VORLESUNG XIII

FST "endliche Mengenlehre"

$\longrightarrow$ Rekonstruktion der "abstrakte Mathematik"

Relationen, Funktionen, Isomorphismen, Strukturen, ...

Sprache der Mengenlehre

$\in$

ARME SPRACHE

$\emptyset$ $\{x\}$ $\{x,y\}$ $x \cup y$ $x \cap y$ $x \setminus y$

(x,y) $X \times Y$ $\mathrm{Funk}(X,Y)$

usw. usw.

Def 2.2 (aus Ebbinghaus)

$$\boxed{f : X \longrightarrow Y} \quad :\Longleftrightarrow \quad f \subseteq X \times Y \text{ und } f \text{ ist Funktion und } \mathrm{Def}(f) = X$$

Def 2.3

$${}^{X}Y := \{ f \subseteq X \times Y \,;\, f : X \longrightarrow Y \}$$

$\mathrm{Funk}(X,Y)$

Y^X

2.4 Definition.

$$f(x) := \begin{cases} \text{das eindeutig bestimmte } y \text{ mit } (x,y) \in f, \\ \quad \text{falls Fkn } f \wedge x \in \mathrm{Def}(f); \\ \emptyset, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Falls $f : X \longrightarrow Y$

2.7 Definition.

$$g \circ f := \begin{cases} \{(u, g(f(u))) \mid u \in \mathrm{Def}(f)\}, \\ \quad \text{falls } f \text{ und } g \text{ Funktionen sind mit } \mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathrm{Def}(g); \\ \emptyset, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Können die üblichen Eigenschaften von Funktionsverknüpfung nachweisen.

f, g, h Fkt.

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ usw.

[Dies sind alles FST-Theoreme.]

2.8 Definition.

$$f \restriction Y := \begin{cases} f \cap (Y \times \mathrm{Bild}(f)), \text{ falls Fkn } f \wedge Y \subseteq \mathrm{Def}(f), \\ \emptyset, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Z

$f|_Y$

$f : X \longrightarrow Z$

$Y \subseteq X$

Können in FST die üblichen Eigenschaften von Einschränkungen beweisen:

$\mathrm{Def}(f \restriction Y) = Y$.

Warum heißt FST "endliche Mengenlehre"?

1. FST impliziert **NICHT**, daß alle Mengen endlich sind.

Aber:

2. FST ist konsistent mit der Annahme, daß alle Mengen endlich sind.

Das soll heißen: es gibt eine Struktur $\mathfrak{A}$ mit

$\varphi \in \mathcal{L}_\in$.

$$\mathfrak{A} \models \mathrm{FST}$$

aber $\mathfrak{A} \not\models$ "es gibt eine unendliche Menge"

?? Wie wollen wir dies in $\mathcal{L}_\in$ ausdrücken?

Übungsblatt #6, Aufgabe (30).

In dem konstruierten Modell hat jede Ecke nur endlich viele Pfeilvorgänger ("lokal endlicher Graph"). Das heißt informell, daß keine Menge unendlich ist.

Wie drücke ich Unendlichkeit in $\mathcal{L}_\in$ aus?

ANFÄNGERVORLESUNGEN:

