z)$.

Sei nun $X \subseteq \mathbb{Q}$ nicht von der Form aus (1), (2), (3) oder (4). Dann existieren $q, q' \in \mathbb{Q}$ mit $q \neq 0 \neq q'$, $q \in X$ und $q' \notin X$. Dann ist $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $x \mapsto \frac{q'}{q} x$ ein S-Automorphismus mit $\pi(q) = q'$. Wieder gilt $q \in X$ und $\pi(q) \notin X$, womit nach dem Lemma 2.3.13 über Erhaltbar- und Definierbarkeit die Menge X nicht S-definierbar ist. Ein Beispiel dafür ist die Menge $\mathbb{Q}^+$, da $x \mapsto -x$ ein S-Automorphismus ist.

Beispiel (Definierbarkeit 4)**.** Seien $S = \{\dot{0}, \dot{<}\}$ eine Symbolmenge und $(\mathbb{Q}, 0, <)$ eine S-Struktur. Es sind nun folgende Mengen definierbar:

(1) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$, definiert durch $x = x$.

(2) $\emptyset \subseteq \mathbb{Q}$, definiert durch $x \neq x$.

(3) $\{0\} \subseteq \mathbb{Q}$, definiert durch $x = \dot{0}$.

(4) $\mathbb{Q} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{Q}$, definiert durch $x \dot{\neq} \dot{0}$.

(5) $\mathbb{Q}^+ \subseteq \mathbb{Q}$, definiert durch $\dot{0} \dot{<} x$.

(6) $\mathbb{Q}_0^- \subseteq \mathbb{Q}$, definiert durch $\neg(\dot{0} \dot{<} x)$.

2.3.22 Sind nun die Menge X durch die Formel φ und die Menge Y durch die Formel ψ definiert, so sind $X \cap Y$ durch $\pi \wedge \psi$ und $X \cup Y$ durch $\varphi \vee \psi$ definiert. Damit sind auch die folgenden Mengen definiert:

(7) $\mathbb{Q}_0^+$ wegen $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$, also definiert durch $(\dot{0} \dot{<} x \vee x = \dot{0})$.

(8) $\mathbb{Q}^-$ wegen $\mathbb{Q}_0^- \cap (\mathbb{Q} \setminus \{0\})$, also definiert durch $(\neg(\dot{0} \dot{<} x) \wedge x \dot{\neq} \dot{0})$.

Sei $X \subseteq \mathbb{Q}$ nun eine Menge, welche nicht einer der Formen (1) - (8) entspricht. Dann gilt eine der Eigenschaften:

(a) Es existieren $q, q' \in \mathbb{Q}$ mit $q, q' < 0$, $q \in X$ und $q' \notin X$.

(b) Es existieren $q, q' \in \mathbb{Q}$ mit $q, q' > 0$, $q \in X$ und $q' \notin X$.

Wir betrachten nun die Abbildung $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $x \mapsto \frac{q'}{q} x$. In beiden Fällen ist $\frac{q'}{q} > 0$ und somit π ein S-Automorphismus. es gilt aber $\pi(q) = q'$, womit nach dem Lemma 2.3.13 über Erhaltbar- und Definierbarkeit die Menge X nicht S-definierbar ist.

2.4. Substitution und Definitionserweiterung

2.4.1 **Bemerkung** (Definitionserweiterungen)**.** Im Beispiel 2.3.21 war $\dot{0}$ kein Symbol der Sprache S, jedoch war $\{0\}$ definierbar. Ebenso ist für $S = \{\dot{\times}\}$ und $(\mathbb{Q}, \cdot)$ die Menge $\{0\}$ definiert durch $\forall z(x \dot{\times} z = x)$.

2.4.2 **Definition** (Substitution)**.** Seien $\varphi \in L^S$, $x_0, \ldots, x_r \in S_V$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ und $t_0, \ldots, t_r \in T^S$. Wir definieren eine **Substitution** $\varphi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}$ von φ rekursiv wie folgt:

(1) Für $x \in S_V$ mit $x \neq x_i$ für alle x_i gilt: $x\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} := x$.

(2) Für x_i gilt: $x_i\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} = t_i$.

(3) Für $\dot{c} \in S_K$ gilt: $\dot{c}\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} := \dot{c}$.

