Mathematische Logik & Mengenlehre

Sechste Vorlesung

$S = \{*\}$

$\varphi_A^* := \forall x \forall y \forall z \; **xyz \equiv *x*yz$

ASSOZIATIVITÄT

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

$\varphi_{NI}^* := \exists e \forall x \exists i \left(*xe \equiv x \wedge *ex \equiv x \wedge *xi \equiv e \wedge *ix \equiv e \right)$

$x \cdot e = x \quad e \cdot x = x \quad x \cdot i = e \quad i \cdot x = e$

NEUTRALES & INVERSE ELT.

$\mathcal{G} = (G, \cdot)$ heißt GRUPPE falls $\mathcal{G} \models \varphi_A^* \wedge \varphi_{NI}^*$.

$S = \{\oplus, *\}$

$\varphi_A^{\oplus} \wedge \varphi_{NI}^{\oplus} \wedge \varphi_K^{\oplus} \wedge \varphi_A^{*} \wedge \varphi_D^{*\oplus} = \varphi_{RING}$

$\varphi_K^* := \forall x \forall y \; *xy \equiv *yx$

KOMMUTATIVITÄT

$\varphi_D^{*\oplus} := \forall x \forall y \forall z \left[*x \oplus yz \equiv \oplus *xy *xz \wedge * \oplus xyz \equiv \oplus *xz *yz \right]$

$x(y+z) = xy + xz$

$(x+y)z = xz + yz$

$\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ heißt RING falls $\mathcal{R} \models \varphi_{RING}^{*\oplus}$

$$\varphi_N^* := \exists x \forall y (*xy = y \wedge *yx = y)$$

$\mathcal{R}$ heißt RING MIT EINS falls $\mathcal{R} \models \varphi_{RING}^{*\oplus} \wedge \varphi_N^*$.

Bsp. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Ring
und auch ein Ring mit Eins
[nämlich $1 \in \mathbb{Z}$ ist neutral]

$(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Ring (Unterring von $\mathbb{Z}$)
Aber KEIN Ring mit Eins.

gerade Zahlen

RING $\quad \mathcal{R} \models \varphi_{RING}^{*\oplus}$

RING MIT EINS $\quad \mathcal{R} \models \varphi_{RING}^{*\oplus} \wedge \varphi_{N}^{*}$

$\varphi_{\mathbb{1}} := \forall x \; * \mathbb{1} x = x \wedge * x \mathbb{1} = x$

$\mathcal{R}^* = (R, +, \cdot, 1)$

$\mathcal{R}^*$ ist ein Eins-Ring falls $\mathcal{R}^* \models \varphi_{RING}^{*\oplus} \wedge \varphi_{\mathbb{1}}$

$S = \{\oplus, *\}$

$S^* = \{\underbrace{\oplus, *}_{\text{zweistellige Fktsymbole}}, \mathbb{1}\}$

Konstantensymbol

Intuitiv: Ringe mit Eins & Eins-Ringe sind das gleiche.

Falls S, S' Symbolmengen sind mit $S \subseteq S'$ und $\mathfrak{A}' = (A, \mathfrak{a}')$ ist eine S'-Struktur, so definieren wir

$\mathfrak{a}$ auf S als Einschränkung von $\mathfrak{a}'$ auf S

Dann ist $\mathfrak{A} := (A, \mathfrak{a})$ eine S-Struktur. Dies nennen wir das S-REDUKT von $\mathfrak{A}'$.

In diesem Falle nennen wir $\mathfrak{A}'$ eine S'-EXPANSION von $\mathfrak{A}$.

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

$S' = \{\oplus, *\}$

$S = \{\oplus\}$ $\qquad (\mathbb{Z}, +)$

$(\mathbb{Z}, +, f)$ $\qquad f(x,y) := 0$

$S = \{*, \oplus\}$

Wir kehren hierhin beim SUBSTRUKTUR-LEMMA zurück.

$S' = \{*, \oplus, \mathbb{1}\}$

RINGE MIT EINS

EINS-RINGE

$\mathcal{R}'$ ein Eins-Ring $= (R, +, \cdot, 1)$

$\mathcal{R}$ das S-Redukt von $\mathcal{R}'$

$(R, +, \cdot)$

$\mathcal{R}$ ist ein Ring mit Eins.

