Mathematische Logik & Mengenlehre

VORLESUNG XI

Ziel Axiomatischer Aufbau der Mengenlehre

Wir haben: (Ext)

(Aus)

~~Zwei~~ Drei "informelle" Axiome: LM, Einer, Paar

Methodisch:
$x \rightsquigarrow \{x\}$ ✓
$x,y \rightsquigarrow \{x,y\}$ ✓
$x,y \rightsquigarrow x \cup y$ ✓
$x \cap y$
⋮
$\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$
Funktionen, Relationen

Ergebnisse: 1. Ext+LM+Einer macht Modelle unendlich

2. Aus schließt "Menge aller Mengen" aus.

ZFC

übliche Axiome der Mengenlehre

"Choice"
Auswahlaxiom

Zermelo ← 1908

Fraenkel

↓

Zermelo-Mengenlehre
Z / Z°

Dann fehlten:
- Ersetzungsaxiom (Skolem, Fraenkel)
- Fundierungsaxiom / Regularitätsaxiom (von Neumann)

ZF
Zermelo-Fraenkel

+Auswahl ZFC

Error
$$\forall x \exists s \forall z (z \in s \leftrightarrow z = x)$$

„Kleines“ Vereinigungsmengenaxiom ($\cup$-Ax):

Zu je zwei Mengen x und y gibt es eine Menge, die alle Elemente von x und y enthält.

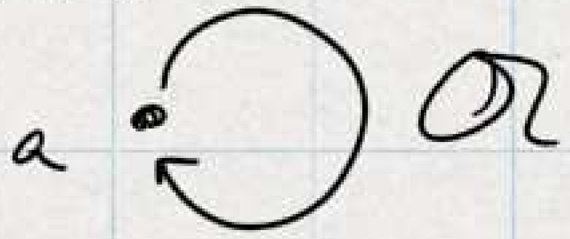
Also:
$$\forall xy\, \exists w\, \boxed{\forall z\, (z \in x \lor z \in y \rightarrow z \in w)}.$$

$\underbrace{}_{\text{Vereinigung von } x \,\&\, y}$

Man beachte: $\longrightarrow$ statt $\longleftrightarrow$. In der Gegenwart von (Aus) folgt die Ex. der Vereinigung aus der Existenz einer Menge, welche alle Elte von x & alle Elte von y enthält durch Aussondern nach

$$\boxed{z \in x \lor z \in y.}$$

PATHOLOGISCHES MODELL



$\mathfrak{A} \models \cup\text{-Ax}$, da der Knoten a alle Elemente von a (und a) enthält.

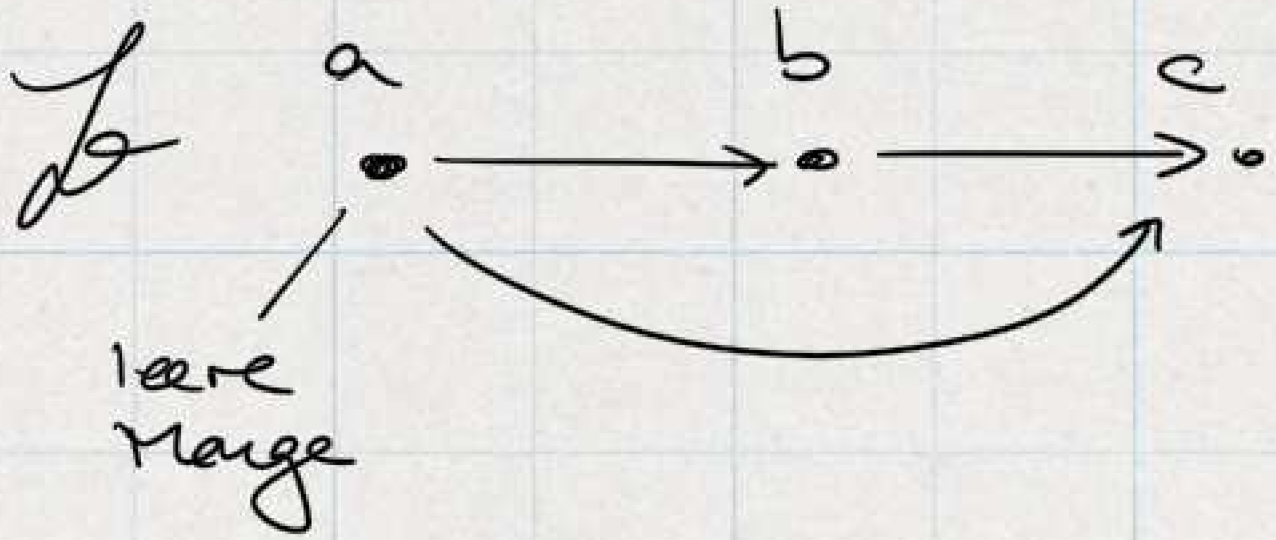
\bigcup

„Großes“ Vereinigungsmengenaxiom ($\bigcup$-Ax):

Zu jeder Menge X gibt es eine Menge, die alle Elemente der Elemente von X enthält.

