Mathematische Logik & Mengenlehre

VORLESUNG XII

FST   Ext + Aus + ∪-Ax + $\bigcup$-Ax + Pot   [impliziert Paar, LM, Einer]

FINITE SET THEORY

Ziel für heute:
Kapitel IV Ebbinghaus

Begriffe wie
RELATION — Äquivalenzrel.
FUNKTION — Injektion, Surjektion, Bijektion

ÄQUIVALENZ-KLASSE

Bemerkung: Das Existenzaxiom Ex bei Ebbinghaus folgt im Rahmen unserer Semantik aus der Definition "Struktur", die IMMER eine nichtleere Menge ist.

Dies können Sie entweder als Konvention verbuchen oder auf den Beweis des Vollständigkeitssatzes (letzter Teil der VL) warten, wo klarer wird, warum wir dies brauchen.

Eine binäre Relation ist eine Menge von geordneten Paaren.
Ein geordnetes Paar (a,b) wird mengentheoretisch repräsentiert durch

$$\{\{a\},\{a,b\}\}.$$

In der Sprache $\mathcal{L}_\in$:

x ist ein geordnetes Paar gdw

$$\exists a \exists b \exists s \exists p \Big(\forall z (z \in x \longleftrightarrow z \equiv s \vee z \equiv p) \wedge \forall v (v \in s \longleftrightarrow v \equiv a) \wedge \forall w (w \in p \longleftrightarrow w \equiv a \vee w \equiv b) \Big)$$

$\underline{\Phi}(x)$

Seien A und B gegeben. Dann ist
x ein geordnetes Paar mit erster Komp. aus A und zweiter Komponente aus B

gdw $\exists a \exists b \exists s \exists p \Big(\forall z (z \in x \longleftrightarrow z = s \vee z = p)$

$\wedge \quad a \in A \wedge b \in B$

$\wedge \quad \forall v (v \in s \longleftrightarrow v = a)$

$\wedge \quad \forall w (w \in p \longleftrightarrow w = a \vee w = b) \Big)$

$\underline{\Phi}(x, A, B)$

Falls $a \in A$, $b \in B$

$\{a\} \subseteq A \subseteq A \cup B$

$\{a,b\} \subseteq A \cup B$

$\{a\}, \{a,b\} \in \mathrm{Pot}(A \cup B)$

$\{\{a\}, \{a,b\}\} \subseteq \mathrm{Pot}(A \cup B)$

$\{\{a\}, \{a,b\}\} \in \mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(A \cup B))$

$\boxed{Z := \mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(A \cup B))}$

Ich kann nicht schreiben

$\{x \,;\, \underline{\Phi}(x, A, B)\}$

KOMPREHENSION

Wir brauchen Z:

$\{x \in Z \,;\, \underline{\Phi}(x, A, B)\}$ (Aus)

Da jedes geordnete Paar mit erster Komponente aus A & zweiter aus B in $\mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(A \cup B))$ liegt,

[Wir dürfen dies schreiben, weil wir FST voraussetzen !!!]

ist $\{ x \in \mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(A \cup B)) \,;\, \Phi(x, A, B) \}$

die Menge aller geord. Paare mit erster K. aus A und zw. aus B.

Wir bezeichnen sie mit $A \times B$ (kartesisches Produkt von A & B).

Frage: Wie komme ich nun zu Tripeln, Quadrupeln, Quintupeln usw. ?