UMGEKEHRT

$\mathcal{R}$ Ring mit Eins. Sei z.B. $e \in R$ so daß $\forall x \; x \cdot e = e \cdot x = x$

Definiere Expansion $\mathcal{R}'$ durch $\alpha(\mathbb{1}) := e$. Dann ist $\mathcal{R}'$ ein Eins-Ring.

Isomorphielemma

Wir wollen zeigen, daß isomorphe Strukturen dieselben Sätze erfüllen.

S-Isomorphismus

3.5.1 Definition $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien S-Strukturen.
(a) Eine Abbildung $\pi: A \to B$ heißt ein *Isomorphismus von* $\mathfrak{A}$ *auf* $\mathfrak{B}$ (kurz: $\boxed{\pi: \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}}$) :gdw
  (1) π ist eine Bijektion von A auf B.
  (2) Für n-stelliges $R \in S$ und $a_1, \dots, a_n \in A$:
$(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}}$ — $R^{\mathfrak{A}} a_1 \dots a_n$ gdw $R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \dots \pi(a_n)$. — $(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$.
  (3) Für n-stelliges $f \in S$ und $a_1, \dots, a_n \in A$:
$$\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)).$$
STRUKTURERHALTUNG IM ÜBLICHEN ALGEBR. SINNE
  (4) Für $c \in S$ ist $\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.
(b) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen *isomorph* (kurz: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$) genau dann, wenn es einen Isomorphismus $\pi: \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ gibt.

$S = \{*\}$

$(\{0,1\}, +)$

$0+0 = 1+1 = 0$
$0+1 = 1+0 = 1$

$(\{-1,1\}, \cdot)$

$-1 \cdot -1 = 1 \cdot 1 = 1$
$-1 \cdot 1 = 1 \cdot -1 = -1$

$\pi: \{0,1\} \to \{-1,1\}$

$\pi(x+y) = \pi(x) \cdot \pi(y)$

ISOMORPHISMEN sind strukturerhaltende Bijektionen.

$S' = \{*, \underline{1}\}$

$(\{0,1\}, +, 0)$ $\pi(0) = 1$.

$(\{-1,1\}, \cdot, 1)$

$\mathfrak{a}(R) = R^{\mathfrak{A}}$

Bsp. für Relationssymbole:

$(\mathbb{Z}, \leq)$ — 2stellige Relation

$(A, \leq')$

$(a_1, a_2) \in \leq \iff (\pi(a_1), \pi(a_2)) \in \leq'$

$a_1 \leq a_2$ $\pi(a_1) \leq' \pi(a_2)$

ORDNUNGSERHALTEND

ISOMORPHIELEMMA 3.5.2

Falls $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ S-Strukturen, φ ein S-Satz und $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, so gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi$.

Dies ist wohldefiniert da φ Satz und wegen des Koinzidenz-Lemmas.

Beweis. Wir zeigen (um Induktion verwenden zu können) eine stärkere Aussage:

Falls β eine A-Belegung ist, so ist $\pi \circ \beta$ eine B-Belegung.

$\exists x\, (\underbrace{x \equiv 1})$

Falls nun $\mathfrak{J} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine S-Interpretation ist, so auch $\mathfrak{J}^\pi := (\mathfrak{B}, \pi \circ \beta)$.

Das Isomorphielemma ist der Spezialfall φ ist Satz.

Beh. (1) Falls $t \in T^S$, so ist $\pi(\mathfrak{J}(t)) = \mathfrak{J}^\pi(t)$

(2) Falls $\varphi \in L^S$, so gilt $\mathfrak{J} \models \varphi \iff \mathfrak{J}^\pi \models \varphi$.

Beweis von (1): $\forall t \in T^S \quad \pi(\mathfrak{I}(t)) = \mathfrak{I}^\pi(t)$

per Induktion nach dem Termaufbau.

$\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$

$\mathfrak{B} = (B, \mathfrak{b})$

(A) $t \in Var$: $\pi(\mathfrak{I}(t)) = \pi(\beta(t))$
$= (\pi \circ \beta)(t) = \mathfrak{I}^\pi(t)$.

