Mathematische Logik & Mengenlehre

VORLESUNG XV

$\mathbb{N}$: die kleinste induktive Menge

$\longrightarrow$ per def. INDUKTIONSPRINZIP

$\longrightarrow$ Rekursionsprinzip

$\longrightarrow$ $+, \cdot$ auf $\mathbb{N}$

$(\mathbb{N}, +, \cdot, 0)$

Heute : mehr zu den nat. Zahlen

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

mehr über Induktion

Cantor : Was heißt es, daß zwei Mengen die gleiche Mächtigkeit haben?

3.1 Definition.
x ist gleichmächtig mit y (kurz: $x \sim y$) $:\leftrightarrow$ $\exists f\, f : x \overset{bij}{\to} y$.
Statt „$f : x \overset{bij}{\to} y$“ schreiben wir im folgenden kürzer „$f : x \sim y$“.

$x \sim y$

3.4 Definition. (i) *x ist endlich* $:\leftrightarrow$ ~~$\exists i\, x \sim i$~~. $\exists i (i \in \mathbb{N} \wedge x \sim i)$
(ii) *x ist unendlich* $:\leftrightarrow$ *x ist nicht endlich.*

In $\mathbb{N}$ finden wir eine echte TM

$$2\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N},$$

so daß $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : n \longmapsto 2n$ eine Bijektion von $\mathbb{N}$ nach $2\mathbb{N}$ ist.

Offizielle Definition

ENDL. $\exists i \, (i \in \mathbb{N} \wedge i \sim x)$

UNENDL. nicht endlich

DEDEKIND-Def.

nicht unendlich

$\exists A \, (A \subsetneq x \wedge A \sim x)$

Theorem Falls $n, m \in \mathbb{N}$ und $n \sim m$, so $n = m$.

[**Bem.** Dies impliziert, daß die Mächtigkeit endlich eindeutig durch ein natürliche Zahl bestimmt ist.

x endlich

$|x| := n$ gdw n die eind. best. Zahl in $\mathbb{N}$ ist, so daß $x \sim n$.]

Beweis Per Induktion. Halte n fest und zeige $\forall m \; \boxed{n \sim m \Longrightarrow n = m}$.

$$\boxed{n \sim m \Longrightarrow n = m}$$

IA: $m = 0$. $\quad n \sim 0$, d.h. es ex. Bij. $f: n \longrightarrow \emptyset$

Daraus folgt $n = \emptyset \Longrightarrow n = 0 = m$.

IS: Ang. $n \sim m \Longrightarrow n = m$.

Falls $n \sim S(m)$. Da $\emptyset \not\ni x \neq \emptyset$, erhalten wir $n \neq \emptyset$.

Also gilt (Peano-Lemma):

$n = S(k)$.