Z.B. Tripel mit Komponenten in A, B, C: $(A \times B) \times C$

oder ?? $A \times (B \times C)$

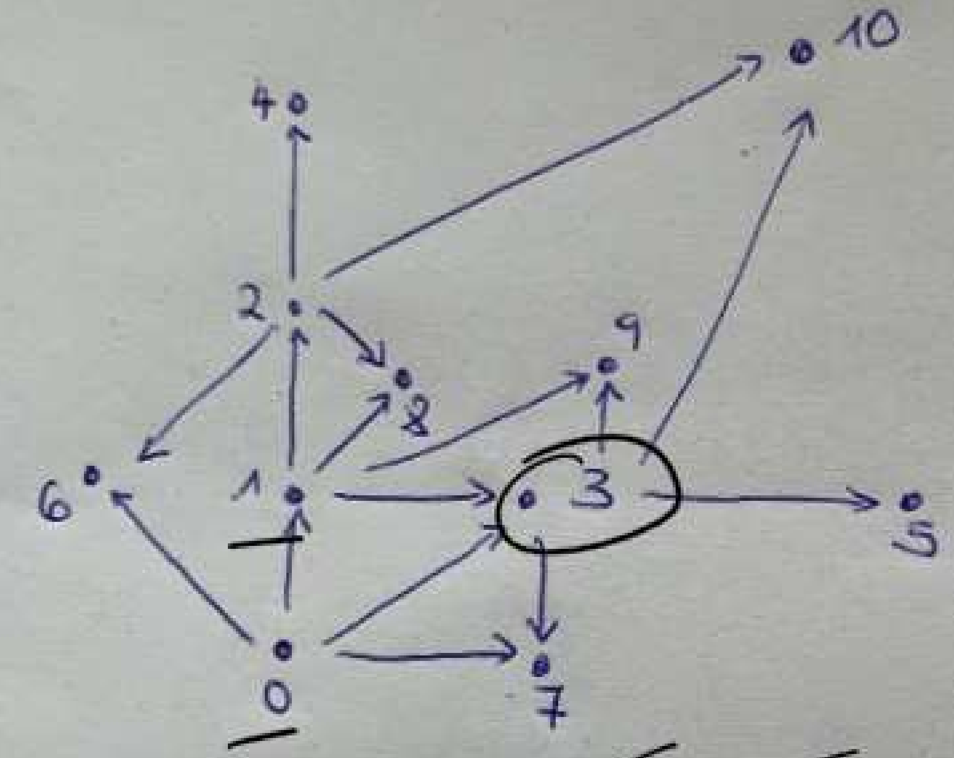
Wir müssen uns konventionell auf eine dieser Möglichkeiten einigen!

$((a,b),c) \longrightarrow (a,(b,c))$

I. a. $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$.

[KANONISCH]

$\mathfrak{A}_3$ aus ÜA (24)



0	—
1	0
2	1
$\boxed{3}$	$\boxed{0,1}$
4	2
5	3
6	0,2
7	0,3
8	1,2
$\boxed{9}$	$\boxed{1,3}$
10	2,3

D.h. $\{0\} \mapsto 1.$
$\{1\} \mapsto 2$
$\{0,1\} \mapsto 3$

$$\boxed{(0,0) =} \{\{0\},\{0,0\}\} = \{\{0\}\} = \{1\} = \boxed{2}$$
$$\boxed{(0,1) =} \{\{0\},\{0,1\}\} = \{1,3\} = \boxed{9}$$
$$\boxed{(1,0) =} \{\{1\},\{0,1\}\} = \{2,3\} = \boxed{10}$$
$$\boxed{(1,1) =} \{\{1\},\{1,1\}\} = \{\{1\}\} = \{2\} = \boxed{4}$$

Aber auch nicht in $\mathfrak{A}_\infty$, da eine solche Menge vierelementig wäre.
Nach (26) gelten (Pot) und (u-Ax) in $\mathfrak{A}_\infty$ nicht!

In ÜA 24–26 haben wir gesehen, daß $\mathfrak{A}_\infty = (\mathbb{N}, E_\infty)$ mit $E_\infty = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ ein Modell von (Paar) ist. Die endlichen Zwischenstufen sind es nicht!

Sehen wir uns $3 \in A_3$ an:
Versuchen wir "3×3": das kartesische Produkt von $3 = \{0,1\}$ mit sich selbst zu bilden.
Wir sehen, daß jedes geordnete Paar mit erster & zweiter Komponente aus 3 in A_3 repräsentiert ist.
Was wäre dann 3×3. Das wäre eine Menge x mit

$$\forall z \,(z \in x \longleftrightarrow z = 2 \vee z = 9 \vee z = 10 \vee z = 4)$$

Offensichtlich existiert so etwas in $\mathfrak{A}_3$ nicht!

Also in FST haben wir für je zwei Mengen A und B die Menge $A \times B$.

<u>Definiere</u> R heißt binäre Relation zwischen A und B falls $R \subseteq A \times B$.

