# MLML XVI

Eine Menge $I$ hieß *induktiv*, falls $\varnothing \in I$ und für alle $x \in I$, ist auch $x \cup \{x\} \in I$.

(35) Sei $\mathfrak{X} = (X, \leq)$ eine linear geordnete Menge. Eine Teilmenge $Z \subseteq X$ heißt $Z$ *ordnungsinduktiv (in $\mathfrak{X}$)*, falls für alle $x \in X$ gilt: wenn $\{z \in X\,;\, z < x\} \subseteq Z$, so ist $x \in Z$.

Wir sagen, daß $(X, \leq)$ das *Prinzip der Ordnungsinduktion erfüllt*, falls für jede ordnungsinduktive Teilmenge $Z \subseteq X$ gilt, daß $Z = X$.

Zeigen Sie, daß $(\mathbb{N}, \subseteq)$ das Prinzip der Ordnungsinduktion erfüllt. Kennen Sie Beispiele von linear geordneten Mengen, welche nicht das Prinzip der Ordnungsinduktion erfüllen?

WICHTIG
- Mengen sind induktiv oder nicht qua Menge
- "ordnungsinduktiv" hängt von der linearen Ordnung $\mathfrak{X}$ ab.

INDUKTIONSPRINZIPIEN

1. Prinzip der vollständigen Induktion
   "induktive Mengen"

   Beweise per vollst. Ind. zeigen, daß irgendeine Menge $Z \subseteq \mathbb{N}$ induktiv ist $\Longrightarrow Z = \mathbb{N}$.

2. Prinzip der Ordnungsinduktion

   Beweise per Ordnungsinduktion zeigen, daß $Z \subseteq \mathbb{N}$ ordnungsinduktiv ist $\Longrightarrow Z = \mathbb{N}$.

$\mathbb{N}$ INDUKTIV
auch: ordnungsinduktiv als TM von $\mathbb{N}$

Betrachte: $\Omega := \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\} \supsetneqq \mathbb{N}$

Klar ist: $\Omega$ ist nicht induktiv
$S(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\} = \Omega \notin \Omega$.

Aber: $\Omega = \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$ mit $\underline{\in}$ als
strikte lineare Ordnung erfüllt
das Prinzip der Ordnungsinduktion.

z.z. falls $Z \subseteq \Omega$ ordnungsinduktiv, so $Z = \Omega$.

Falls $Z \subsetneqq \Omega$, so gibt es ein $x \in \Omega$ mit $x \notin Z$. Finde $x \in \mathbb{N} \setminus Z$

Fall 1 Es ex. ein $x \in \mathbb{N}$ mit $x \notin Z$.
minimal, dann gilt $\{y \in \Omega ; y < x\} \subseteq Z$
aber $x \notin Z$. Also ist $Z$ nicht ordnungsind.

Fall 2 $\mathbb{N} \subseteq Z$, aber $\mathbb{N} \notin Z$. $\{y \in \Omega ; y < \mathbb{N}\}$
$= \{y \in \Omega ; y \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \subseteq Z$.
Also ist $Z$ nicht ordnungsind.

q.e.d.

$\Omega$ erfüllt nicht das Prinzip der vollst. Ind.,
da $\mathbb{N} \subsetneqq \Omega$, $\mathbb{N}$ induktiv.

Eine Menge $I$ hieß *induktiv*, falls $\varnothing \in I$ und für alle $x \in I$, ist auch $x \cup \{x\} \in I$.

(35) Sei $\mathfrak{X} = (X, \leq)$ eine linear geordnete Menge. Eine Teilmenge $Z \subseteq X$ heißt $Z$ *ordnungsinduktiv (in $\mathfrak{X}$)*, falls für alle $x \in X$ gilt: wenn $\{z \in X ; z < x\} \subseteq Z$, so ist $x \in Z$.

Wir sagen, daß $(X, \leq)$ das *Prinzip der Ordnungsinduktion erfüllt*, falls für jede ordnungsinduktive Teilmenge $Z \subseteq X$ gilt, daß $Z = X$.