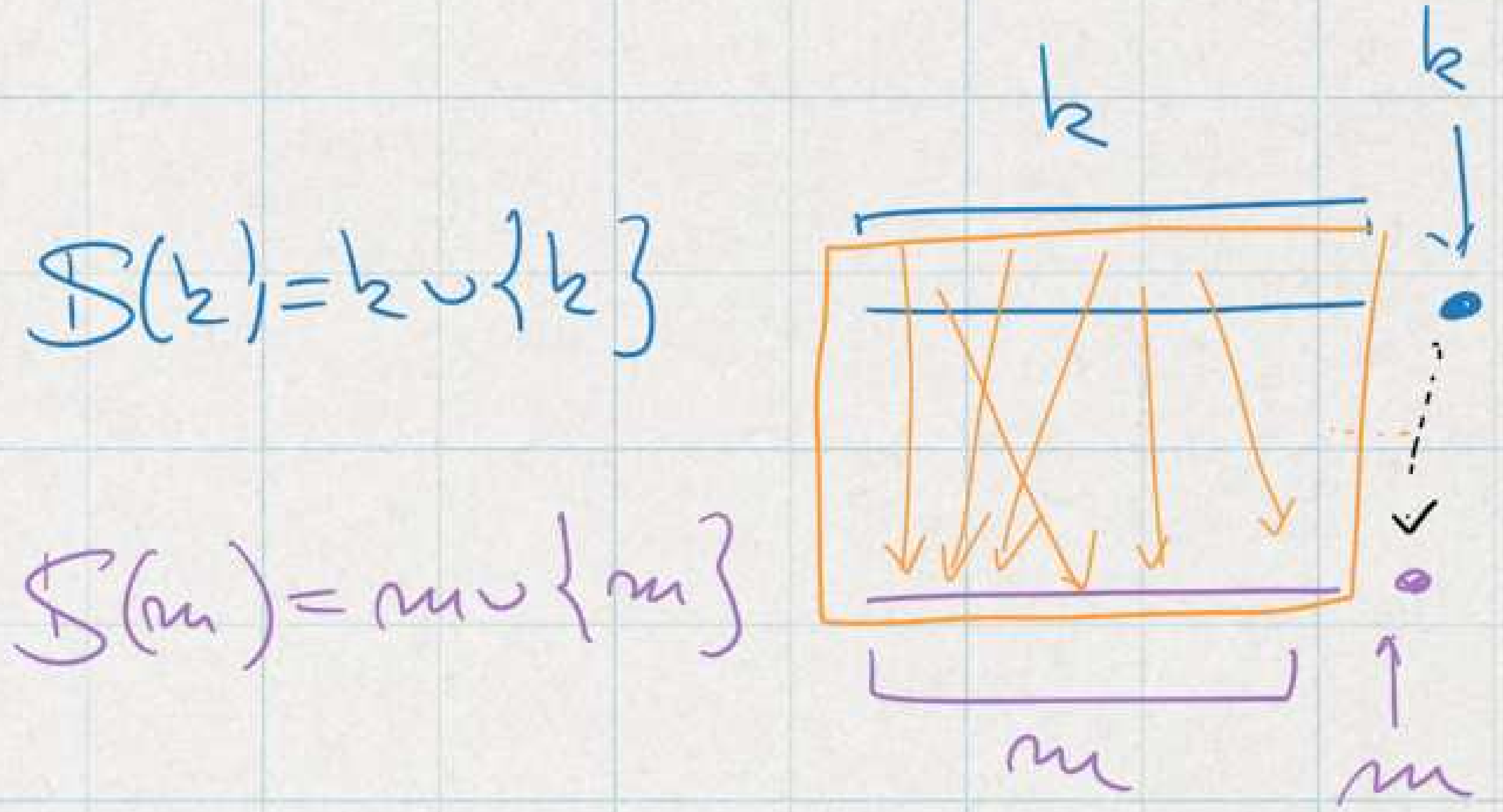
Sei $f: S(k) \longrightarrow S(m)$ Bijektion.

Fall 1 $\quad f(k) = m$.

$f \upharpoonright k : k \longrightarrow m$ ist Bijektion.