Dies erlaubt uns die gesamte Terminologie von Relationen einzuführen:

Falls R eine Relation zw. A und B ist, so ist

$$\mathrm{Def}(R) := \{ a \in A ;\ \exists b (b \in B \wedge (a,b) \in R) \}$$

DEFINITIONSBEREICH

$$\mathrm{Bild}(R) := \{ b \in B ;\ \exists a (a \in A \wedge (a,b) \in R) \}$$

BILDBEREICH

$$\mathrm{Feld}(R) := \mathrm{Def}(R) \cup \mathrm{Bild}(R)$$

Falls $A = B$, so sagen wir auch R eine binäre Relation auf A ist.

Sei nun R eine binäre Relation auf A.

Wir definieren die üblichen Begriffe:

R heißt reflexiv gdw $\forall a\,(a \in A \longrightarrow (a,a) \in R)$

R heißt symmetrisch gdw $\forall a \forall a'\,(a \in A \wedge a' \in A \wedge (a,a') \in R \longrightarrow (a',a) \in R)$

R heißt transitiv gdw $\forall a \forall b \forall c\,(a \in A \wedge b \in A \wedge c \in A \wedge (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \longrightarrow (a,c) \in R)$

R heißt antisymmetrisch gdw $\forall a \forall b\,(a \in A \wedge b \in A \wedge (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \longrightarrow a \equiv b)$

R heißt irreflexiv $\forall a\,(a \in A \longrightarrow (a,a) \notin R)$

R heißt konnex $\forall a \forall b\,(a \in A \wedge b \in A \longrightarrow (a,b) \in R \vee a \equiv b \vee (b,a) \in R)$

R ist eine Äquivalenzrelation gdw refl. + symm. + transitiv

R ist eine partielle Ordnungsrelation gdw refl. + transitiv + antisymm.

totale Ordnungsrelation gdw part. Ordnungsrel. + konnex

[Ordnung i.S.v. $\leq$]

[Ordnung i.S.v. $<$] irrefl. + transitiv + konnex

In der herkömmlichen Mathematik ist eine partielle Ordnung ein Paar $(P, \leq)$, so daß $\leq$ eine reflexive, antisymm. und transitive partielle Ordnungsrelation auf P ist.

X ist eine partielle Ordnung

gdw $\exists P \exists R [R \subseteq P \times P \wedge \forall x (x \in P \longrightarrow (x,x) \in R)$

$\wedge \forall x \forall y (x \in P \wedge y \in P \wedge (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \longrightarrow x = y)$

$\wedge \forall x \forall y \forall z (x \in P \wedge y \in P \wedge z \in P \wedge (x,y) \in R$

$\wedge (y,z) \in R \longrightarrow (x,z) \in R]$.

Weitere Konstruktionen aus der herkömmlichen Mathematik:

Falls R eine Äquivalenzrelation auf A ist, so können wir Äquivalenzklassen bilden und auch die Menge aller Äquivalenzklassen: $A/_R$ [die Restklassenstruktur der Quotient]

Sei A gegeben und R Äquivalenzrelation auf A.

$$[a]_R = \underbrace{\{x \in A;\ \underbrace{(a,x) \in R}_{\text{Ausdruck aus } \mathcal{L}_\in}\ \}}_{\text{Instanz von Aus}} \qquad A/_R := \{x \in \underline{\mathrm{Pot}(A)};\ \exists a\,(a \in A \wedge x = [a]_R)\}$$