Zeigen Sie, daß $(\mathbb{N}, \subseteq)$ das Prinzip der Ordnungsinduktion erfüllt. Kennen Sie Beispiele von linear geordneten Mengen, welche nicht das Prinzip der Ordnungsinduktion erfüllen?

# DAS PRINZIP DER KLEINSTEN ZAHL

**1.1 Definition.** $r[u] := \{v \in \mathrm{Def}(r) \mid vru\}$.

Die oben angesprochene Verallgemeinerung von Ordnungen, die dem Prinzip vom kleinsten Element genügen, lautet nun:

**1.2 Definition.** Die Relation $r$ *ist fundierte Relation über* der Menge $a$ und $(a, r)$ *ist eine fundierte Struktur* $:\leftrightarrow$ $(a, r)$ ist eine binäre Struktur, in der die folgende Variante des Prinzips vom kleinsten Element gilt:

$$\boxed{\forall b\,(\emptyset \neq b \wedge b \subseteq a \to \exists u\,(u \in b \wedge b \cap r[u] = \emptyset)),} \qquad (*)$$

d. h. jede nicht leere Teilmenge von $a$ besitzt ein $r$-minimales Element.

Falls $\mathfrak{X} = (X, <)$ eine strikte lineare Ordnung ist, so

$$<[x] := \{y \in X;\ y < x\}$$

Die $<$-Vorgänger von $x$.

Eine TM $Z \subseteq X$ heißt ordnungsinduktiv falls $\forall x \in X$

$$<[x] \subseteq Z \implies x \in Z.$$

Eine strikte lineare Ordnung $\mathfrak{X} = (X, <)$ erfüllt das Prinzip des kleinsten Elements gdw $(*)$ gilt.

Es gilt z.B. $m$ das kleinste Element von $Z$ ist $\iff$

$$<[m] \cap Z = \emptyset$$

und $m \in Z$.

**Satz** Sei $\mathfrak{X} = (X, <)$ eine strikte lineare Ordnung. Dann sind äquivalent:

(i) $\mathfrak{X}$ erfüllt P.K.E.

(ii) $\mathfrak{X}$ erfüllt P.O.I.

**Beweis** (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $Z \subseteq X$ ordnungsinduktiv. Für Wid., ang. $Z \neq X$.

$\Longrightarrow X \setminus Z \neq \emptyset$. Das PKE gibt uns ein $u \in X \setminus Z$ mit $<[u] \cap X \setminus Z = \emptyset$.

$\iff <[u] \subseteq Z$.

$\overset{Z \text{ ordn. ind.}}{\Longrightarrow} u \in Z$ ↯

(ii) $\Rightarrow$ (i). Für Wid., sei $Z \neq \emptyset$ ohne kleinstes Element.

Dann ist $X \setminus Z$ ordnungsinduktiv $\overset{POI}{\Longrightarrow} X \setminus Z = X \Longrightarrow Z = \emptyset$ ↯.

