Mathematische Logik & Mengenlehre

VORLESUNG VIII

§3.8

Substitution [simultane]

KONSEKUTIV $\left(\varphi\frac{t}{x}\right)\frac{t'}{x'}$ SIMULTANE $\varphi\frac{t\,t'}{x\,x'}$

Heute nach der VL

Möglichkeit zum informellen Austausch hier in ZOOM.

TERME

3.8.1 Definition

(a) $x\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := \begin{cases} x, & \text{falls } x \neq x_0, \ldots, x \neq x_r \\ t_i, & \text{falls } x = x_i \end{cases}$

(b) $c\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := c$

(c) $[ft'_1\ldots t'_n]\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := ft'_1\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}\ldots t'_n\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}$.

AUSDRÜCKE

3.8.2 Definition

(a) $[t'_1 \equiv t'_2]\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := t'_1\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} \equiv t'_2\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}$

(b) $[Rt'_1\ldots t'_n]\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := Rt'_1\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}\ldots t'_n\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}$

(c) $[\neg\varphi]\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := \neg[\varphi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}]$

(d) $(\varphi \vee \psi)\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := \left(\varphi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} \vee \psi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}\right)$

(e) Seien $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ $(i_1 < \ldots < i_s)$ die Variablen x_i unter $x_0, \ldots, x_r$ mit

$$x_i \in \text{frei}(\exists x\varphi) \text{ und } x_i \neq t_i.$$

Insbesondere ist $x \neq x_{i_1}, \ldots, x \neq x_{i_s}$. Dann setzen wir

$$[\exists x\varphi]\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := \exists u\left[\varphi\frac{t_{i_1}\ldots t_{i_s}u}{x_{i_1}\ldots x_{i_s}x}\right];$$

dabei sei u die Variable x, falls x nicht in $t_{i_1}, \ldots, t_{i_s}$ auftritt; sonst sei u die erste Variable von $v_0, v_1, v_2, \ldots$, die nicht in $\varphi, t_{i_1}, \ldots, t_{i_s}$ vorkommt.

Terme

Var $\quad x\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} \longmapsto \begin{cases} t_i & \text{falls } x = x_i \\ x & \text{sonst} \end{cases}$

$S_K \quad c\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := c$

$fs_1\ldots s_n \quad fs_1\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}\ldots s_n\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}$

3.8.2 Definition

(a) $[t'_1 \equiv t'_2]\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} := t'_1\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} \equiv t'_2\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r}$

(b) $[Rt'_1 \dots t'_n]\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} := Rt'_1\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} \dots t'_n\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r}$

(c) $[\neg\varphi]\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} := \neg[\varphi\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r}]$

(d) $(\varphi \vee \psi)\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} := \left(\varphi\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} \vee \psi\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r}\right)$

(e) Seien $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$ $(i_1 < \dots < i_s)$ die Variablen x_i unter $x_0, \dots, x_r$ mit

$$x_i \in \text{frei}(\exists x\varphi) \text{ und } \boxed{x_i \neq t_i.}$$

Insbesondere ist $x \neq x_{i_1}, \dots, x \neq x_{i_s}$. Dann setzen wir

$$[\exists x\varphi]\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} := \exists u\left[\varphi\frac{t_{i_1} \dots t_{i_s} u}{x_{i_1} \dots x_{i_s} x}\right];$$

dabei sei u die Variable x, falls x nicht in $t_{i_1}, \dots, t_{i_s}$ auftritt; sonst sei u die erste Variable von $v_0, v_1, v_2, \dots$, die nicht in $\varphi, t_{i_1}, \dots, t_{i_s}$ vorkommt.

At

$$[t \equiv t']\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} = t\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} \equiv t'\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r}$$

$$[Rs_1 \dots s_n]\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} = Rs_1\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} \dots s_n\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r}.$$

$\vee$

$\neg$

$\boxed{\exists x}$

DIES IST DER PROBLEMATISCHE FALL

$$[\exists x\varphi]\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} =$$

$$[\exists x\varphi]\frac{t_0 \cancel{t_1} \cancel{t_2} t_3}{x_0 \cancel{x_1} \cancel{x_2} x_3} \rightsquigarrow x_0 x_3$$

$x_1 = t_1$ $\quad x_2 \notin \text{frei}(\exists x\varphi)$

$i_1 = 0$

$i_2 = 3$

$$\exists u\left[\varphi\frac{t_{i_1} \dots t_{i_s} \; u}{x_{i_1} \dots x_{i_s} \; x}\right].$$

$$= \exists x\,\varphi\frac{t_{i_1} \dots t_{i_s}}{x_{i_1} \dots x_{i_s}} \quad (\text{falls } x=u)$$

