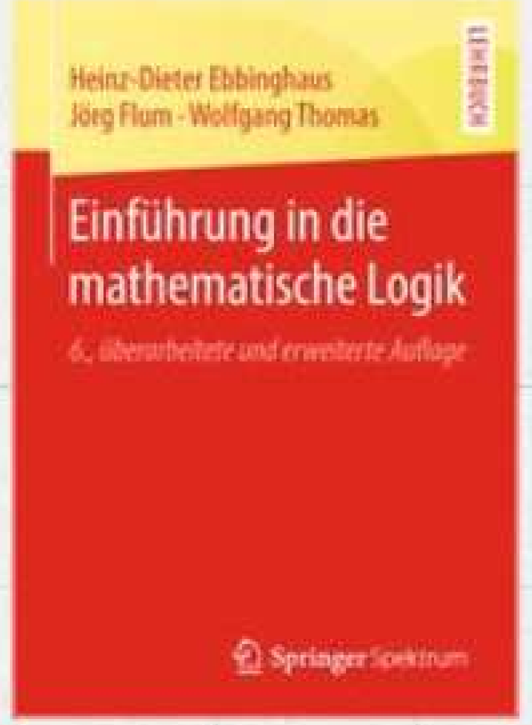
Mathematische Logik & Mengenlehre

VIERTE VORLESUNG 29. April 2020



$\longrightarrow$ § 3 Semantik der Sprachen erster Stufe

Syntax

bedeutungslosen (syntaktischen) Zeichenketten wird Bedeutung zugewiesen.

In der Algebra $\rightsquigarrow$ $\mathbb{F}_5$ Körper mit 5 Elementen.

$\rightsquigarrow$ Gruppe

- $+$ auf $\{0,1,2,3,4\}$
- $\cdot$ auf $\{1,2,3,4\}$

Gruppen ADDITIV $+,\ 0,\ -$

MULTIPLIKATIV $\cdot,\ 1,\ ^{-1}$

Die in den Termen auftretenden Symbole müssen erst mit Bedeutung versehen werden.

<u>Schlimmer noch</u>: Variablen

$$x = 2$$

ist nicht wahr oder falsch, ohne daß wir wissen, was x ist.

Auch den Variablen muß Bedeutung zugewiesen werden.

Das gleiche gilt auch für die logischen Symbole.

$\wedge$, $\vee$, $\boxed{\rightarrow}$, $\leftrightarrow$

EFT §3.2 Eine Normierung der ugs. Junktoren

$\varphi_1 \wedge \varphi_2$ wahr gdw φ_1 ist wahr und φ_2 ist wahr

In der Math. z. B. kommutativ:

$\varphi_1 \wedge \varphi_2$ gdw $\varphi_2 \wedge \varphi_1$.

Anna schlägt Karl und Karl beschwert sich bei der Vorgesetzten.

Karl beschwert sich bei der Vorgesetzten und Anna schlägt Karl.

Semantik von <u>ODER</u>.

L. E. J. Brouwer
1881-1966

GRUNDLAGENKRISE der Mathematik

Ang., wir können $\varphi \vee \psi$ beweisen,

können wir dann

entweder φ beweisen

oder ψ beweisen?

ich meine: einschließendes oder

Satz Es gibt $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ [irrational]
so daß $x^y \in \mathbb{Q}$.

Beweis $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

Fall 1 $a \in \mathbb{Q}$. $x := y := \sqrt{2}$ und $x^y \in \mathbb{Q}$.

Fall 2 $a \notin \mathbb{Q}$. $x := a$
$y := \sqrt{2}$

$$x^y = a^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

$\in \mathbb{Q}$.

$$\Phi(x,y) :\Longleftrightarrow x,y \notin \mathbb{Q} \text{ und } x^y \in \mathbb{Q}.$$

Wir haben bewiesen:

$$\Phi(\sqrt{2},\sqrt{2}) \vee \Phi\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$$

Aber wir können nicht entscheiden, welche gilt.

Von jetzt an erfüllen "und", "oder", "wenn — so", "genau dann wenn" die Bedingungen aus § 3.2 EFT.

3.1.1 Definition Eine *S-Struktur* ist ein Paar $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) A ist eine *nicht-leere* Menge, der sog. *Grundbereich* oder *Träger* von $\mathfrak{A}$.

(b) $\mathfrak{a}$ ist eine auf S definierte Abbildung. Für sie gilt:

(1) Für jedes n-stellige Relationssymbol R aus S ist $\mathfrak{a}(R)$ eine n-stellige Relation über A.

(2) Für jedes n-stellige Funktionssymbol f aus S ist $\mathfrak{a}(f)$ eine n-stellige Funktion über A.

(3) Für jede Konstante c aus S ist $\mathfrak{a}(c)$ ein Element von A.