(4) Für $\dot{f} \in S_F$ mit $\sigma(\dot{f}) = n$ und $t'_1, \ldots, t'_n \in T^S$ gilt:

$$[\dot{f}(t'_1, \ldots, t'_n)]\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} := \dot{f}\left(t'_1\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}, \ldots, t'_n\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right).$$

(5) Für $t'_1, t'_2 \in T^S$ gilt: $[t'_1 = t'_2]\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} := t'_1\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} = t'_2\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}$.

(6) Für $\dot{R} \in S_R$ mit $\sigma(\dot{R}) = n$ und $t'_1, \ldots, t'_n \in T^S$ gilt:

$$[\dot{R}(t'_1, \ldots, t'_n)]\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} := \dot{R}\left(t'_1\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}, \ldots, t'_n\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right).$$

(7) Für $\psi \in L^S$ gilt: $[\neg\psi]\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} := \neg\psi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}$.

(8) Für $\psi, \psi' \in L^S$ gilt: $(\psi \wedge \psi')\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} := (\psi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} \wedge \psi'\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r})$.

Genauso für $\vee$ und $\rightarrow$.

(9) Für $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ mit $i_1 < \ldots < i_s \leq r$ und $x_{i_j} \in \text{frei}(\forall x\psi)$ für alle i_j gilt:

$$[\forall x\psi]\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} := \forall u\left[\psi\frac{t_{i_1} \ldots t_{i_s}}{x_{i_1} \ldots x_{i_s}}\frac{u}{x}\right],$$

wobei $u = x$ ist, falls $x \notin \text{var}(t_{i_j})$ für alle i_j, und sonst $u = v_m \in S_V$ mit $m \in \mathbb{N}$ minimal, so dass $v_m \notin \text{var}(t_{i_j})$ für alle i_j und $v_m \notin \text{var}(\psi)$.

Genauso für $\exists$.

2.4.3 **Beispiel** (Substitution). Seien $S = \{\dot{f}, \dot{R}\}$ eine Symbolmenge und $x, y, z, v \in S_V$. Dann sind

(a) $[\dot{R}(x, \dot{f}(y, z))]\frac{z}{y}\frac{x}{z}\frac{y}{v} = \dot{R}(x, \dot{f}(z, x))$.

(b) $[\exists x \dot{R}(x, \dot{f}(y, z))]\frac{v}{y}\frac{\dot{f}(y,y)}{z} = \exists x[\dot{R}(x, \dot{f}(v, z))]\frac{\dot{f}(y,y)}{z}\frac{x}{x} = \exists x[\dot{R}(x, \dot{f}(v, \dot{f}(y, y)))]$.

2.4.4 **Lemma** (Substitutionslemma). Seien $t_0, \ldots, t_r \in T^S$ und $x_0, \ldots, x_r \in S_V$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Dann gilt:

(1) Für alle S-Terme t ist $\mathfrak{I}(t\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}) = \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0) \ldots \mathfrak{I}(t_r)}{x_0 \ldots x_r}(t)$.

(2) Für alle S-Formeln φ ist $\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0) \ldots \mathfrak{I}(t_r)}{x_0 \ldots x_r} \models \varphi$.

Beweis. Fehlt. □

2.4.5 **Definition** (Redukt). Seien $S' \subseteq S$ eine Symbolmenge und $\mathfrak{A}' = (A', \alpha')$ eine S'-Struktur. Dann nennen wir $\mathfrak{A}'$ ein S'-**Redukt** von $\mathfrak{A}$, falls $A = A'$ und $\alpha \restriction S' = \alpha'$.

2.4.6 **Definition** (Relationale Definitionserweiterung). Seien $S^+ := S \cup \{\dot{R}\}$ eine Symbolmenge, $\dot{R} \in S^+_R$ mit $\sigma(\dot{R}) = n$ und $\dot{R} \notin S$, $x_1, \ldots, x_n \in S_V$ und $\varphi \in L^S$ mit frei$(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Wir nennen $\mathfrak{A}^+ = (A, \alpha^+)$ die **relationale Definitionserweiterung** von $\mathfrak{A}$ gemäß φ, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(1) $\alpha^+(\dot{R}) = R_\varphi \subseteq A^n$, wobei $(a_1, \ldots, a_n) \in R_\varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{A}\frac{a_1 \ldots a_n}{x_1 \ldots x_n} \models \varphi$.

(2) $\alpha^+ \restriction S = \alpha$.