3.8.1 Definition

(a) $x\frac{t_0\dots t_r}{x_0\dots x_r} := \begin{cases} x, & \text{falls } x \neq x_0, \dots, x \neq x_r \\ t_i, & \text{falls } x = x_i \end{cases}$

(b) $c\frac{t_0\dots t_r}{x_0\dots x_r} := c$

(c) $[ft'_1\dots t'_n]\frac{t_0\dots t_r}{x_0\dots x_r} := ft'_1\frac{t_0\dots t_r}{x_0\dots x_r}\dots t'_n\frac{t_0\dots t_r}{x_0\dots x_r}$.

3.8.2 Definition

(a) $[t'_1 \equiv t'_2]\frac{t_0\dots t_r}{x_0\dots x_r} := t'_1\frac{t_0\dots t_r}{x_0\dots x_r} \equiv t'_2\frac{t_0\dots t_r}{x_0\dots x_r}$

(b) $[Rt'_1\dots t'_n]\frac{t_0\dots t_r}{x_0\dots x_r} := Rt'_1\frac{t_0\dots t_r}{x_0\dots x_r}\dots t'_n\frac{t_0\dots t_r}{x_0\dots x_r}$

(c) $[\neg\varphi]\frac{t_0\dots t_r}{x_0\dots x_r} := \neg[\varphi\frac{t_0\dots t_r}{x_0\dots x_r}]$

(d) $(\varphi \vee \psi)\frac{t_0\dots t_r}{x_0\dots x_r} := \left(\varphi\frac{t_0\dots t_r}{x_0\dots x_r} \vee \psi\frac{t_0\dots t_r}{x_0\dots x_r}\right)$

(e) Seien $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$ $(i_1 < \dots < i_s)$ die Variablen x_i unter $x_0, \dots, x_r$ mit

$$x_i \in \text{frei}(\exists x\varphi) \text{ und } x_i \neq t_i.$$

Insbesondere ist $x \neq x_{i_1}, \dots, x \neq x_{i_s}$. Dann setzen wir

$$[\exists x\varphi]\frac{t_0\dots t_r}{x_0\dots x_r} := \exists u\left[\varphi\frac{t_{i_1}\dots t_{i_s}u}{x_{i_1}\dots x_{i_s}x}\right];$$

dabei sei u die Variable x, falls x nicht in $t_{i_1}, \dots, t_{i_s}$ auftritt; sonst sei u die erste Variable von $v_0, v_1, v_2, \dots$, die nicht in $\varphi, t_{i_1}, \dots, t_{i_s}$ vorkommt.

Beispiele. Für zweistellige P und f gilt

(1) $[Pv_0fv_1v_2]\frac{v_2v_0v_1}{v_1v_2v_3} = Pv_0fv_2v_0$.

(2) $[\exists v_0Pv_0fv_1v_2]\frac{v_4\ fv_1v_1}{v_0\ \ v_2} = \exists v_0\left[Pv_0fv_1v_2\frac{fv_1v_1\ v_0}{v_2\ \ v_0}\right]$
$= \exists v_0Pv_0fv_1fv_1v_1$.

(3) $[\exists v_0Pv_0fv_1v_2]\frac{v_0v_2v_4}{v_1v_2v_0} = \exists v_3\left[Pv_0fv_1v_2\frac{v_0v_3}{v_1v_0}\right] = \exists v_3Pv_3fv_0v_2$.

$$[Pv_0fv_1v_2]\frac{v_2v_0v_1}{v_1v_2v_3} \overset{3.8.2}{\underset{(b)}{=}} P\underbrace{v_0\frac{v_2v_0v_1}{v_1v_2v_3}}_{\substack{3.8.1\\ v_0}}\underbrace{[fv_1]\frac{v_2v_0v_1}{v_1v_2v_3}}_{\substack{3.8.1\\ f[v_1]\frac{v_2v_0v_1}{v_1v_2v_3}\\ fv_2}}\underbrace{v_2\frac{v_2v_0v_1}{v_1v_2v_3}}_{\substack{3.8.1\\ v_0}}$$

$$= Pv_0fv_2v_0$$

3.8.2 Definition

(a) $[t_1' \equiv t_2']\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} := t_1'\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} \equiv t_2'\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r}$