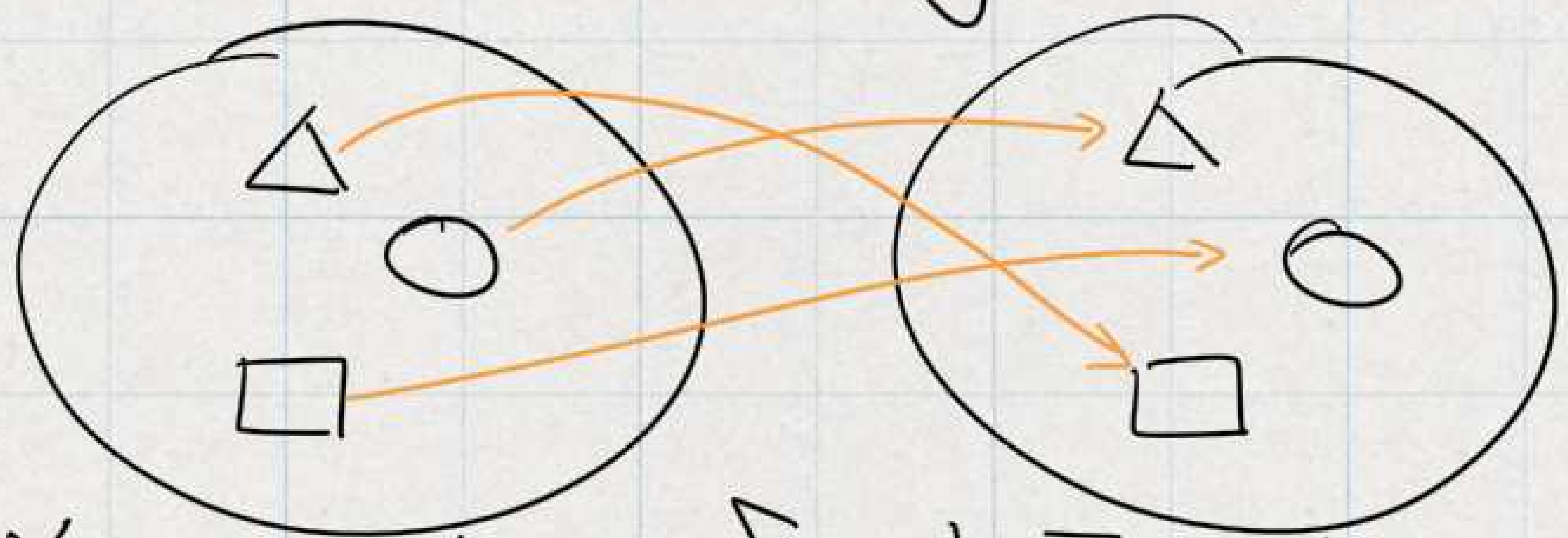
X ist endlich $\iff$ jede Injektion $f: X \longrightarrow X$ ist eine Surjektion

$\iff$ falls $Y \subsetneq X$, so ist Y nicht in Bijektion mit X.

[$\mathbb{N}$ sind unendlich & haben die Fkt. $n \overset{\pi}{\longmapsto} 2n$. Dies ist eine Injektion, aber $\underline{\mathrm{Bild}(\pi)} \neq \mathbb{N}$.]

$2\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}$

π ist eine Bijektion zw. $\mathbb{N}$ & $2\mathbb{N}$.



Das Dedekindsche Unendlichkeitsaxiom sagt kaum etwas über die unendliche Menge aus und ist schwer zu benutzen.

<u>Idee</u>: $\exists X \exists f [f : X \longrightarrow X \wedge f \text{ ist Injektion} \wedge f \text{ ist nicht Surjektion}]$

<u>DEDEKINDsches</u> „Unendlichkeitsaxiom".

[Das Modell ORFST aus Aufg. (30), erfüllt diese Formel nicht.]

Zweiter Ansatz

Wir hatten über Unendlichkeit im Beweis von

"Kein Modell von LM + Emer ist endlich"

gesprochen.

$\mathfrak{A}$ $\quad x_0 \quad \underset{x_1}{\overset{\shortparallel}{\{x_0\}}} \quad \underset{x_2}{\overset{\shortparallel}{\{\{x_0\}\}}} \quad \underset{x_3}{\overset{\shortparallel}{\{\{\{x_0\}\}\}}} \quad \ldots$

Per Induktion bewiesen, daß $x: \mathbb{N} \longrightarrow A$ eine Injektion ist.

für $k \neq l$, $x_k \neq x_l$.

Idee wäre: X ist unendlich falls

$x_0 \in X$ und falls $x_i \in X$, so $x_{i+1} \in X$

Definition (von Neumann): $\quad x_{i+1} := \underline{x_i \cup \{x_i\}}$

SINNVOLL, da wir in FST arbeiten

$x_0 := \emptyset$

Unendlichkeitsaxiom (Inf):

Es gibt eine Menge, die $\emptyset$ enthält und mit jedem z auch $z \cup \{z\}$.

Also:

$$\boxed{\exists x\, (\emptyset \in x \land \forall z\, (z \in x \to z \cup \{z\} \in x))}$$

keine $\mathcal{L}_\in$-Formel, da $\emptyset$, $\cup$, $\{\ \}$ nicht in $\mathcal{L}_\in$ sind.

Diese Version des Unendlichkeitsaxioms kann nur auf der Grundlage von FST formuliert werden.

Eine Menge, wie sie in **Inf** gefordert wird, nennt man induktiv:

4.1 Definition. x ist *induktiv* $:\leftrightarrow\ \emptyset \in x \land \forall z\, (z \in x \to z \cup \{z\} \in x)$.

wenn sie $\emptyset$ enthält und unter der Operation $z \longmapsto z \cup \{z\}$ abgeschlossen ist.