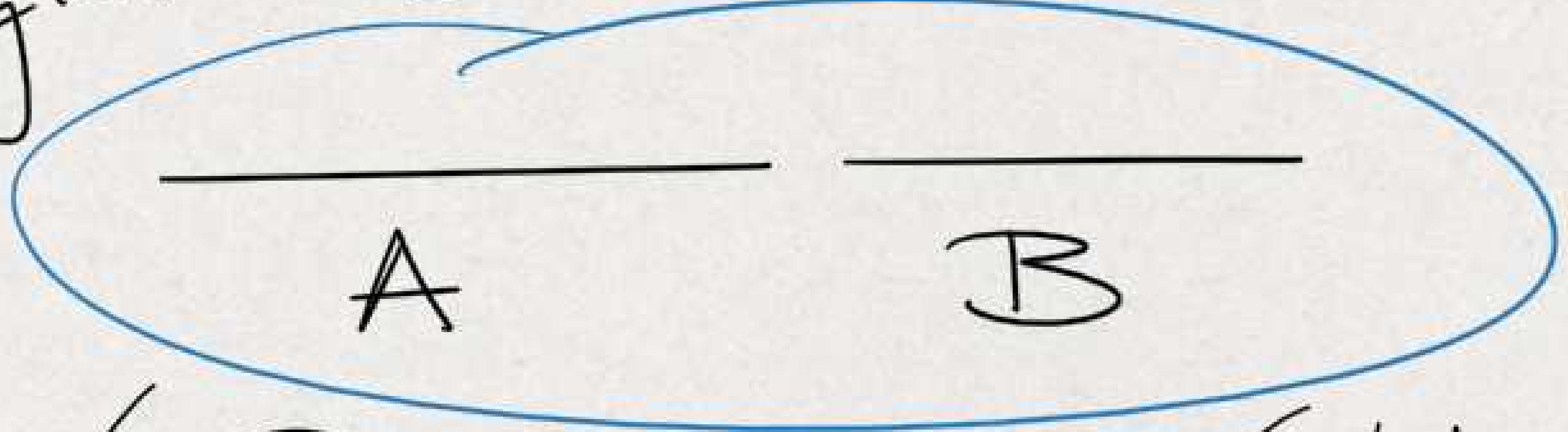
Begr. Sei nun $u \notin X \setminus Z \iff u \in Z$.

Da $Z$ kein kleinstes Element hatte, $<[u] \cap Z \neq \emptyset$

$\Longrightarrow <[u] \not\subseteq X \setminus Z$. q.e.d.

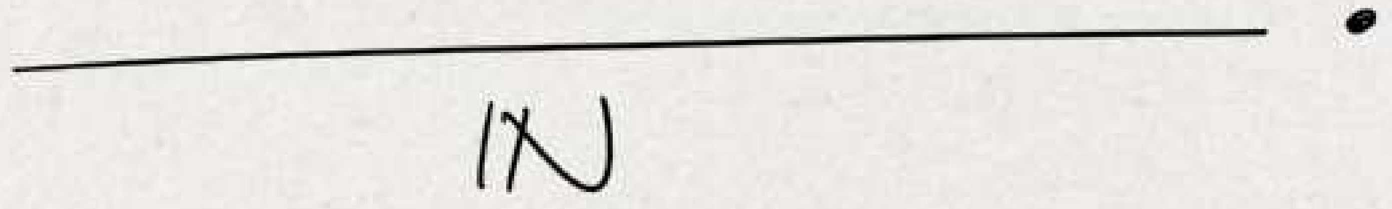
$\Omega = \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$ mit der Ordnung $\in$ ist ein Beispiel für eine Ordnung, die das PKE erfüllt, aber größer ist als $\mathbb{N}$.

Bem. Übungsaufgabe (33) — 1.20.6 gibt uns Summen von linearen Ordnungen




$(A, <) \oplus (B, <)$

$$(\Omega, \in) = (\mathbb{N}, \in) \oplus (\mathbb{1}, \in)$$




PKE bleibt erhalten unter diesen Ordnungssummen:

$$(\mathbb{N}, \in) \oplus (\mathbb{N}, \in)$$

**1.1 Definition.** $r[u] := \{v \in \mathrm{Def}(r) \mid vru\}$.

Die oben angesprochene Verallgemeinerung von Ordnungen, die dem Prinzip vom kleinsten Element genügen, lautet nun:

**1.2 Definition.** Die Relation $r$ *ist fundierte Relation über* der Menge $a$ und $(a, r)$ *ist eine fundierte Struktur* $:\leftrightarrow$ $(a, r)$ ist eine binäre Struktur, in der die folgende Variante des Prinzips vom kleinsten Element gilt:

$$\forall b\, (\emptyset \neq b \wedge b \subseteq a \rightarrow \exists u\, (u \in b \wedge b \cap r[u] = \emptyset)),$$

d. h. jede nicht leere Teilmenge von $a$ besitzt ein $r$-minimales Element.

$(A,<)$ heißt fundiert falls PKE gilt.