(b) $[Rt_1' \dots t_n']\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} := Rt_1'\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} \dots t_n'\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r}$

(c) $[\neg\varphi]\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} := \neg[\varphi\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r}]$

(d) $(\varphi \vee \psi)\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} := \left(\varphi\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} \vee \psi\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r}\right)$

(e) Seien $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$ $(i_1 < \dots < i_s)$ die Variablen x_i unter $x_0, \dots, x_r$ mit

$$x_i \in \text{frei}(\exists x\varphi) \text{ und } x_i \neq t_i.$$

Insbesondere ist $x \neq x_{i_1}, \dots, x \neq x_{i_s}$. Dann setzen wir

$$[\exists x\varphi]\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} := \exists u \left[\varphi\frac{t_{i_1} \dots t_{i_s} u}{x_{i_1} \dots x_{i_s} x}\right];$$

dabei sei u die Variable x, falls x nicht in $t_{i_1}, \dots, t_{i_s}$ auftritt; sonst sei u die erste Variable von $v_0, v_1, v_2, \dots$, die nicht in $\varphi, t_{i_1}, \dots, t_{i_s}$ vorkommt.

Beispiele. Für zweistellige P und f gilt

(1) $[Pv_0fv_1v_2]\frac{v_2v_0v_1}{v_1v_2v_3} = Pv_0fv_2v_0.$

(2) $[\exists v_0Pv_0fv_1v_2]\frac{v_4\ fv_1v_1}{v_0\ \ v_2} = \exists v_0\left[Pv_0fv_1v_2\frac{fv_1v_1\ v_0}{v_2\ \ v_0}\right]$
$= \exists v_0Pv_0fv_1fv_1v_1.$

(3) $[\exists v_0Pv_0fv_1v_2]\frac{v_0v_2v_4}{v_1v_2v_0} = \exists v_3\left[Pv_0fv_1v_2\frac{v_0v_3}{v_1v_0}\right] = \exists v_3Pv_3fv_0v_2.$

$$\left[\underbrace{\exists v_0 Pv_0fv_1v_2}\right]\frac{\cancel{v_4}\ fv_1v_1}{\cancel{v_0}\ \ v_2} =$$

freie Variable: $v_1\ v_2$

$t_0 = v_4,\ x_0 = v_0$; $t_1 = fv_1v_1,\ x_1 = v_2$

$x_0 \neq t_0$

$x_1 \neq t_1$

D.h. $x_{i_0} = x_1 = v_2$

$x = v_0 \Longrightarrow u = x = v_0$

$$= \exists v_0\left[[Pv_0fv_1v_2]\frac{fv_1v_1\ v_0}{v_2\ \ v_0}\right] = \exists v_0\left[Pv_0fv_1fv_1v_1\right].$$

3.8.3 Substitutionslemma (a) *Für alle Terme t:*

$$\mathfrak{I}\left(t\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}\right)=\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)\ldots\mathfrak{I}(t_r)}{x_0\ldots x_r}(t).$$

(b) *Für alle Ausdrücke φ:*

$$\mathfrak{I}\models\varphi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}\quad gdw\quad \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)\ldots\mathfrak{I}(t_r)}{x_0\ldots x_r}\models\varphi.$$

Beweis

(a) Terminduktion

(b) Formelinduktion.

zu (a): Ang. $t = x$.

$$\mathfrak{I}\left(x\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}\right)=\begin{cases}\mathfrak{I}(x) & \text{falls } x\notin\{x_0,\ldots,x_r\}\\ \mathfrak{I}(t_i) & \text{falls } x=x_i.\end{cases}$$

$$=\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_i)}{x_i}(x).$$

Bei den Termen passiert nichts spannendes.

(b) Ausdrücke: At

$t \equiv t'$

$Rt_1 \ldots t_n$

folgt direkt aus (a)

$\vee$

$\neg$

folgt direkt aus Def.