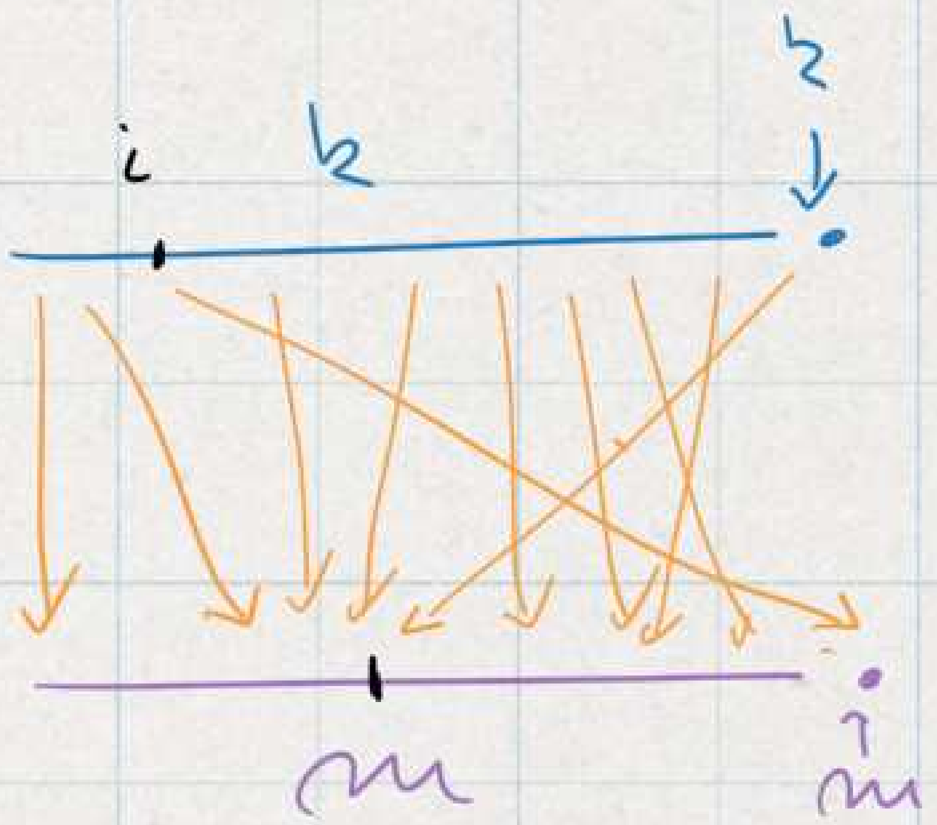
$k \sim m \Longrightarrow k = m$

$\Longrightarrow \underset{n}{\underset{\shortparallel}{S(k)}} = S(m)$. $\quad$ ✓ Fall 1



$S(k) = n$

$S(m)$



Fall 2 $f(k) = m$.

D.h. es ex. i mit $f(i) = m$
$i \in k$

und $j \in m$ mit $f(k) = j$.

Definiere $f^* : k \longrightarrow m$:
$$\begin{cases} l \longmapsto \underset{\in m}{f(l)} & \text{falls } l \neq i \\ i \longmapsto f(k) = j \in m. \end{cases}$$

Dann ist $f^* : k \longrightarrow m$ Bij., also $k \sim m \overset{IV}{\Longrightarrow} k = m$

$\Longrightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{n}}{S(k)} = S(m)$.

q.e.d.

Alternative Definition der Arithmetik

Seien $i, j \in \mathbb{N}$. Betrachte $\underbrace{\{0\} \times i}_{i_0} \cup \underbrace{\{1\} \times j}_{j_1}$.

$i_0 \cap j_1 = \emptyset$

Finde $k \in \mathbb{N}$ mit $k \sim \{0\} \times i \cup \{1\} \times j$.

Definiere $i \oplus j := k$ gdw k ist die eindeutig bestimmte nat. Zahl mit $k \sim \{0\} \times i \cup \{1\} \times j$.

SYNTHETISCHE DEFINITION VON PLUS
KARDINALE DEFINITION VON PLUS

Satz $\forall i, j \in \mathbb{N}$
$i + j = i \oplus j$.

Beweis: Induktion.

Ebenso: Multiplikation.

$i, j \in \mathbb{N}$. Betrachte

$$i \otimes j := k \quad \text{gdw} \quad k \sim i \times j.$$

<u>Satz</u> $i \times j = i \otimes j$. f. a. $i, j \in \mathbb{N}$

[Wie vorher gibt der (induktive) Beweis insbesondere die Existenz einer solchen Zahl.]

SYNTHETISCH vs INDUKTIV

KARDINAL vs ORDINAL

$x \oplus y$ $\qquad$ $x + y$

$x \otimes y$ $\qquad$ $x \cdot y$

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Algebra $(G, +, 0)$ abelsches Monoid
0 neutrales Element
$+$ assoziativ, kommutativ

Dann betrachte $G \times G$ mit $\approx$ Äquivalenzrelation

$(g, h) \approx (g', h') :\Longleftrightarrow g + h' = h + g'$.

Schreibe $[g, h]$ für die $\approx$-Äquivalenzklasse von (g, h).

$\mathbb{O} := [0, 0]$; $\oplus$ $[g, h] \oplus [g', h'] := [g + g', h + h']$

$\ominus$ $\ominus [g, h] := [h, g]$

Dann ist $G \times G/_\sim$, $\mathbb{O}, \oplus, \ominus$ eine Gruppe.

Bsp. $G = \mathbb{N}$

$(0,2) \approx (1,3)$
$\approx (2,4)$
$\approx (3,5)$
$\ldots$

$(2,0) \approx (3,1)$
$\approx (4,2)$
$\approx \ldots$

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}\times\mathbb{N} / \approx$$

mit den Operationen $\mathbb{O}, \oplus, \ominus$:

$(\mathbb{Z}, \mathbb{O}, \oplus, \ominus)$ Gruppe der ganzen Zahlen.

Können die Multiplikation auf $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$ punktweise übertragen : $\otimes$

$$\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{O}\}$$

$(\mathbb{Z}^*, \otimes, [1,0])$ wiederum ein abelsches Monoid

$\rightsquigarrow$ zweite Anwendung unseres Satzes gibt die multiplikative Gruppe von $\mathbb{Q}$.