$IND(x)$ als Abkürzung für "x ist induktiv".

ACHTUNG

Die von Inf geforderte induktive Menge ist nicht eindeutig.

Es kann viele verschiedene induktive Mengen geben.

Sei I induktiv. Wende Aussonderung auf I und die Formel $\forall J\, (IND(J) \longrightarrow x \in J)$ an.

$$I^* := \{x \in I \,;\, \forall J\, (\mathrm{IND}(J) \longrightarrow x \in J)\}$$

Nach Ind ex. I, nach Aus ist $I^* \subseteq I$.

Seien I, J induktiv. Dann sind $I^* = J^*$.

D.h., daß I^* unabhängig von der Wahl von I war.

<u>Beh.</u> <u>I^* induktiv</u>

<u>Beweis</u> $\emptyset \in I^*$, weil $\emptyset \in I$ und $\forall J\, (\mathrm{IND}(J) \longrightarrow \emptyset \in J)$

z.z. I^* ist abgeschlossen unter $z \longmapsto z \cup \{z\}$:

Sei $z \in I^*$, also $\forall J\, (\mathrm{IND}(J) \longrightarrow z \in J)$

$\longrightarrow z \cup \{z\} \in J$ [da J induktiv]

$\Longrightarrow z \cup \{z\} \in I^*$. qed.

Dieses I^* ist eine induktive Menge, die in jeder induktiven Menge als TM enthalten ist:

I^* ist die kleinste induktive Menge

Wir schreiben $\mathbb{N}$ für I^*. [Ebbinghaus nennt es ω.]

Das suggeriert, daß es sich um die natürlichen Zahlen handelt.

Was sind Elemente von $\mathbb{N}$?

$z \longmapsto z \cup \{z\}$

0 — $\emptyset \in \mathbb{N} \xrightarrow{z \cup \{z\}} \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$ — $\{0\}$ — 1

$\{\emptyset\} \xrightarrow{z \cup \{z\}} \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ — $\{0, \{0\}\}$ — $\{0, 1\}$ — 2

$\downarrow z \cup \{z\}$

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}$ — $\{0, 1, \{0, 1\}\}$ — $\{0, 1, 2\}$ — 3

$\mathbb{N}$ enthalten die Elemente

$0, 1 = \{0\}, 2 = \{0,1\}, 3 = \{0,1,2\},$

$4 = \{0,1,2,3\}, \ldots$ usw

mit den adäquaten Definitionen der Terme $0, 1, 2, 3, \ldots$

Nachfolgeroperation

Null

Peano-Axiome

1.3 Definition. Eine PEANO-*Struktur* ist eine Struktur (a, σ, ν) mit Trägermenge a, $\sigma : a \to a$ und $\nu \in a$, die den folgenden Bedingungen genügt:

(P1) $\sigma : a \overset{inj}{\to} a$; $\qquad \sigma(x) = \sigma(y) \longrightarrow x = y$

(P2) $\nu \notin \mathrm{Bild}(\sigma)$; $\qquad \sigma(x) \neq \nu$ f. a. x

(P3) $\forall b\,(b \subseteq a \wedge \nu \in b \wedge \forall x(x \in b \to \sigma(x) \in b) \to b = a)$.

INDUKTIONSAXIOM

ZIEL Definiere auf $\mathbb{N}$ eine Struktur $(\mathbb{N}, S, 0)$, so daß FST+Inf beweist, daß $(\mathbb{N}, S, 0)$ eine Peano-Struktur ist.

Induktionsprinzip gilt für $\mathbb{N}$

für $A \subseteq \mathbb{N}$, falls $\emptyset \in A$ und für alle x $(x \in A \longrightarrow x \cup \{x\} \in A)$

dann $A = \mathbb{N}$

Beweis (fast trivial). Die Voraussetzung impliziert, daß A induktiv ist. Nach Def-on $\mathbb{N}$ gilt also $\mathbb{N} \subseteq A$. $\rightarrow$ $\mathbb{N} = A$. q.e.d.

1.3 Definition. Eine Peano-*Struktur* ist eine Struktur (a, σ, ν) mit Trägermenge a, $\sigma : a \to a$ und $\nu \in a$, die den folgenden Bedingungen genügt:

(P1) $\sigma : a \overset{inj}{\to} a$;

(P2) $\nu \notin \mathrm{Bild}(\sigma)$;

(P3) $\forall b \left(b \subseteq a \wedge \nu \in b \wedge \forall x(x \in b \to \sigma(x) \in b) \to b = a\right)$.