$\exists$

3.8.3 Substitutionslemma (a) *Für alle Terme t:*

$$\mathfrak{I}\left(t\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}\right) = \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)\ldots\mathfrak{I}(t_r)}{x_0\ldots x_r}(t).$$

(b) *Für alle Ausdrücke φ:*

$$\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} \quad gdw \quad \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)\ldots\mathfrak{I}(t_r)}{x_0\ldots x_r} \models \varphi.$$

3.8.2 Definition

(a) $[t_1' \equiv t_2']\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := t_1'\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} \equiv t_2'\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}$

(b) $[Rt_1'\ldots t_n']\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := Rt_1'\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}\ldots t_n'\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}$

(c) $[\neg\varphi]\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := \neg[\varphi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}]$

(d) $(\varphi \vee \psi)\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := \left(\varphi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} \vee \psi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}\right)$

(e) Seien $x_{i_1},\ldots,x_{i_s}$ $(i_1 < \ldots < i_s)$ die Variablen x_i unter $x_0,\ldots,x_r$ mit

$$x_i \in \text{frei}(\exists x\varphi) \text{ und } x_i \neq t_i.$$

Insbesondere ist $x \neq x_{i_1},\ldots,x \neq x_{i_s}$. Dann setzen wir

$$[\exists x\varphi]\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := \boxed{\exists u\left[\varphi\frac{t_{i_1}\ldots t_{i_s}u}{x_{i_1}\ldots x_{i_s}x}\right]};$$

dabei sei u die Variable x, falls x nicht in $t_{i_1},\ldots,t_{i_s}$ auftritt; sonst sei u die erste Variable von $v_0, v_1, v_2,\ldots$, die nicht in $\varphi, t_{i_1},\ldots,t_{i_s}$ vorkommt.

da u nicht in $t_{i_1},\ldots,t_{i_s}$ vorkommt impliziert das Koinzidenzlemma, daß $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}\frac{a}{u}$ den gl. Wert haben

Ang. (IA):

$$\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} \text{ gdw } \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)\ldots\mathfrak{I}(t_r)}{x_0\ldots x_r} \models \varphi$$

Wollen dies für $\exists x\varphi$.

$$\mathfrak{I} \models \boxed{[\exists x\varphi]\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}} \iff \mathfrak{I} \models \exists u\left[\varphi\frac{t_{i_1}\ldots t_{i_s}\,u}{x_{i_1}\ldots x_{i_s}\,x}\right]$$

mit $i_1,\ldots,i_s$ und u wie in der Definition

$$\iff \text{es ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{I}\frac{a}{u} \models \varphi\frac{t_{i_1}\ldots t_{i_s}u}{x_{i_1}\ldots x_{i_s}x}$$

IV

$$\iff \text{es ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{I}\frac{a}{u}\frac{\cancel{\mathfrak{I}\frac{a}{u}}(t_{i_1})\ldots\cancel{\mathfrak{I}\frac{a}{u}}(t_{i_s})\ \cancel{\mathfrak{I}\frac{a}{u}(u)}\ a}{x_{i_1}\ \ldots\ x_{i_s}\quad x} \models \varphi$$

$$\iff \text{es ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_{i_1})\ldots\mathfrak{I}(t_{i_s})\ a}{x_{i_1}\ldots x_{i_s}\quad x} \models \varphi \iff \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_{i_1})\ldots\mathfrak{I}(t_{i_s})}{x_{i_1}\ldots x_{i_s}} \models \exists x\varphi$$

$\implies$ Beh.

Gestern in der Übung:

Anzahlformeln $\varphi_{\leq n}$: es gibt höchstens n Elemente

$\varphi_{=n}$: es gibt genau n Elemente.

Auf dem neuen Übungsblatt sehen wir den eindeutigen Existenzquantor $\exists x^{=1}$ "es existiert genau ein x"

$\exists ! x$

definiert durch Substitution.

Mengenlehre

Häufig: die Grundlage der gesamten Mathematik

Warum gibt es überhaupt EINE Grundlage?

z.B. in der Physik. Jedes Teilgebiet hat einen eigenen Formalismus. Manchmal gibt es Übersetzungen.

Die Formalismen sind oft INKOMMENSURABEL.

Suche nach der

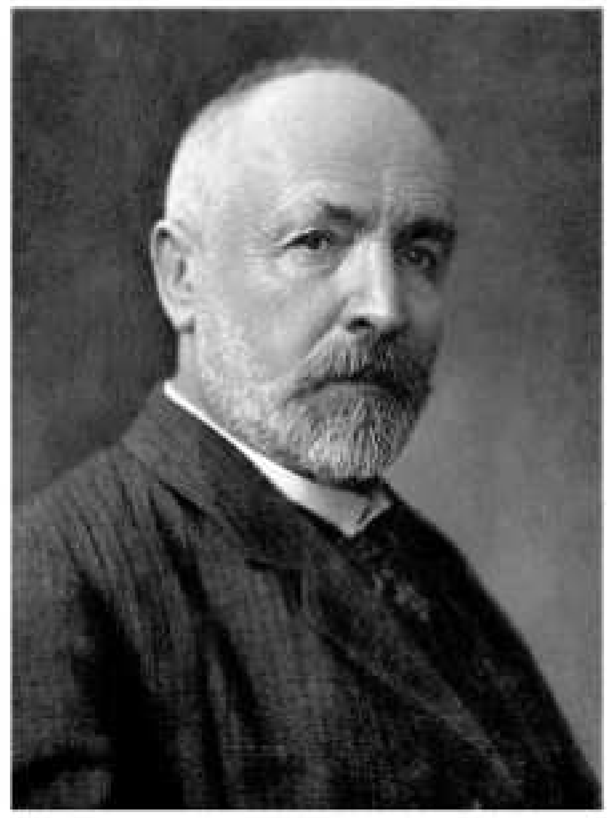
Theory of Everything!