$\mathfrak{a} : S \longrightarrow \ldots$

$c \longmapsto \mathfrak{a}(c) \in A$

$f \longmapsto \mathfrak{a}(f) : A^n \longrightarrow A$

wobei n die Stelligkeit von f

$R \longmapsto \mathfrak{a}(R) \subseteq A^n$.

Bsp.

Sprache $S = S_F \cup S_K$

$S_F = \{*, i\}$ Mult. Inv.

$S_K = \{e\}$ neutr.

Falls G eine Gruppe ist

$\|$

$(G, \cdot, {}^{-1}, 1)$

$A := G$

$\mathfrak{a}(i) := x \longmapsto x^{-1}$

$\mathfrak{a}(*) := (x,y) \longmapsto x \cdot y$ $\quad \mathfrak{a}(e) := 1$.

Bsp. 2 $\qquad (\mathbb{Z}, +, -, 0)$ Gruppe

$A := \mathbb{Z}$

$\sigma(*) := +$

$\sigma(i) := -$

$\sigma(e) := 0$

$\sigma'(*) := (x,y) \longmapsto x \cdot y$

$\sigma'(i) := x \longmapsto x + 200$

$\sigma'(e) := -8.$

Falls wir einen Term wie $* * e e i e$

$ie \xrightarrow{\sigma} 0$

$*ee \xmapsto{\sigma} 0 + 0 = 0$

$\underbrace{*}\, \underbrace{*ee}_{0}\ \underbrace{ie}_{0} \longmapsto 0 + 0 = 0$

$ie \xmapsto{\sigma'} -8 + 200 = 192$

$*ee \longmapsto -8 \cdot -8 = 64$

$* *ee\, ie$

$\longmapsto 64 \cdot 192$

Variablen

Falls $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ eine Struktur ist, so nennen wir jede Funktion

$$\beta : \mathrm{Var} \to A$$

eine **BELEGUNG für $\mathfrak{A}$.** [EFT Def. 3.1.2]

DEF 3.1.3 Eine **INTERPRETATION** ist ein Paar $(\mathfrak{A}, \beta)$, wobei $\mathfrak{A}$ eine Struktur ist und β eine Belegung.

Man beachte, daß der Begriff der Interpretation von S abhängt:

K Körper

$$\mathfrak{K} := (K, +, -, 0, \cdot, 1)$$

$S = \{*, i, e\}$, so kann $\mathfrak{K}$ diese Sprache unterschiedlich interpretieren, aber auch <u>Spracherweiterungen</u>

$$S' := \{\oplus, i, N, \otimes, e\}$$

(A, α)
$\parallel$

Falls $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine Interpretation ist, so können wir rekursiv $\mathfrak{I}$ auf T_S definieren durch:

$v_i \in Var$: $\mathfrak{I}(v_i) := \beta(v_i)$

$c \in S_K$: $\mathfrak{I}(c) := \alpha(c)$

$f \in S_F$: $\mathfrak{I}(f t_1 \dots t_n) := \alpha(f)(\mathfrak{I}(t_1), \dots, \mathfrak{I}(t_n))$

n-stellig

Technische Definition:

β Belegung für $\mathcal{A}$ $\quad a \in A \quad v_i \in \mathrm{Var}$

$$\beta\frac{a}{v_i}(y) := \begin{cases} \beta(y) & \text{falls } y \neq v_i \\ a & \text{falls } y = v_i. \end{cases}$$

Dies ist wieder eine Belegung. $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$

$$\mathfrak{I}\frac{a}{v_i} := \left(\mathfrak{A}, \beta\frac{a}{v_i}\right)$$

Bsp.

$\exists x \left(x^2 = 2 \right)$

$\exists v_0 \; * v_0 v_0 \equiv + e e$

$S_F = \{*, +\} \quad S_K = \{e\}$

WAHR in $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

FALSCH $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$

WAHRHEIT

ist eine Relation zw. Strukturen

und Aussagen

3.3.2 Definition der Modellbeziehung Für alle $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ setzen wir:

$\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2$	:gdw[1]	$\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$
$\mathfrak{I} \models Rt_1 \dots t_n$	:gdw	$R^{\mathfrak{A}}\mathfrak{I}(t_1) \dots \mathfrak{I}(t_n)$ (d.h., $R^{\mathfrak{A}}$ trifft zu auf $\mathfrak{I}(t_1), \dots, \mathfrak{I}(t_n)$)
$\mathfrak{I} \models \neg\varphi$	:gdw	nicht $\mathfrak{I} \models \varphi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \wedge \psi)$	:gdw	$\mathfrak{I} \models \varphi$ und $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \vee \psi)$	:gdw	$\mathfrak{I} \models \varphi$ oder $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)$	:gdw	wenn $\mathfrak{I} \models \varphi$, so $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$	:gdw	$\mathfrak{I} \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models \forall x\varphi$	:gdw	für alle $a \in A$ gilt $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$
$\mathfrak{I} \models \exists x\varphi$	:gdw	es gibt ein $a \in A$ mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$.