2.4.7

Definition (Relationale Übersetzung). Seien $S^+ := S \cup \{\dot{R}\}$ eine Symbolmenge, $\dot{R} \in S_R^+$ mit $\sigma(\dot{R}) = n$ und $\dot{R} \notin S$, $x_1, \ldots, x_n \in S_V$, $\varphi \in L^S$ mit $\mathrm{frei}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\mathfrak{A}^+ = (A, \alpha^+)$ eine S^+-Struktur und relationale Definitionserweiterung von $\mathfrak{A}$ gemäß φ. Wir definieren die **relationale Übersetzung** $\mathrm{rt} : L^{S^+} \to L^S$ rekursiv:

(1) ψ ist $t = t'$ für $t, t' \in T^{S^+}$, dann $\mathrm{rt}(\psi) = \psi$.

(2) ψ ist $\dot{R}'(t_1, \ldots, t_k)$ für $\dot{R}' \in S_R^+$ mit $\dot{R}' \neq \dot{R}$, $\sigma(\dot{R}') = k$ und $t_1, \ldots, t_k \in T^{S^+}$, dann $\mathrm{rt}(\psi) = \psi$.

(3) ψ ist $\dot{R}(t_1, \ldots, t_n)$ mit $t_1, \ldots, t_n \in T^{S^+}$, dann $\mathrm{rt}(\psi) = \varphi\frac{t_1 \ldots t_n}{x_1 \ldots x_n}$.

(4) $\mathrm{rt}(\psi \wedge \psi') = \mathrm{rt}(\psi) \wedge \mathrm{rt}(\psi)$ für $\psi, \psi' \in L^{S^+}$.

(5) $\mathrm{rt}(\psi \vee \psi') = \mathrm{rt}(\psi) \vee \mathrm{rt}(\psi)$ für $\psi, \psi' \in L^{S^+}$.

(6) $\mathrm{rt}(\neg\psi) = \neg\mathrm{rt}(\psi)$ für $\psi, \psi' \in L^{S^+}$.

(7) $\mathrm{rt}(\forall x \psi) = \forall x \mathrm{rt}(\psi)$ für $\psi, \psi' \in L^{S^+}$.

(8) $\mathrm{rt}(\exists x \psi) = \exists x \mathrm{rt}(\psi)$ für $\psi, \psi' \in L^{S^+}$.

2.4.8

Lemma (Eliminationslemma (Rel. D.E.)). Seien $S^+ \supset S$ eine Symbolmenge, $\mathfrak{A}^+ = (A, \alpha^+)$ eine S^+-Struktur und relationale Definitionserweiterung von $\mathfrak{A}$, β eine Belegung in A und $\mathrm{rt} : L^{S^+} \to L^S$ die relationale Übersetzung. Dann gilt für alle $\psi \in L^{S^+}$:

$$(A, \alpha^+, \beta) \models \psi \Leftrightarrow (A, \alpha, \beta) \models \mathrm{rt}(\psi)\,.$$

Beweis. Fehlt. □

2.4.9

Satz (Relationale Definitionserweiterungen definieren gleich). Seien $S^+ \supset S$ eine Symbolmenge, $\mathfrak{A}^+ = (A, \alpha^+)$ eine S^+-Struktur und relationale Definitionserweiterung von $\mathfrak{A}$ und $\mathrm{rt} : L^{S^+} \to L^S$ die relationale Übersetzung. Falls $X \subseteq A$ durch ein ψ S^+-definierbar ist, dann ebenfalls auch S-definierbar durch $\mathrm{rt}(\psi)$.

Beweis. Folgt aus dem Eliminationslemma (Rel. D.E.). □

2.4.10

Definition (Implikation von Existenz und Eindeutigkeit). Sei Γ eine Menge von Sätzen, $x_1, \ldots, x_n, y \in S_V$ und $\varphi \in L^S$ mit $\mathrm{frei}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n, y\}$. Wir sagen:

(1) Γ **impliziert die Existenz** der Objekte, die durch φ bestimmt sind, falls

$$\Gamma \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \varphi \,.$$

(2) Γ **impliziert die Eindeutigkeit** der Objekte, die durch φ bestimmt sind, falls

$$\Gamma \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y \forall z ((\varphi \wedge \varphi\frac{z}{y}) \rightarrow y = z)\,.$$

2.4.11

Definition (Funktionale Definitionserweiterung). Seien $S^+ := S \cup \{\dot{f}\}$ eine Symbolmenge, $\dot{f} \in S_F^+$ mit $\sigma(\dot{f}) = n$ und $\dot{f} \notin S$, $x_1, \ldots, x_n, y \in S_V$ und $\varphi \in L^S$ mit $\mathrm{frei}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n, y\}$. Wir nennen $\mathfrak{A}^+ = (A, \alpha^+)$ die **funktionale Definitionserweiterung** von $\mathfrak{A}$ gemäß φ, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(1) $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ impliziert die Existenz und Eindeutigkeit der Objekte, welche durch φ bestimmt sind.