Mathematik

Zahlentheorie	$\longrightarrow$	natürliche Zahlen $(\mathbb{N}, +, \cdot, <)$
Analysis	$\longrightarrow$	reelle / komplexe Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$
Geometrie	$\longrightarrow$	geometrische Figuren
Graphentheorie	$\longrightarrow$	Graphen (V, E)
Algebra	$\longrightarrow$	algebraische Strukturen: Gruppen, Ringe, Körper, Vektorräume $(G, +, 0)$
Funktionalanalysis	$\longrightarrow$	Operatorenräume über VR

Zweite Hälfte des 19. Jhdts:
Versuch der GRUNDLEGUNG der Mathematik durch eine Theorie.

Ende des 19. Jhdts. / Anfang des 20. Jhdts.: KANDIDAT Mengenlehre.

Georg Cantor
1845-1918

Cantor entwickelte die Grundzüge der Mengenlehre anhand konkreter mathematischer Probleme:

z.B. Überabzählbarkeit.

$$\mathbb{R} = \underbrace{\mathbb{A}}_{\text{algebraisch}} \cup \underbrace{\mathbb{T}}_{\text{transzendent}}$$

Cantor zeigte:

1. $\mathbb{R}$ überabzählbar
2. $\mathbb{A}$ abzählbar
3. X, Y abzählbar $\Longrightarrow$ $X \cup Y$ abzählbar

$\Longrightarrow$ $\mathbb{T}$ ist überabzählbar

$\Longrightarrow$ $\mathbb{T} \neq \emptyset$.

Was ist denn eine Menge?

Georg Cantor (1845–1918), der Schöpfer der Mengenlehre, eröffnet seine *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* [Cantor 1895/7], die den Schlußstein seiner mengentheoretischen Arbeiten bilden, mit der folgenden Definition:

> Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Das ist eigentlich keine Definition!

Diese Situation ist nicht neu:

σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.

εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

1. **Punkt** ist, was ohne Teil ist.
2. **Linie** ist Länge ohne Breite.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
4. **Gerade** (genauer: **Strecke**, denn geometrische Objekte sind bei Euklid stets begrenzt) ist eine Linie, die gleichmäßig zu den Punkten auf ihr liegt.

LEKTION aus der math. Logik

Die axiomatische Methode definiert NIE, was Dinge sind, sondern wie sie sich verhalten.

ISOMORPHIELEMMA

Mathematischer Gehalt:

David Hilbert
1862-1943

Punkte ⟶ Tische

Geraden ⟶ Stühle

Ebenen ⟶ Bierseidel

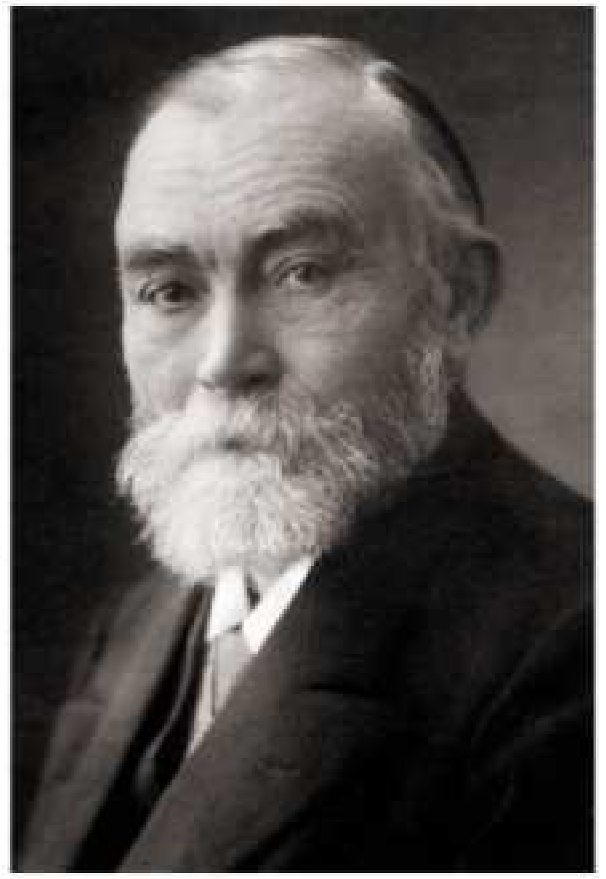
FAZIT: Wir geben auf, zu definieren, was Mengen sind und beschreiben stattdessen, wie sie sich verhalten.