Also:
$$\forall X\, \exists y\, \forall x z\, (x \in X \land z \in x \rightarrow z \in y).$$

Vereinigungsmenge



$\cup$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	c

Für je zwei Elt. von $\mathfrak{B}$ ex. ein Knoten, der alle Pfeil-vorgänger enthält:

$$\mathfrak{B} \models \cup\text{-Ax}.$$

„Großes“ Vereinigungsmengenaxiom ($\bigcup$-Ax):

Zu jeder Menge X gibt es eine Menge, die alle Elemente der Elemente von X enthält.

Also:

$$\forall X\, \exists y\, \boxed{\forall x\, z\, (x \in X \wedge z \in x \to z \in y).}$$

$A \cup B$

\cup

\bigcup

$\bigcup_{i=0}^{n} A_i$

Indexmenge $n+1$-elementig

$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$

$\bigcup_{i=1}^{2} A_i$

$A_1 = A$
$A_2 = B$

$\bigcup_{x \in X} x$

$= \bigcup \underbrace{\{A_i \,;\, i \in \mathbb{N}\}}_{X}$

Indexmenge abzählbar unendlich

$x \in X \longrightarrow \exists i \quad x = A_i$

$\bigcup_{x \in \mathbb{R}} A_x$

überabzählbare Indexmenge

In der Mengenlehre schreiben wir

$\bigcup X$ für $\bigcup_{x \in X} x$.

Wie verhalten sich $\cup$-Ax und $\bigcup$-Ax zu den bisherigen Axiomen?

$$\boxed{\text{Paar} + \bigcup\text{-Ax} \longrightarrow \cup\text{-Ax}}$$

$$\forall x \forall y \exists w \, \forall z (z \in w \longleftrightarrow z \in x \vee z \in y)$$

Sei $\mathfrak{A} \models$ Paar $+ \bigcup$-Ax. Seien $a, b \in A$ gegeben. Nach Paar existiert $p \in A$ mit $\forall c (c \in p \longleftrightarrow c = a \vee c = b)$

$$\mathfrak{A}\frac{a}{x}\frac{b}{y}\frac{p}{z} \models \forall v (v \in z \longleftrightarrow v = x \vee v = y)$$

Nach $\bigcup$-Ax ex. also ein $u \in A$ mit

$$\forall x \forall z (x \in p \wedge z \in x \longrightarrow z \in u)$$

$$\forall x \forall z ((x = a \vee x = b) \wedge z \in x \longrightarrow z \in u)$$

$$\forall z (z \in a \vee z \in b \longrightarrow z \in u)$$

Das ist $\cup$-Ax.

„Großes“ Vereinigungsmengenaxiom ($\bigcup$-Ax):

Zu jeder Menge X gibt es eine Menge, die alle Elemente der Elemente von X enthält.

$p = X \quad y = u$

Also:

$$\forall X \exists y \forall x \, z \, (x \in X \wedge z \in x \to z \in y).$$

Ohne Paarmengenaxiom ist $\bigcup$-Ax ggf. nicht sehr aussagekräftig:

$\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, E)$ mit $k \, E \, \ell \iff \ell = k+1$.

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow \dots$$

Es gilt: $\mathfrak{A} \models \bigcup$-Ax.

<u>Warum?</u> Sei $a \in \mathbb{N}$ gegeben. Falls $a = 0$, so ist a leer und somit erfüllt a selbst die Bedingung $\bigcup a$ zu sein.

Falls $a = b+1$, dann ist b das einzige Element von a. Dann ist b die Vereinigung über a.

Allerdings gilt $\cup$-Ax nicht: es gibt keine Menge, die z. B. 2 und 7 enthält.

Auf S. 34 kommentiert Ebbinghaus, daß

Paar

nicht aus $\bigcup$-Ax und $\cup$-Ax folgt $\rightsquigarrow$ Üblatt 6.

Erweiterung der mengentheoretischen Sprache.

In Ext + $\cup$-Ax gibt es für je zwei Objekte a, b ein eindeutig bestimmtes Objekt c mit

$$\forall z \left(z \in c \longleftrightarrow z \in a \vee z \in b \right)$$

Also, falls $\mathfrak{A} \models$ Ext + $\cup$-Ax, so kann man in $\mathfrak{A}$ eine Notation für die binäre Vereinigung einführen:

$a, b \in A$, so sei $a \cup b$ dieses eindeutig bestimmte Objekt.