(B) $t \in S_K$: $\pi(\mathfrak{I}(t)) = \pi(\mathfrak{a}(t)) = \mathfrak{b}(t) = \mathfrak{I}^\pi(t)$.

3.5.1 Definition $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien S-Strukturen.

(a) Eine Abbildung $\pi\colon A \to B$ heißt ein *Isomorphismus von* $\mathfrak{A}$ *auf* $\mathfrak{B}$ (kurz: $\pi\colon \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$) :gdw

(1) π ist eine Bijektion von A auf B.

(2) Für n-stelliges $R \in S$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$:
$$R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_n \quad \text{gdw} \quad R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \ldots \pi(a_n).$$

(3) Für n-stelliges $f \in S$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$:
$$\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)).$$

(4) Für $c \in S$ ist $\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

(b) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen *isomorph* (kurz: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$) genau dann, wenn es einen Isomorphismus $\pi\colon \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ gibt.

(C) $t = f t_1 \ldots t_n$

$$\pi(\mathfrak{I}(f t_1 \ldots t_n)) = \pi(\mathfrak{a}(f)(\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_n)))$$
$$= \mathfrak{b}(f)(\pi(\mathfrak{I}(t_1)), \ldots \pi(\mathfrak{I}(t_n)))$$
$$\overset{IV}{=} \mathfrak{b}(f)(\mathfrak{I}^\pi(t_1) \ldots \mathfrak{I}^\pi(t_n))$$
$$= \mathfrak{I}^\pi(f t_1 \ldots t_n). \quad \text{qed (1)}$$

Für (1) haben wir lediglich Eigenschaften (3) und (4) verwendet.

Beweis von (2): $\mathfrak{I} \models \varphi$ gdw $\mathfrak{I}^\pi \models \varphi$

Per Induktion nach dem Formelaufbau.

Wir zeigen nur: atomare Formeln und Quantoren.

(1): $\pi(\mathfrak{I}(t)) = \mathfrak{I}^\pi(t)$ ✗

ATOMARE AUSDRÜCKE

(A) $t_1 \equiv t_2$

$$\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2 \iff \mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$$

$$\iff \pi(\mathfrak{I}(t_1)) = \pi(\mathfrak{I}(t_2))$$

[für $\Leftarrow$ brauche ich Injektivität von π]

$$\iff \mathfrak{I}^\pi(t_1) = \mathfrak{I}^\pi(t_2)$$

$$\iff \mathfrak{I}^\pi \models t_1 \equiv t_2.$$

(B) $Rt_1 \dots t_n$

$$\mathfrak{I} \models Rt_1 \dots t_n \iff (\mathfrak{I}(t_1), \dots, \mathfrak{I}(t_n)) \in \mathfrak{a}(R)$$

$$\iff (\pi(\mathfrak{I}(t_1)), \dots, \pi(\mathfrak{I}(t_n))) \in \mathfrak{b}(R)$$

[Bed. (2) $\cong$]

$$\iff (\mathfrak{I}^\pi(t_1), \dots, \mathfrak{I}^\pi(t_n)) \in \mathfrak{b}(R)$$

$$\iff \mathfrak{I}^\pi \models Rt_1 \dots t_n$$

3.5.1 Definition $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien S-Strukturen.

(a) Eine Abbildung $\pi\colon A \to B$ heißt ein *Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$* (kurz: $\pi\colon \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$) :gdw

(1) π ist eine Bijektion von A auf B.

(2) Für n-stelliges $R \in S$ und $a_1, \dots, a_n \in A$:

$$R^{\mathfrak{A}} a_1 \dots a_n \quad \text{gdw} \quad R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \dots \pi(a_n).$$

(3) Für n-stelliges $f \in S$ und $a_1, \dots, a_n \in A$:

$$\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)).$$

(4) Für $c \in S$ ist $\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

(b) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen *isomorph* (kurz: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$) genau dann, wenn es einen Isomorphismus $\pi\colon \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ gibt.

(C), (D), (E), (F), (G), (H)

$\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \forall$

Übung ...