DEFINITION $(A,<)$ heißt WOHLORDNUNG falls $(A,<)$ eine strikte lineare Ordnung (i. S. v. $<$) ist und $<$ fundiert ist.

Bsp. $(\mathbb{N}, \in)$ Wohlordnung

$n \in \mathbb{N}$ $(n, \in)$ Wohlordnung

$(\Omega, \in)$ Wohlordnung

[Falls $(A,<), (B,<)$ Wohlordnungen, so auch $(A,<) \oplus (B,<)$.]

Bsp. für Nichtwohlordnungen

$(\mathbb{Z}, <)$ [weil $\mathbb{Z}$ kein kleinstes Elt. hat]

$(\mathbb{Q}^{\geq 0}, <)$ [$\mathbb{Q}^{>0} \subseteq \mathbb{Q}^{\geq 0}$ hat kein kleinstes Element].

Wir erhalten unmittelbar:

INDUKTIONSPRINZIP auf Wohlordnungen

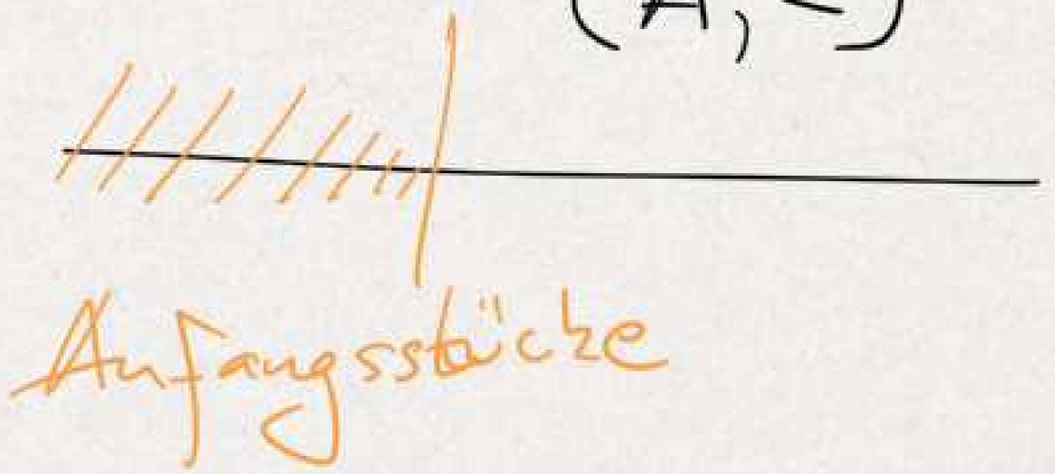
Falls $(W, <)$ eine Wohlordnung und $Z \subseteq W$ ist ordnungsinduktiv $[\forall w \in W\, (\mathbb{Z}[w] \subseteq Z \Rightarrow w \in Z)]$

so ist $Z = W$.

[Unmittelbar aus der Äquivalenz von PKE & POI.]

MOTIVATION

$(A,<)$




Wir wollen eine Theorie der 'kanonischen Repräsentanten von unendlichen Mengen auf diesen Wohlordnungen aufbauen. Wohlordnungen sind nicht so willkürlich wie beliebige totale Ordnungen, sondern kommen mit einer kanonischen Struktur:

$(A,<)$ strikte lineare Ordnung

$Z \subseteq A$

FUNDAMENTALSATZ über Wohlordnungen

Ebbinghaus Satz VI.1.9.