Nun zu $\mathbb{R}$!

Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen :

VOLLSTÄNDIGKEIT : Üblicherweise (Analysis I)

$(K, +, \cdot, <)$ angeordneter Körper

<u>VOLLSTÄNDIG</u> gdw jede beschränkte Menge eine kleinste obere Schranke hat.

<u>Negatives Bsp.</u> $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ ist nicht vollständig

$\{x ; x^2 \leq 2\}$ ist beschränkt in $\mathbb{Q}$, aber keine rationale Zahl ist kleinste obere Schranke.

<u>Definition</u> $<$ auf $\mathbb{Q}$: $\frac{z}{z'} < \frac{z''}{z'''} :\Longleftrightarrow z \cdot z''' < z' \cdot z''$

Sei $(X,<)$ eine totale strikte Ordnung
(Ordnung i.S.v. $<$)

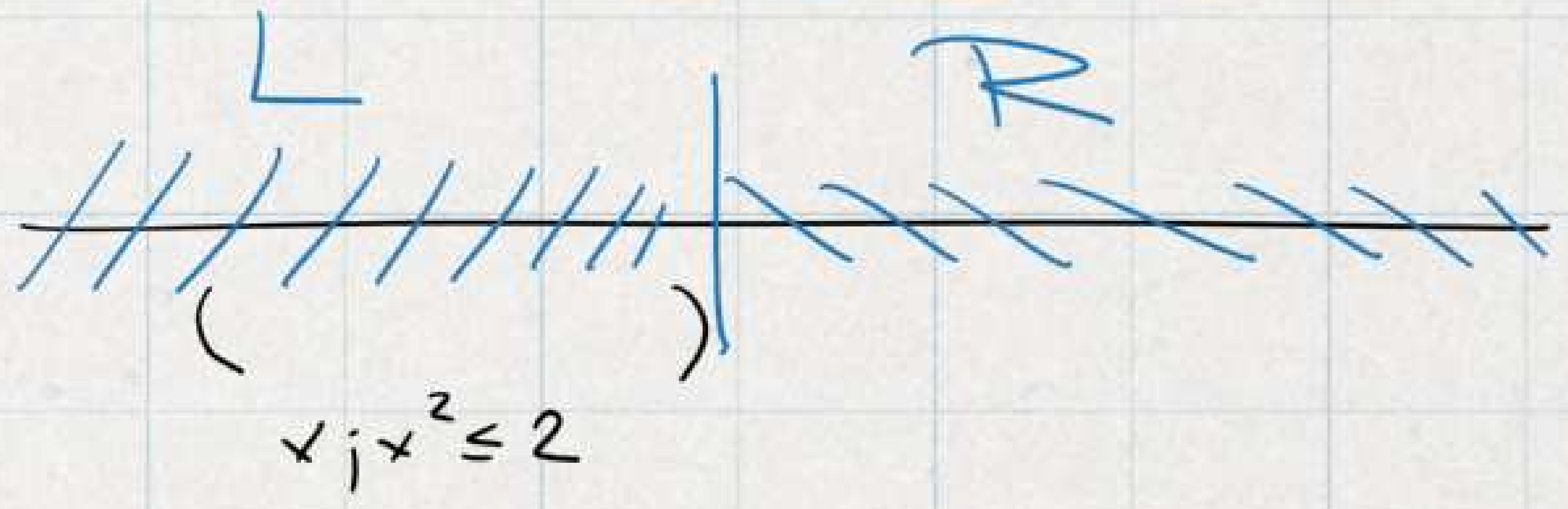
Dann nennen wir ein Paar (L,R) mit $L,R \subseteq X$ einen
DEDEKIND-Schnitt, falls

$L \cap R = \emptyset$

$L \cup R = X$

$\forall x \forall y\ x \in L$ und $y < x \longrightarrow y \in L$

$\forall x \forall y\ x \in R$ und $x < y \longrightarrow y \in R$



Ein Dedekind-Schnitt (L,R) heißt adäquat falls L kein größtes Elt. hat.

Ein Dedekind-Schnitt (L,R) heißt realisiert falls R ein kleinstes Element hat.

Daß $(\mathbb{Q},<)$ nicht vollständig ist, heißt, daß es nicht realisierte Dedekind-Schnitte gibt.