(2) $\alpha^+(\dot{f}) = f_\varphi$, wobei

$$f_\varphi(a_1, \ldots, a_n) := a \Leftrightarrow \mathfrak{A}\frac{a_1 \ldots a_n}{x_1 \ldots x_n}\frac{a}{y} \models \varphi\,.$$

(3) $\alpha^+ \restriction S = \alpha$.

2.4.12

Definition (Funktionale Übersetzung). Seien $S^+ := S \cup \{\dot{f}\}$ eine Symbolmenge, $\dot{f} \in S_F^+$ mit $\sigma(\dot{f}) = n$ und $\dot{f} \notin S$, $x_1, \ldots, x_n, y \in S_V$, $\varphi \in L^S$ mit $\mathrm{frei}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n, y\}$ und $\mathfrak{A}^+ = (A, \alpha^+)$ eine S^+-Struktur und funktionale Definitionserweiterung von $\mathfrak{A}$ gemäß φ. Wir definieren die **funktionale Übersetzung** $\mathrm{ft} : L^{S^+} \to L^S$ rekursiv:

(1) $\mathrm{ft}(\psi) = \psi$ für $\psi \in \mathrm{At}^{S^+}$, falls $\dot{f}$ nicht in ψ vorkommt.

(2) $\mathrm{ft}(\psi) := \mathrm{ft}(\exists v(\varphi \frac{t_1 \ldots t_n}{x_1 \ldots x_n} \frac{v}{y} \wedge \psi')$ für $\psi \in \mathrm{At}^{S^+}$, falls $\dot{f}$ in ψ vorkommt, wobei $\psi' \in \mathrm{At}^{S^+}$ mit $v \in \mathrm{frei}(\psi')$ und $v \notin \mathrm{var}(\psi)$, und $t_1, \ldots, t_n \in T^S$ mit $\psi = \psi' \frac{\dot{f}(t_1,\ldots,t_n)}{v}$.

(3) $\mathrm{ft}(\psi \wedge \psi') = \mathrm{ft}(\psi) \wedge \mathrm{ft}(\psi')$ für $\psi, \psi' \in L^{S^+}$.

(4) $\mathrm{ft}(\psi \vee \psi') = \mathrm{ft}(\psi) \vee \mathrm{ft}(\psi')$ für $\psi, \psi' \in L^{S^+}$.

(5) $\mathrm{ft}(\psi \to \psi') = \mathrm{ft}(\psi) \to \mathrm{ft}(\psi')$ für $\psi, \psi' \in L^{S^+}$.

(6) $\mathrm{ft}(\exists x \psi) = \exists x \mathrm{ft}(\psi)$ für $\psi \in L^{S^+}$.

(7) $\mathrm{ft}(\forall x \psi) = \forall x \mathrm{ft}(\psi)$ für $\psi \in L^{S^+}$.

2.4.13

Lemma (Eliminationslemma (Fkt. D.E.)). Seien $S^+ \supset S$ eine Symbolmenge, $\mathfrak{A}^+ = (A, \alpha^+)$ eine S^+-Struktur und funktionale Definitionserweiterung von $\mathfrak{A}$, β eine Belegung in A und $\mathrm{ft} : L^{S^+} \to L^S$ die funktionale Übersetzung. Dann gilt für alle $\psi \in L^{S^+}$:

$$(A, \alpha^+, \beta) \models \psi \Leftrightarrow (A, \alpha, \beta) \models \mathrm{ft}(\psi)\,.$$

Beweis. Übung 21b. □

2.4.14

Satz (Funktionale Definitionserweiterungen definieren gleich). Seien $S^+ \supset S$ eine Symbolmenge, $\mathfrak{A}^+ = (A, \alpha^+)$ eine S^+-Struktur und funktionale Definitionserweiterung von $\mathfrak{A}$ und $\mathrm{ft} : L^{S^+} \to L^S$ die funktionale Übersetzung. Falls $X \subseteq A$ durch ein ψ S^+-definierbar ist, dann ebenfalls auch S-definierbar durch $\mathrm{ft}(\psi)$.