Falls $x \in \mathbb{N}$, setze $S(x) := x \cup \{x\}$

$0 := \emptyset$.

Beh. $(\mathbb{N}, S, 0)$ ist Peano-Struktur.

Lemma (Eigenschaften von $\mathbb{N}$). Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

$0 := \emptyset$
$1 := \{0\}$
$2 := \{0, 1\}$
$3 := \{0, 1, 2\}$

1. falls $x \in n$, so $x \in \mathbb{N}$.
2. falls $x \in n$, so $x \subseteq n$.
3. $n \subseteq \mathbb{N}$
4. $n \notin n$
5. $\mathrm{Bild}(S) \cup \{0\} = \mathbb{N}$.

Beweis Wir beweisen die Eigenschaften mit dem Induktionsprinzip, also:

$\Phi(n)$ Eigenschaft von n

Zeige, daß $A_\Phi := \{n \in \mathbb{N} ; \Phi(n)\}$ induktiv ist.

$$\Longrightarrow A_\Phi = \mathbb{N} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \Phi(n)$$

1. $\Phi(n) := \forall x (x \in n \longrightarrow x \in \mathbb{N})$

$\emptyset \in A_\Phi$ trivialerweise wahr

$n \in A_\Phi$. Zeige $n \cup \{n\} \in A_\Phi$

falls $x \in n \cup \{n\} \longrightarrow x \in n \longrightarrow x \in \mathbb{N}$

oder $x = n \longrightarrow x \in \mathbb{N}$

② $x \in n \longrightarrow x \subseteq n$

$\Phi(n) := \forall x\,(x \in n \longrightarrow x \subseteq n)$

IA $n = \emptyset$ trivialerweise wahr

Ang. $\forall x\,(x \in n \longrightarrow x \subseteq n)$

Betrachte $n \cup \{n\}$. Sei $x \in n \cup \{n\}$.

Entweder $x \in n \xrightarrow{IV} x \subseteq n \subseteq n \cup \{n\}$

oder $x = n$ $\quad x \subseteq n \cup \{n\}$.

③ $n \subseteq \mathbb{N}$ [folgt direkt aus ①]

④ $n \notin n$ $\quad$ IA $\emptyset \notin \emptyset$ ✓

$\Phi(n) := n \notin n$ $\quad$ Ang. $n \notin n$. Zu zeigen $n \cup \{n\} \notin n \cup \{n\}$.

Ang. $n \cup \{n\} \in n \cup \{n\}$.

$\Longrightarrow n \cup \{n\} = n \Longrightarrow n \in n$ ↯ IV

oder $n \cup \{n\} \in n \overset{②}{\Longrightarrow} n \cup \{n\} \subseteq n$

$\Longrightarrow n \in n$ ↯ IV

(5) $\underline{\mathrm{Bild}(S) \cup \{\emptyset\}} = \mathbb{N}$.

Klar, daß $\{\emptyset\} \cup \mathrm{Bild}(S)$ eine induktive TM von $\mathbb{N}$ ist.

q.e.d. (Lemma).

1.3 Definition. Eine Peano-*Struktur* ist eine Struktur (a, σ, ν) mit Trägermenge a, $\sigma : a \to a$ und $\nu \in a$, die den folgenden Bedingungen genügt:

(P1) $\sigma : a \overset{inj}{\to} a$;

(P2) $\nu \notin \mathrm{Bild}(\sigma)$;

(P3) $\forall b \left(b \subseteq a \wedge \nu \in b \wedge \forall x(x \in b \to \sigma(x) \in b) \to b = a\right)$.

<u>Theorem</u>

$(\mathbb{N}, S, \emptyset)$ ist eine Peano-Struktur

<u>Beweis</u> (P3) ist einfach das Induktionsprinzip.

(P2) Ang. $\emptyset = S(x)$ für ein x. $S(x) = x \cup \{x\} \neq \emptyset$

$\lightning$.

(P1) Zu zeigen: S ist injektiv. Seien $n, m \in \mathbb{N}$. $n \cup \{n\} = S(n) = S(m) = m \cup \{m\}$.

Es gilt $n \in m$ oder $n = m$. symmetrisch: $m \in n$ oder $n = m$

(2) $\Longrightarrow n \subseteq m$ oder $n \subseteq m$ $\quad \Longrightarrow m \subseteq n$

$\Longrightarrow n \subseteq m$. $\quad$ $n = m$. $\quad$ q.e.d.