(I) $\exists x \varphi$

$\mathfrak{I} \models \exists x \varphi \iff$ ex. $a \in A$ $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$

$\overset{\text{IV}}{\iff}$ ex. $a \in A$ $\left(\mathfrak{I}\frac{a}{x}\right)^{\pi} \models \varphi$

$\iff$ ex. $a \in A$ $(\mathfrak{I}^{\pi})\frac{\pi(a)}{x} \models \varphi$

$\iff$ ex. $b \in B$ $(\mathfrak{I}^{\pi})\frac{b}{x} \models \varphi$

[weil π Surjektion war] für $\Leftarrow$

$\iff \mathfrak{I}^{\pi} \models \exists x \varphi$

qed (2)

qed (Isomorphielemma)

$$\left(\mathfrak{I}\frac{a}{x}\right)^{\pi} = \left(\mathcal{A}, \mathfrak{a}, \beta\frac{a}{x}\right)^{\pi} = \left(\mathcal{B}, \mathfrak{b}, \underbrace{\pi \circ \beta\frac{a}{x}}_{= (\pi\circ\beta)\frac{\pi(a)}{x}}\right)$$

$$= \left(\mathcal{B}, \mathfrak{b}, (\pi\circ\beta)\frac{\pi(a)}{x}\right) = (\mathcal{B}, \mathfrak{b}, \pi\circ\beta)\frac{\pi(a)}{x} = (\mathfrak{I}^{\pi})\frac{\pi(a)}{x}$$

Bemerkung Wir haben explizit angemerkt, welche der Bed. in $\cong$ an welcher Stelle der Induktion verwendet wurden und können damit weitere Theoreme formulieren:

z.B. Falls π alle Bed. außer Surjektivität erfüllt (also injektiv + strukturerhaltend), so gilt

$$\mathcal{J} \models \varphi \iff \mathcal{J}' \models \varphi$$

für alle Formeln, die keine Quantoren enthalten.

Weitere Anwendung des Beweises.

$\mathfrak{A}$ eine S-Struktur $X \subseteq A$

Wir nennen X **definierbar** falls eine Formel Φ mit $\mathrm{frei}(\Phi) = \{v_0\}$ existiert mit

für alle $a \in A$ gilt $\quad a \in X \iff \mathfrak{A}\frac{a}{v_0} \models \Phi$

[Bsp. in $\mathbb{Q}$ $\exists z\ v_0 \equiv z^2$

in $\mathbb{Z}$ $\exists z\ v_0 \equiv z+z+z$]

Falls nun π ein AUTOMORPHISMUS ist (also $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}$), dann gilt: falls X definierbar und $a \in X$, so auch $\pi(a)$.

Ang. Φ definiere X und $\mathfrak{A}\frac{a}{v_0} \models \Phi \iff \left(\mathfrak{A}\frac{a}{v_0}\right)^{\pi} \models \Phi \iff \mathfrak{A}\frac{\pi(a)}{v_0} \models \Phi$

Beweis des IL

$\iff \pi(a) \in X.$

3.5.4 Definition Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ S-Strukturen. Dann heißt $\mathfrak{A}$ *Substruktur* von $\mathfrak{B}$ (kurz: $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$), wenn

(a) $A \subseteq B$;

(b) (1) für n-stelliges $R \in S$ ist $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^n$
(d.h., für alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt: $R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_n$ gdw $R^{\mathfrak{B}} a_1 \ldots a_n$);

(2) für n-stelliges $f \in S$ ist $f^{\mathfrak{A}}$ die Restriktion von $f^{\mathfrak{B}}$ auf A^n;

(3) für $c \in S$ ist $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$

$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$

$(A, \mathfrak{a}) \quad (B, \mathfrak{b})$

$A \subseteq B$

$\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ stimmen auf A überein.

Bsp.

$(\mathbb{Q}, +)$

$(\mathbb{N}, +) \subseteq (\mathbb{Z}, +) \subseteq (\mathbb{Q}, +)$

$\forall x \exists y \; y + y = x$

φ^{+}_{NI}

Das Analogon des IL gilt nicht für Substrukturen.