Axiomatische Voraussetzungen	neue Symbole
Ext + LM	$\emptyset$
Ext + Aus	für gegebene Formel φ und Elte $a, a_1, \dots, a_n$ $\{x \in a \boxed{;} \varphi(x, a_1, \dots, a_n)\}$ SEMIKOLON sonst üblich $\mid$ STRICH oder $:$ DOPPELPUNKT [dies sind unendlich viele Operationen] $a \cap b := \{x \in a ; x \in b\}$ $a \setminus b := \{x \in a ; x \notin b\}$
Ext + $\cup$-Ax	$a \cup b$
Ext + $\bigcup$-Ax	$\boxed{\bigcup a = \bigcup_{x \in a} x}$

$\{f : f : A \to B\}$

$\{n \mid n \mid k\}$

Potenzmengenaxiom (Pot):

Zu jeder Menge x gibt es eine Menge, die alle Teilmengen von x enthält.

Also:

$$\forall x \exists y \forall z \, (\underline{z \subseteq x} \to z \in y).$$

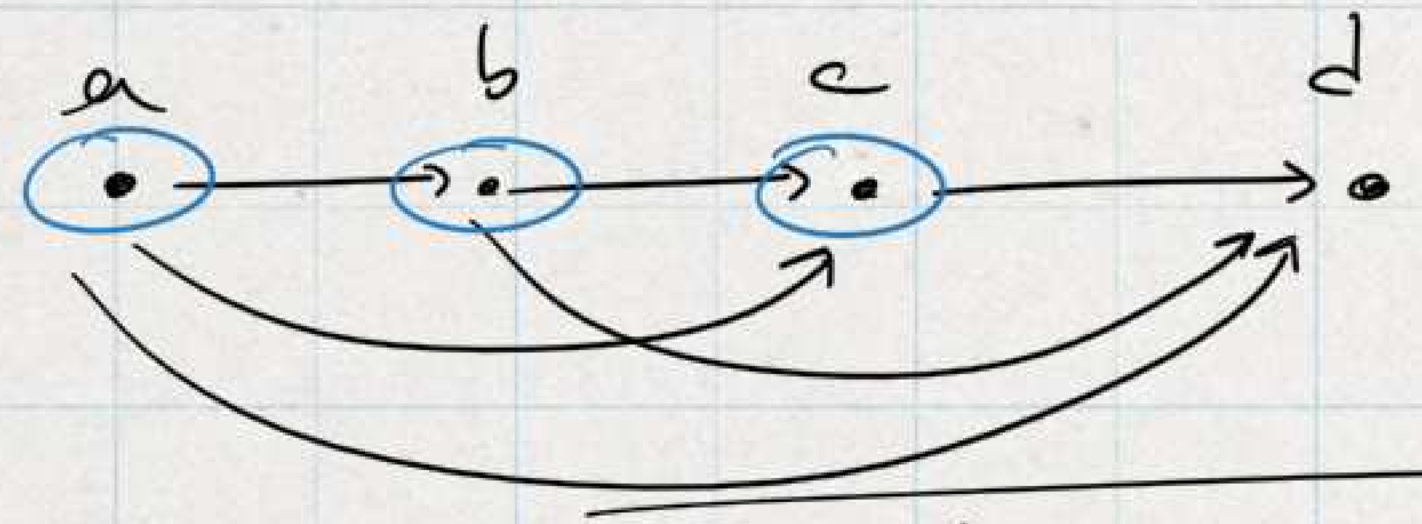
$$\boxed{\forall v (v \in z \longrightarrow v \in x)}$$

ist Teilmenge von   von x

Die Menge aller Teilmengen heißt POTENZMENGE von x.

$$\mathrm{Pot}(x)$$

Wie zuvor Ext+Pot, dann ist die Notation $\mathrm{Pot}(x)$ gerechtfertigt.

$\mathfrak{A}$ 

In $\mathfrak{A}$ ist

$a \subseteq d$	$a \subseteq c$	$a \subseteq b$	$a \subseteq a$
$b \subseteq d$	$b \subseteq c$	$b \subseteq b$	
$c \subseteq d$	$c \subseteq c$		
$d \subseteq d$			

Hier galt: d ist die Menge alle TM von c.

Aber: c hat zwei Elemente

d hat drei Elemente

Wir erwarten eigentlich $2^2 = 4$ TM:

$c = \{a,b\}$ $\quad \emptyset \quad \underset{\substack{\shortparallel \\ b}}{\{a\}} \quad \cancel{\{b\}} \quad \underset{\substack{\shortparallel \\ c}}{\{a,b\}}$

Was ist das Verhältnis von Pot zu den anderen?