Für jedes $a \in A$ gilt $[a]_R \subseteq A$, also

$$[a]_R \in \mathrm{Pot}(A)$$

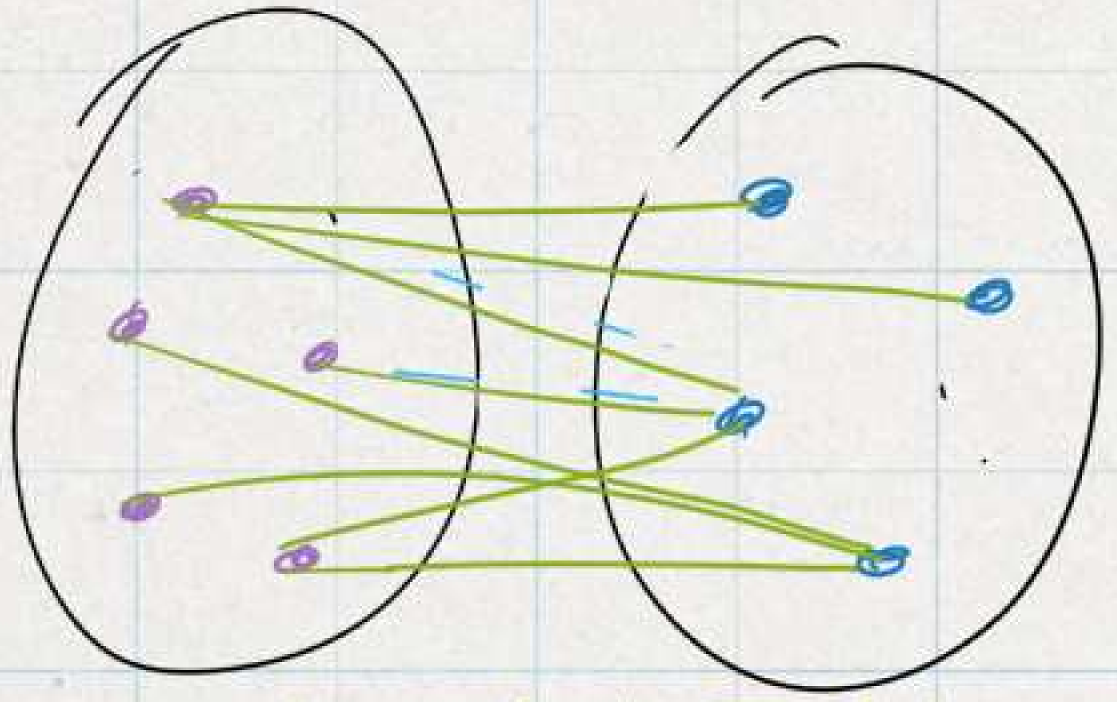
Funktionen. Heutzutage definieren wir Funktionen üblicherweise als spezielle Relationen.

Sei R eine Relation zwischen A und B.
Dann heißt R <u>funktional</u> falls

$$\forall x \forall y \forall y' \big((x,y)\in R \wedge (x,y')\in R \longrightarrow y = y' \big)$$

$$\wedge$$

$$\big[\, \forall x \big(x\in A \longrightarrow \exists y\ (x,y)\in R \big) \big]$$



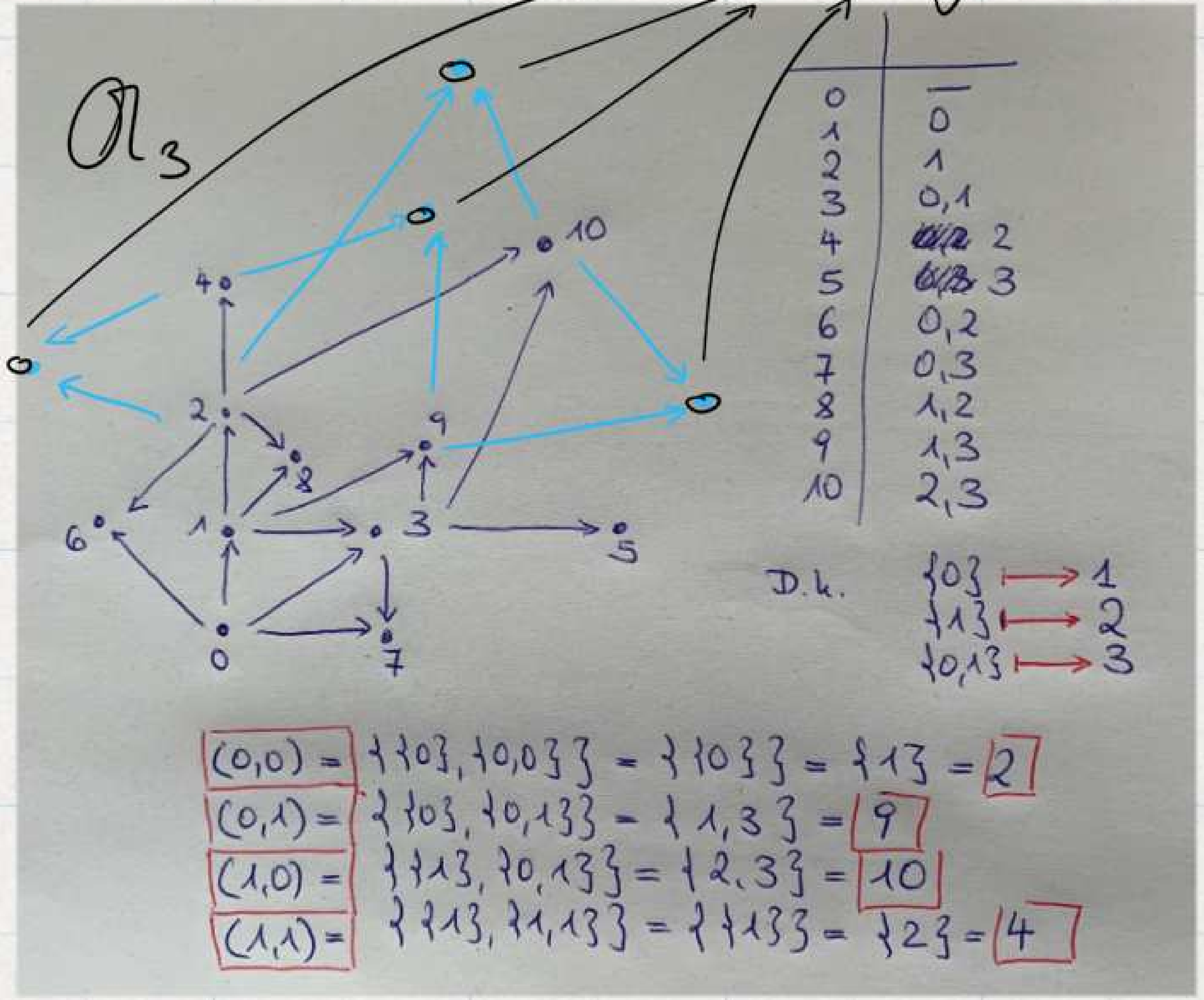
Die Relation ist Funktion, falls jeder violette Punkt genau ein blaues Bild hat.