$A,B \subseteq X$

$A \leq B :\Longleftrightarrow \forall a \forall b\ a \in A \wedge b \in A \longrightarrow a \leq b$

$x \in X$

$A \leq x :\Longleftrightarrow A \leq \{x\}$

Sei $(X,<)$ totale strikte Ordnung.
Seien (L,R) und (L',R') D-Schnitte.
Definiere

$$(L,R) < (L',R') :\Longleftrightarrow L \subsetneq L'.$$

Sei $D(X)$ die Menge aller adäquaten D-Schnitte.

$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & (\{y; y<x\}, \{y; y \geq x\}) \\ \cap & & \\ \mathbb{Q} & & \end{array}$$

Dann ist dies ein adäquater D-Schnitt.

<u>Satz (ohne Beweis)</u>. $(D(X),<)$ ist vollständig.

$$\mathbb{R} := D(\mathbb{Q}).$$

<u>Bemerkung</u> Alternative Konstruktion. $\mathbb{Q} \rightsquigarrow {}^{\mathbb{N}}\mathbb{Q}$
Folgen von rationalen Zahlen
falls $s \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{Q}$; Cauchy $\longrightarrow$ CF
Null $\longrightarrow$ NF

CF/NF

Dies rekonstruiert die "gesamte" Mathematik:

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$

Funktionsräume auf $\mathbb{R}$: $X \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$.

Abstrakte Mathematik aus FST kann auf diese Objekte angewandt werden.

Für viele (fast alle) praktischen Anwendungen können wir die Mathematik in Z^0 ($=$ FST $+$ Inf) rekonstruieren.

Die herkömmliche Mathematikerin kann also in Z^0 leben.
($\neq$ Mengentheoretiker)

Offene Frage: Wie messen wir die Größe unendlicher Mengen?

Hierfür wurden in der Mengenlehre zwei Begriffe eingeführt, die eng miteinander zusammenhängen:

ORDINALZAHLEN

KARDINALZAHLEN

Für eine ordentliche Theorie dieser Objekte brauchen wir zusätzliche Axiome: ERSETZUNG, FUNDIERUNG.

Etwas mehr zu INDUKTION

INDUKTIONSPRINZIP

Falls $X \subseteq \mathbb{N}$ und $1 \in X$

und $\forall x \, (x \in X \longrightarrow \underline{S}(x) \in X)$

Dann ist $X = \mathbb{N}$.

[Falls $X \subseteq \mathbb{N}$ induktiv, so $X = \mathbb{N}$.]

ORDNUNGSINDUKTION

Falls $X \subseteq \mathbb{N}$ mit

$$\boxed{\forall z \, (\forall y \, (y < z \longrightarrow y \in X) \longrightarrow z \in X)}$$

ordnungsinduktiv

Dann ist $X = \mathbb{N}$.

Satz: $\mathbb{N}$ erfüllen das Prinzip der Ordnungsinduktion.

Beweis: Sei Z ordnungsinduktiv. Definiere $\hat{Z} := \{x ; \forall y \leq x \, (y \in Z)\}$

$\hat{Z} \subseteq Z$.

Zu zeigen: $\hat{Z}$ ist induktiv. $\Rightarrow \hat{Z} = \mathbb{N}$

$\Rightarrow Z = \mathbb{N}$.

Z ordnungsinduktiv

$$\hat{Z} := \{x;\ \forall y \le x\ (y \in Z)\}$$

$$\boxed{\forall z\ \ \forall y < z\ \ y \in Z \longrightarrow z \in Z}$$

Zu zeigen: $\hat{Z}$ induktiv.

$0 \in \hat{Z}$. $\quad 0 \in Z$: Da $\forall y < 0\ \ y \in Z$

$$\longrightarrow 0 \in Z$$

$$\Longrightarrow 0 \in \hat{Z}.$$

Ang. $x \in \hat{Z}$. $\iff \forall y \le x\ (y \in Z)$.

$$\iff \forall y < S(x)\ (y \in Z)$$

[Da $S(x)$ die kleinste Zahl $> x$ ist]

$$\Longrightarrow S(x) \in Z$$

$$\forall y \le S(x)\ (y \in Z) \iff S(x) \in \hat{Z}.$$

q.e.d.

Ein drittes Induktionsprinzip

Satz vom kleinsten Element

Für alle $Z \subseteq \mathbb{N}$, falls $Z \neq \emptyset$ so ex. ein kleinstes Element von Z.

Mi: Beweis dieses Satzes.