DEFINITION PER REKURSION ÜBER DEN FORMELAUFBAU

$$F_{\mathfrak{I}}(\varphi) = \begin{cases} 0 & \mathfrak{I} \models \varphi \text{ gilt nicht} \\ 1 & \mathfrak{I} \models \varphi \text{ gilt} \end{cases}$$

LaTeX

\models

$\mathfrak{I} \models \varphi$

"In $\mathfrak{I}$ gilt φ"

$\mathfrak{I}$ interpretiert φ

$\mathfrak{I}$ macht φ wahr

$\mathfrak{I}$ ist ein Modell von φ

$\mathfrak{I}$ modelliert φ

3.3.2 Definition der Modellbeziehung Für alle $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ setzen wir:

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2 & :\text{gdw}^1 & \mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2) \\
\mathfrak{I} \models Rt_1 \ldots t_n & :\text{gdw} & R^{\mathfrak{A}}\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_n) \quad (\text{d.h., } R^{\mathfrak{A}} \text{ trifft} \\
 & & \text{zu auf } \mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_n)) \\
\mathfrak{I} \models \neg\varphi & :\text{gdw} & \text{nicht } \mathfrak{I} \models \varphi \\
\mathfrak{I} \models (\varphi \wedge \psi) & :\text{gdw} & \mathfrak{I} \models \varphi \text{ und } \mathfrak{I} \models \psi \\
\mathfrak{I} \models (\varphi \vee \psi) & :\text{gdw} & \mathfrak{I} \models \varphi \text{ oder } \mathfrak{I} \models \psi \\
\mathfrak{I} \models (\varphi \rightarrow \psi) & :\text{gdw} & \text{wenn } \mathfrak{I} \models \varphi, \text{ so } \mathfrak{I} \models \psi \\
\mathfrak{I} \models (\varphi \leftrightarrow \psi) & :\text{gdw} & \mathfrak{I} \models \varphi \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{I} \models \psi \\
\mathfrak{I} \models \forall x\varphi & :\text{gdw} & \text{für alle } a \in A \text{ gilt } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi \\
\mathfrak{I} \models \exists x\varphi & :\text{gdw} & \text{es gibt ein } a \in A \text{ mit } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi.
\end{array}
$$

$$\mathfrak{a}(R) = R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$$

$A = \mathbb{Z} \quad \mathfrak{a}(R) := \leq$

$(\mathfrak{A}, \beta) \models Rt_1t_2 \Longleftrightarrow \mathfrak{I}(t_1) \leq \mathfrak{I}(t_2).$

$\mathfrak{I}$ liefert eine Fkt.

$$\mathfrak{I}: T_S \longrightarrow A.$$

$\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2$ gdw $\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$

$*xy \quad *yx$

$\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, +)$

$\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$

$$\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2 \Longleftrightarrow \beta(x) + \beta(y) = \beta(y) + \beta(x)$$

Bei $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, +)$ gilt dies unabhängig von β.

3.3.2 Definition der Modellbeziehung Für alle $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ setzen wir:

$\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2$	:gdw[1]	$\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$
$\mathfrak{I} \models Rt_1 \dots t_n$	:gdw	$R^{\mathfrak{A}}\mathfrak{I}(t_1)\dots\mathfrak{I}(t_n)$ (d.h., $R^{\mathfrak{A}}$ trifft zu auf $\mathfrak{I}(t_1), \dots, \mathfrak{I}(t_n)$)
$\mathfrak{I} \models \neg\varphi$	:gdw	nicht $\mathfrak{I} \models \varphi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \wedge \psi)$	:gdw	$\mathfrak{I} \models \varphi$ und $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \vee \psi)$	:gdw	$\mathfrak{I} \models \varphi$ oder $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)$	:gdw	wenn $\mathfrak{I} \models \varphi$, so $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$	:gdw	$\mathfrak{I} \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \psi$
$\mathfrak{I} \models \forall x\varphi$	:gdw	für alle $a \in A$ gilt $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$
$\mathfrak{I} \models \exists x\varphi$	:gdw	es gibt ein $a \in A$ mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$.

$\exists x\,(x^2 = 2)$

$\exists x \, * xx \equiv +ee$

$\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot, 1)$

β Belegung

$(\mathbb{Q}, \beta) \models \exists x * xx \equiv +ee$

es gibt $q \in \mathbb{Q}$ mit $(\mathbb{Q}, \beta\frac{q}{x}) \models * xx \equiv +ee$

$\beta\frac{q}{x}(x) = q$

$\mathfrak{I} \models \exists x \varphi \iff$ es ex. $a \in A$ mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$

$\mathfrak{I}\frac{q}{x}(*xx) = q^2$

$\mathfrak{I}\frac{q}{x}(+ee) = 2$

es gibt $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$.