Beweis. Sei $\psi(x)$ eine S^+ Formel, die X definiert. Dann ist $X = \{a \in A \,|\, (A, \alpha^+, \beta\frac{a}{x}) \models \psi\}$. Nach vorherigen Lemma gilt nun $X = \{a \in A \,|\, (A, \alpha, \beta\frac{a}{x}) \models \mathrm{ft}(\psi)\}$. Da $\mathrm{ft}(\psi)$ eine S-Formel ist, ist X also S-definierbar. □

Teil II.

Mengenlehre

3. Grundlagen

3.1. Modelle der Mengenlehre

3.1.1 **Definition** (Symbolmenge der Mengenlehre)**.** Die **Symbolmenge der Mengenlehre** ist die Menge $\{\in\}$. Wir bezeichnen diese auch mit LST oder $\mathfrak{L}_\in$.

3.1.2 **Bemerkung** (LST-Strukturen)**.** Eine LST-**Struktur** $\mathfrak{A}$ ist ein **gerichteter Graph** (A, E), wobei A die Menge von Objekten und E eine binäre Relation auf A sind. Die Elemente aus A nennen wir **Knoten** und die Elemente aus E **Kanten**.

3.1.3 **Definition** ($\mathfrak{A}$-Teilmenge)**.** Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur. Dann nennen wir ein $b \in A$ eine **$\mathfrak{A}$-Teilmenge** von einem $a \in A$, falls cEa aus cEb für alle $c \in A$ folgt. Wir schreiben dann $b \subseteq a$.

3.1.4 **Definition** ($\mathfrak{A}$-Extension)**.** Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur. Für ein $a \in A$ definieren die **$\mathfrak{A}$-Extension** als

$$\mathrm{Ext}_E(a) = \{b \in A \,|\, bEa\} \ .$$

3.1.5 **Bemerkung** (Anzahl der Elemente)**.** Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur. Ist $\mathrm{Ext}_E(a)$ mit $a \in A$ endlich mit einer Anzahl von n Elementen, so schreiben wir $|\mathrm{Ext}_E(a)| := n$.

3.1.6 **Definition** (Leere Menge)**.** Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur. Wir definieren eine **leere Menge** als ein $a \in A$ mit der Eigenschaft, dass kein $b \in A$ mit bEa existiert.

3.1.7 **Definition** (Einermenge)**.** Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur. Wir definieren eine **Einermenge** von $a \in A$ als ein $b \in A$ mit der Eigenschaft, dass für alle $c \in A$ gilt: cEb genau dann, wenn $c = a$.

3.1.8 **Definition** (Paarmenge)**.** Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur. Wir definieren eine **Paarmenge** von $a \in A$ und $b \in A$ als ein $c \in A$ mit der Eigenschaft, dass für alle $d \in A$ gilt: dEc genau dann, wenn $d = a$ oder $d = b$.

3.1.9 **Definition** (Binäre Vereinigung). Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur. Wir definieren eine **Binäre Vereinigung** von $a \in A$ und $b \in A$ als ein $c \in A$ mit der Eigenschaft, dass für alle $d \in A$ gilt: dEc genau dann, wenn dEa oder dEb.

3.1.10 **Definition** (Vereinigungsmenge). Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur. Wir definieren eine **Vereinigungsmenge** von $a \in A$ als ein $b \in A$ mit der Eigenschaft, dass für alle $c \in A$ gilt: cEb genau dann, wenn ein $d \in A$ existiert, so dass dEa und cEd.

3.1.11 **Definition** ($\mathfrak{A}$-Potenzmenge). Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur. Wir definieren eine **$\mathfrak{A}$-Potenzmenge** von $a \in A$ als ein $b \in A$ mit der Eigenschaft, dass für alle $c \in A$ gilt: cEb genau dann, wenn c eine $\mathfrak{A}$-Teilmenge von a ist.

3.1.12 **Bemerkung** (Potenzmenge). Im Allgemeinen gibt uns (Pot) alleine nicht die Eindeutigkeit der Potenzmenge oder die Anzahl ihrer Elemente. Gilt jedoch zusätzlich (Ext), so ist die Eindeutigkeit vorhanden.