Pot + Aus ⟹ Einer.

Sei $\mathfrak{A} \models$ Pot + Aus. Sei $a \in A$ beliebig. Wir suchen nach einer Menge $s \in A$ mit $z \in s \longleftrightarrow z = a$.

Für beliebiges x gilt $x \subseteq x$ [$\forall w (w \in x \longrightarrow w \in x)$]

also falls y eine Potenzmenge von x ist, so ist $x \in y$.

Sei nun p eine Potenzmenge von a, also $a \in p$.

Sondere aus p mit der Formel $z = a$ aus:

Finde b mit

$$z \in b \longleftrightarrow z \in p \wedge z = a$$
$$\longleftrightarrow z = a$$

Somit ist b eine Einermenge von a.

Pot + Aus + $\cup$-Ax ⟹ Paar.

Pot + Aus + ∪-Ax $\Longrightarrow$ Paar.

Nach dem Argument von eben haben wir für $a, b \in A$ jeweils Einermengen a', b' mit

$$z \in a' \longleftrightarrow z = a$$

$$z \in b' \longleftrightarrow z = b$$

Wende ∪-Ax auf a', b' an und erhalte u mit

$$z \in u \longleftrightarrow z \in a' \vee z \in b'$$

$$\longleftrightarrow z = a \vee z = b.$$

NACH PFINGSTEN!

III.4 Unendlichkeit

III.5 Ersetzung

III.6 Fundierung

III.7 Auswahl

FST: Finite Set Theory

Endliche Mengenlehre

Ext + Aus + ∪-Ax + ⋃-Ax + Pot

[$\Longrightarrow$ LM, Einer, Paar]

„Kleines" Vereinigungsmengenaxiom (∪-Ax):

Zu je zwei Mengen x und y gibt es eine Menge, die alle Elemente von x und y enthält.

Also:

$$\forall xy\, \exists w\, \forall z\, (z \in x \vee z \in y \to z \in w).$$

1. Die Mengenlehre **FST** erzwingt nicht, daß alle Mengen endlich sind, aber ist konsistent mit dieser Annahme [Übl 6: Konstruktion eines Modells von FST, in dem jede Ecke nur endlich viele Pfeilvorgänger hat].

2. Für echte Mathematik braucht man also ein Zusatzaxiom, welches die Existenz unendlicher Mengen erzwingt: das Unendlichkeitsaxiom.

3. Aber bereits in FST kann man praktisch die gesamte strukturelle (abstrakte) Mathematik wiedergewinnen.

[Ebbinghaus: Kapitel IV]

Was ist eine Funktion?

z.B. von A nach B

$$\begin{array}{ccc} a & \longmapsto & b \\ \cap & & \cap \\ A & & B \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} a \in A \;\&\; a \longmapsto b \\ b, b' \in B \;\&\; a \longmapsto b' \end{array}\right\} \Longrightarrow b = b'$$

Eine Beschreibung: dies ist eine Menge geordneter Paare:

$$f \subseteq \underbrace{A \times B} \longleftarrow \text{KARTESISCHES PRODUKT}$$

$$= \{(a,b) ;\, a \in A,\ b \in B\}$$

mit $(a,b) \in f \;\&\; (a,b') \in f \Longrightarrow b = b'$.

Was ist denn eigentlich (a,b)? [Tupel]

Wir haben nur Mengen $[\{a,b\} = \{b,a\}]$, keine Tupel!

Kuratowski (in FST): $(a,b) := \{\{a\}, \{a,b\}\}$

$\overline{\text{IV}}$
Satz 1.2

Wir stellen fest:

$\underline{(a,b) = (a',b')} \iff \underline{a=a'}$ und $\underline{b=b'}$.

[$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a'\},\{a',b'\}\}$! Wichtig im Beweis die Fallunterscheidung $a=b$ / $a \neq b$.]

$$(\emptyset,\{\emptyset\}) \neq (\{\emptyset\},\emptyset)$$

Die Menge $\{\{a\},\{a,b\}\}$ heißt auch das KURATOWSKI-PAAR zu a und b.

Seien A, B gegeben und $a \in A$, $b \in B$. Dann ist $\left.\begin{array}{l}\{a\} \subseteq A \subseteq A \cup B \\ \{a,b\} \subseteq A \cup B\end{array}\right\} \Longrightarrow \{a\},\{a,b\} \in Pot(A \cup B)$

$$\Longrightarrow \{\{a\},\{a,b\}\} \in Pot(Pot(A \cup B)).$$