Eine funktionale Relation zw. A und B heißt <u>Funktion von A nach B</u>

[falls der Teil [——] fehlt, so sagen wir <u>partielle Funktion von A nach B</u>.]

Funktionen von 3 nach 3

$\mathfrak{A}_3$



Beispiel

Wir wollen analysieren:

Funktionen von 3 nach 3

$\{0,1\}$ nach $\{0,1\}$

Mengentheoretisch:

$$f = \{\underline{(0,0)}, (1,0)\} = \{2, 10\}$$

$$g = \{(0,1), (1,1)\} = \{9, 4\}$$

$$h = \{(0,0), (1,1)\} = \{2, 4\}$$

$$k = \{(0,1), (1,0)\} = \{9, 10\}$$

Alle diese Mengen sind in $\mathfrak{A}_4$ repräsentiert.

Maximal

f: $0 \longmapsto 0$, $1 \longmapsto 0$ — Konst. 0

g: $0 \longmapsto 1$, $1 \longmapsto 1$ — Konst. 1

h: $0 \longmapsto 0$, $1 \longmapsto 1$ — Identität

k: $0 \longmapsto 1$, $1 \longmapsto 0$

Also hätte die Menge aller Funktionen von 3 nach 3 vier Elemente und somit existiert sie nicht in $\mathfrak{A}_\infty$.

In FST können wir aber

$$\mathrm{Rel}(A,B) := \mathrm{Pot}(A \times B)$$

$$\mathrm{Funk}(A,B) := \{ f \in \mathrm{Rel}(A,B) \; ; \; \underbrace{\text{"}f \text{ ist funktional"}}_{\mathcal{L}_\in\text{-Formel von S. 10}} \}$$

<u>Folgerung</u> In FST können wir für je zwei Mengen A,B die Menge aller Funktionen von A nach B, $\mathrm{Funk}(A,B)$ finden.

f ist <u>injektiv</u> $\quad \forall x \forall x' \forall y \; \big((x,y) \in f \wedge (x',y) \in f \longrightarrow x \equiv x'\big)$

f ist <u>surjektiv auf B</u> $\quad \forall y \; \big(y \in B \longrightarrow \exists x \; (x,y) \in f\big)$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \cancel{\mathbb{R}}\ \mathbb{C}$

$x \longmapsto x$

Mit diesen Hilfsmitteln können wir in FST Begriffe wie die Isomorphismen aus dem Logikteil der VL formal definieren.