3.1.13 **Definition** (Aussonderungsinstanz). Seien $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur und $\varphi \in L^{\mathrm{LST}}$ mit freien Variablen $x_1, \dots x_n, x$. Wir definieren eine **Aussonderungsinstanz** aus $a \in A$ mit Parametern $a_1, \dots, a_n \in A$ gemäß φ als ein $b \in A$ mit der Eigenschaft, dass für alle $c \in A$ gilt: cEb genau dann, wenn cEa und $\mathfrak{A}\frac{ca_1\dots a_n}{xx_1\dots x_n} \models \varphi$.

3.1.14 **Lemma** (Aussonderungsinstanzen sind Teilmengen). Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur. Falls $b \in A$ eine Aussonderungsinstanz von $a \in A$ ist, so gilt $\mathrm{Ext}_E(b) \subseteq \mathrm{Ext}_E(a)$.

Beweis. Folgt direkt aus der Definition von Teilmengen. □

3.2. Axiome von FST

3.2.1 **Definition** (Extensionalitätsaxiom). Das **Extensionalitätsaxiom**, geschrieben (Ext), sagt aus, dass die Extensionen aller Knoten paarweise unterschiedlich sind. Formal:

$$\forall a \forall b (a = b \leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y)) .$$

3.2.2 **Definition** (Leere-Menge-Axiom). Das **Leere-Menge-Axiom**, geschrieben (LM), sagt aus, dass es eine leere Menge gibt. Formal:

$$\exists a \forall b \neg b \in a .$$

3.2.3 **Definition** (Einer-Mengen-Axiom). Das **Einer-Mengen-Axiom**, geschrieben ($Einer$), sagt aus, dass es zu jedem Knoten eine Einermenge gibt. Formal:

$$\forall a \exists b \forall c (c \in b \leftrightarrow c = a)\,.$$

3.2.4 **Satz** ((LM) und (Einer) folgern unendlichen Graphen). Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur mit $\mathfrak{A} \models (LM) + (Einer)$. Dann ist A unendlich.

Beweis. Es gilt $\mathfrak{A} \models (LM)$, also existiert ein $a_0 \in A$ mit $\mathrm{Ext}_E(a_0) = \emptyset$. Wir setzen für alle a_{n+1}:

$$\mathrm{Ext}_E(a_{n+1}) = \{a_n\}\,.$$

Die Existenz dieser Knoten folgt induktiv aus $\mathfrak{A} \models (Einer)$. Wir zeigen durch vollständige Induktion über n, dass $a_m \neq a_n$ für alle $m < n$ gilt. Sei also $n = 0$, dann existiert kein $m < 0$, also gilt die Behauptung hierfür. Sei nun die Behauptung für ein n gezeigt. Angenommen, es existiert nun ein $m < n+1$ mit $a_m = a_{n+1}$. Falls $m = 0$, so ist a_m eine leere Menge, a_{n+1} jedoch nach obiger Konstruktion nicht. Falls $m = k + 1$ für ein $k < n$ ist, so gilt $\{a_k\} = \mathrm{Ext}_E(a_m) = \mathrm{Ext}_E(a_{n+1}) = \{a_n\}$, also $a_m = a_n$, was jedoch nach Induktionsvoraussetzung nicht sein kann. Insgesamt erhalten wir einen Widerspruch. Damit ist die Behauptung erfüllt. □

3.2.5 **Definition** (Paar-Mengen-Axiom). Das **Paar-Mengen-Axiom**, geschrieben ($Paar$), sagt aus, dass es zu je zwei Knoten eine Paarmenge gibt. Formal:

$$\forall a \forall b \exists c \forall d (d \in c \leftrightarrow (d = a \vee d = b))\,.$$

3.2.6 **Satz** ((Paar) impliziert (Einer)). Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur mit $\mathfrak{A} \models (Paar)$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models (Einer)$.