GRUPPEN	MENGEN
Existenz eines neutralen Elts: $\exists e \forall x \; e * x = x$	Existenz der leeren Menge: $\exists \ell \forall x \, (x \notin \ell)$
Existenz von Inversen: $\forall x \exists y \; x * y = \mathbb{1}$	Existenz von Vereinigungen: $\forall x \forall y \exists z \, \forall w \, (w \in z \longleftrightarrow (w \in x \vee w \in y))$

ZIEL

solche Axiome

Ein Vorschlag für solche Axiome:

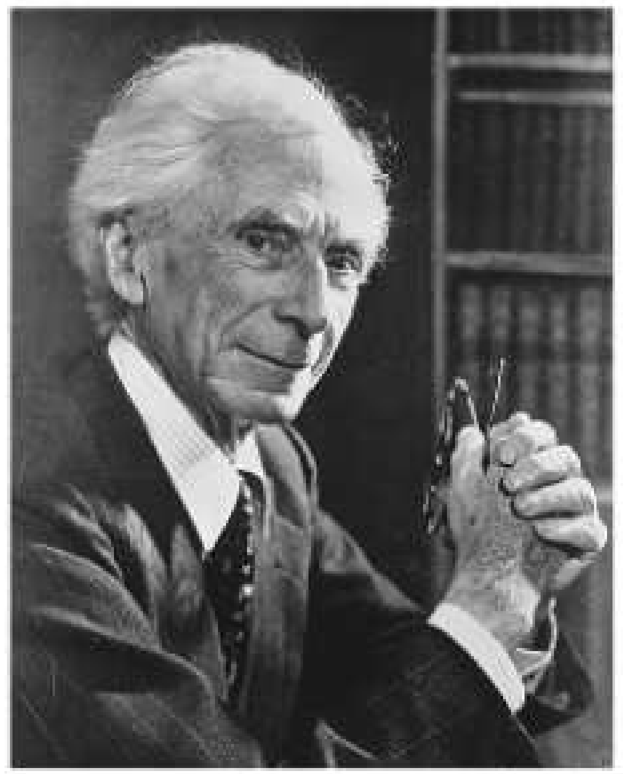


Gottlob Frege
1848-1925

FREGEsches Komprehensionsprinzip

Für alle Eigenschaften P existiert eine Menge aller Mengen mit Eigenschaft P:

$$\{x ; P(x)\}$$



Bertrand Russell, Graf Russell
1872-1970

Russellsche Antinomie:

Eigenschaft P ≡ "ist kein Element von sich selbst"

⇝ RUSSELL Axiom

$$\exists r \forall w (w \in r \longleftrightarrow w \notin w)$$

$$\rho := \exists r \forall w (w \in r \longleftrightarrow w \notin w)$$
$$\exists r \forall w (\in wr \longleftrightarrow \neg \in ww)$$

RUSSELL Axiom

zweistelliges Relationssymbol

Satz Sei $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur mit $S = \{\in\}$

Dann gilt $\mathfrak{A} \not\models \rho$.

Beweis. Ang. $\mathfrak{A} \models \rho \iff$ es gibt $R \in A$ mit $\mathfrak{A}, \beta\frac{R}{r} \models \forall w (w \in r \longleftrightarrow w \notin w)$

$\iff$ es gibt $R \in A$, so daß für alle $a \in A$

$$\mathfrak{A}, \beta\frac{R}{r}\frac{a}{w} \models w \in r \longleftrightarrow w \notin w$$

Betrachte $a = R$: $\mathfrak{A}, \beta\frac{R}{r}\frac{R}{w} \models w \in r \longleftrightarrow w \notin w$

$\iff R \in R \iff R \notin R$.

qed