Beweis. Sei $a \in A$. Dann existiert nach ($Paar$) ein Knoten $b \in A$ mit $\mathrm{Ext}_E(b) = \{a, a\} = \{a\}$. b ist also eine Einermenge von a. Damit gilt auch ($Einer$). □

3.2.7 **Definition** (Binäre-Vereinigungs-Axiom). Das **Binäre-Vereinigungs-Axiom**, geschrieben ($BinVer$), sagt aus, dass es zu je zwei Knoten eine binäre Vereinigung gibt. Formal:

$$\forall a \forall b \exists c \forall d (d \in c \leftrightarrow (d \in a \vee d \in b))\,.$$

3.2.8 **Definition** (Vereinigungsaxiom). Das **Vereinigungsaxiom**, geschrieben (Ver), sagt aus, dass es zu jedem Knoten eine Vereinigungsmenge gibt. Formal:

$$\forall a \exists b \forall c (c \in b \leftrightarrow \exists d (d \in a \wedge c \in d))\,.$$

3.2.9 **Satz** ((Paar) und (Ver) folgern (BinVer)). Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur mit $\mathfrak{A} \models (Paar) + (Ver)$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models (BinVer)$.

Beweis. Seien $a, b \in A$. Nach $(Paar)$ existiert ein $c \in A$ mit $\mathrm{Ext}_E(c) = \{a, b\}$. Nach (Ver) existiert ein $d \in A$ mit $\mathrm{Ext}_E(d) = \{x \in A \mid \exists y(x \in y \wedge y \in c)\}$. Dies ist eine binäre Vereinigungsmenge von a und b. Also gilt auch $(BinVer)$. □

3.2.10 **Definition** (Aussonderungsaxiomenschema). Das **Aussonderungsaxiomenschema**, geschrieben (Aus), ist eine Menge aus jeweils Axiomen $(Aus)_\varphi$, wobei $\varphi \in L^{\mathrm{LST}}$ eine Formel mit freien Variablen $x, x_1, \dots, x_n$ ist. Dabei sagt $(Aus)_\varphi$ aus, dass es zu allen $a, a_1, \dots, a_n \in A$ eine Aussonderungsinstanz $b \in A$ aus a mit Parametern $a_1, \dots, a_n$ gemäß φ gibt. Formal:

$$\forall a \forall a_1 \dots \forall a_n \exists b \forall c (c \in b \leftrightarrow (c \in a \wedge \varphi \frac{c a_1 \dots a_n}{x x_1 \dots x_n}))\,.$$

3.2.11 **Definition** (Universelle Kanten). Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur. Wir definieren eine **universelle Kante** als ein $a \in A$ mit der Eigenschaft, dass bEa für alle $b \in A$ gilt.

3.2.12 **Lemma** ((Aus) verhindert universelle Kanten). Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur mit $\mathfrak{A} \models (Aus)$. Dann existiert in $\mathfrak{A}$ keine universelle Kante.

Beweis. Angenommen, $u \in A$ wäre universell. Sei $\varphi(z) \equiv z \notin z$. Wir betrachten nun $(Aus)_\varphi$, also

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z)))\,.$$

Für u existiert also ein $y \in A$, so dass für alle $z \in A$ gilt:

$$z \in y \leftrightarrow (z \in u \wedge \varphi(z))\,.$$

Da u universell ist, enthält y nun jedes $z \in A$, für das $\varphi(z)$, also $z \notin z$ gilt. Nun ist aber $y \in y$ genau dann, wenn $y \notin y$, was ein Widerspruch ist. □

3.2.13 **Satz** ((Aus) verhindert universelle Kanten). Es gilt $(Aus) \models \forall x \exists y (y \notin x)$.

Beweis. Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur mit $\mathfrak{A} \models (Aus)$. Angenommen, es existiert ein $x \in A$, so dass kein $y \in A$ mit $y \notin x$ gibt. Dann ist x universell. Dies ist ein Widerspruch. □

3.2.14 **Definition** (Potenzmengenaxiom). Das **Potenzmengenaxiom**, geschrieben (Pot), sagt aus, dass es zu jedem Knoten eine Potenzmenge gibt. Formal:

$$\forall a \exists b \forall c (c \in b \leftrightarrow c \subseteq a) .$$

3.2.15 **Satz** (Anzahl der Elemente einer Potenzmenge). Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur mit $\mathfrak{A} \models (Ext) + (Aus) + (Pot)$. Ist $a \in A$ mit $|\mathrm{Ext}_E(a)| = n$ und $b \in A$ eine Potenzmenge von a, so gilt $|\mathrm{Ext}_E(b)| = 2^n$.

Beweis. Wir müssen zeigen: Falls $X \subseteq \mathrm{Ext}_E(a)$ ist, so existiert $a_x \in V$ mit $\mathrm{Ext}_E(a_x) = X$. Sei also $X = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq \mathrm{Ext}_E(a)$. Dann setzen wir

$$\varphi(x, a_1, \ldots, a_n) \equiv x = a_1 \vee \ldots \vee x = a_k .$$

Nun existiert nach $(Aus)_\varphi$ eine Aussonderungsinstanz $b \in A$ aus a mit Parametern $a_1, \ldots, a_k$ gemäß φ. Für dieses b gilt $\mathrm{Ext}_E(a_x) = \{a_1, \ldots, a_k\} = X$. □

3.2.16 **Bemerkung** (Funktionale Definitionserweiterung in LST). Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur mit $\mathfrak{A} \models (Ext)$. Wir erhalten folgende funktionale Definitionserweiterungen:

(1) Gilt (LM), so ist $\emptyset$ eine Konstante für die leere Menge.

(2) Gilt $(Einer)$, so ist $\{x\}$ eine 1-stellige Funktion, welche $x \in A$ auf ihre Einermenge schickt.

(3) Gilt $(Paar)$, so ist $\{x, y\}$ eine 2-stellige Funktion, welche $x, y \in A$ auf ihre Paarmenge schickt.

(4) Gilt $(BinVer)$, so ist $x \cup y$ eine 2-stellige Funktion, welche $x, y \in A$ auf ihre binäre Vereinigung schickt.

(5) Gilt (Ver), so ist $\bigcup x$ eine 1-stellige Funktion, welche $x \in A$ auf ihre Vereinigungsmenge schickt.

(6) Gilt (Aus), so ist $\left\{ z \in a \,\middle|\, \varphi\frac{z z_1 \ldots z_n}{x x_1 \ldots x_n} \right\}$ eine $(n+2)$-stellige Funktion, welche $a, z_1, \ldots, z_n \in A$ und $\varphi \in L^{\mathrm{LST}}$ mit freien Variablen $x, x_1 \ldots, x_n$ auf die Aussonderungsinstanz aus a mit Parametern $z_1, \ldots, z_n$ gemäß φ schickt.

(7) Gilt (Pot), so ist $\mathcal{P}(x)$ eine 1-stellige Funktion, welche $x \in A$ auf ihre Potenzmenge schickt.

3.2.17 **Definition** (Komprehensionsaxiomenschema). Das **Komprehensionsaxiomenschema**, geschrieben $(Komp)$, ist eine Menge aus jeweils Axiomen $(Komp)_\varphi$, wobei $\varphi \in L^{\mathrm{LST}}$ eine Formel mit freien Variablen $x, x_1, \ldots, x_n$ ist. Dabei sagt $(Aus)_\varphi$ formal aus:

$$\forall a_1 \ldots \forall a_n \exists b \forall c (c \in b \leftrightarrow \varphi \frac{c a_1 \ldots a_n}{x x_1 \ldots x_n}) .$$

3.2.18 **Satz** (Russellsche Antinomie). Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \neg(Komp)_{z \notin z}$.

Beweis. Folgt direkt aus Lemma 3.2.12. □

3.3. Paarmengengraph und FST

3.3.1 **Definition** (Paarmengengraph).

3.3.2 **Lemma** (Anzahl der Elemente vom Paarmengengraph).

Beweis. □

3.3.3 **Satz** (Paarmengengraph folgert (Ext)).

Beweis. □

3.3.4 **Satz** (Paarmengengraph folgert (LM)).

Beweis. □

3.3.5 **Satz** (Paarmengengraph folgert (Paar)).

Beweis. □

3.3.6 **Satz** (Paarmengengraph folgert (Einer)).

Beweis. □

3.3.7 **Satz** (Paarmengengraph folgert (Aus)).

Beweis. □

3.3.8 **Satz** (Paarmengengraph folgert nicht (Ver)).

Beweis. □

3.3.9 **Satz** (Paarmengengraph folgert nicht (BinVer)).

Beweis. □

3.3.10 **Satz** (Paarmengengraph folgert nicht (Pot)).

Beweis. □

3.3.11 **Bemerkung** (Hereditarily Finite).

3.3.12 **Definition** (Finite Set Theory).

3.3.13 **Bemerkung** (Finite Set Theory).

4. Die Klasse ZFC

4.1. Die natürlichen Zahlen

4.1.1 **Definition** (Nachfolger). Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine LST-Struktur mit $\mathfrak{A} \models$ FST. Dann definieren wir den **Nachfolger** von $n \in A$ als $n \cup \{n\}$.

Definitionen und Sätze

Beispiele

Index