**1.6 Definition.** (i) $b$ ist ein *Anfangsstück* von $a$ bzgl. $r$

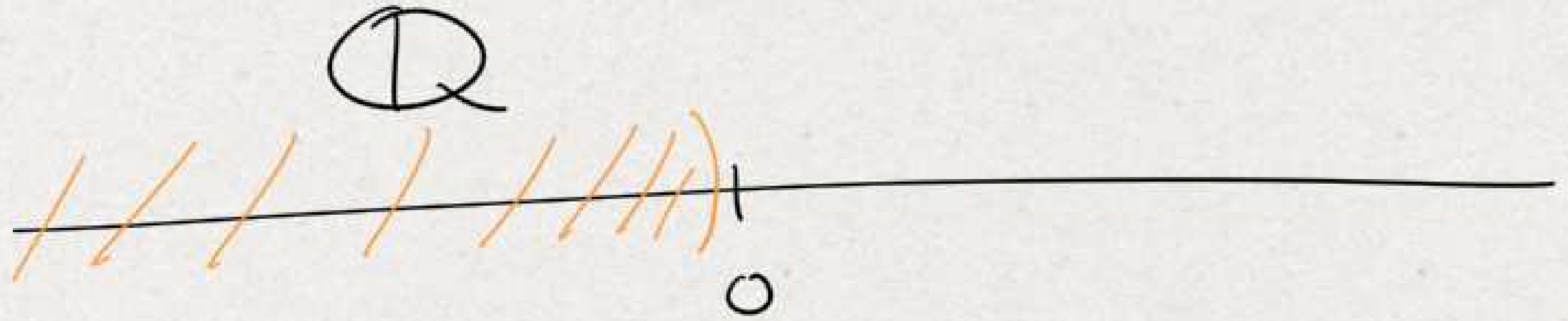
:↔ $r \subseteq a \times a \wedge b \subseteq a \wedge \forall u\,(u \in b \rightarrow r[u] \subseteq b)$.

$\longrightarrow \forall u \left(u \in b \longrightarrow \forall z (z < u \longrightarrow z \in b)\right)$

(ii) $(b, s)$ ist ein *Anfangsabschnitt* von $(a, r)$

:↔ $b$ ist Anfangsstück von $a$ bzgl. $r$ und $s = r \cap (b \times b)$.

$(b, r)$




Auf $\mathbb{Q}$ gibt es echte Anfangsabschnitte, die isomorph sind zu $\mathbb{Q}$.

$$\{q \in \mathbb{Q};\ q < 0\} \cong \mathbb{Q}$$

[Dies wird bei Wohlordnungen nicht möglich sein.]

<u>Theorem</u> Seien $(W,<)$ und $(V,<)$ Wohlordnungen und $A_1, A_2$ Anfangsstücke von $V$. Falls

$$f : (W,<) \longrightarrow (A_1,<)$$
$$g : (W,<) \longrightarrow (A_2,<)$$

Isomorphismen

so ist $f = g$. [Insbesondere gilt $A_1 = A_2$.]

Thm $(W,<), (V,<)$ Wohlord. $\Longrightarrow f = g$.
$A_1, A_2$ AS von $V$; $f: W \longrightarrow A_1$ Iso
$g: W \longrightarrow A_2$

$[A_1 = A_2 = V]$

**1.8 Korollar.** (i) *Zwischen zwei Wohlordnungen gibt es höchstens einen Isomorphismus.*
(ii) *Es gibt keinen Isomorphismus von einer Wohlordnung auf einen ihrer echten Anfangsabschnitte.*
(iii) *Wohlordnungen sind starr*, d.h. *sie besitzen außer der Identität keinen Automorphismus*, d.h. *keinen Isomorphismus auf sich selbst.* ⊣

[id: $W \longrightarrow W$ ist Iso.
$f: W \longrightarrow A$; $A$ AS von $W$
$\underset{\text{Thm}}{\Longrightarrow}$ id $= f$ & $A = W$
$A$ ist kein echtes AS ].

Zum Theorem

$\left[\begin{array}{l} \text{id}: W \longrightarrow W \\ f: W \longrightarrow W \text{ Auto} \end{array}\right\} \underset{\text{Thm}}{\Longrightarrow} \text{id} = f \Big]$

Erinnerung (ii) ging bei den rationalen Zahlen schief
$$(-\infty, 0) \cap \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}.$$

**Thm** $(W,<), (V,<)$ Wohlord.
$A_1, A_2$ AS von $V$
$f: W \longrightarrow A_1$ Iso $\Longrightarrow f = g$
$g: W \longrightarrow A_2$

**Beweis**

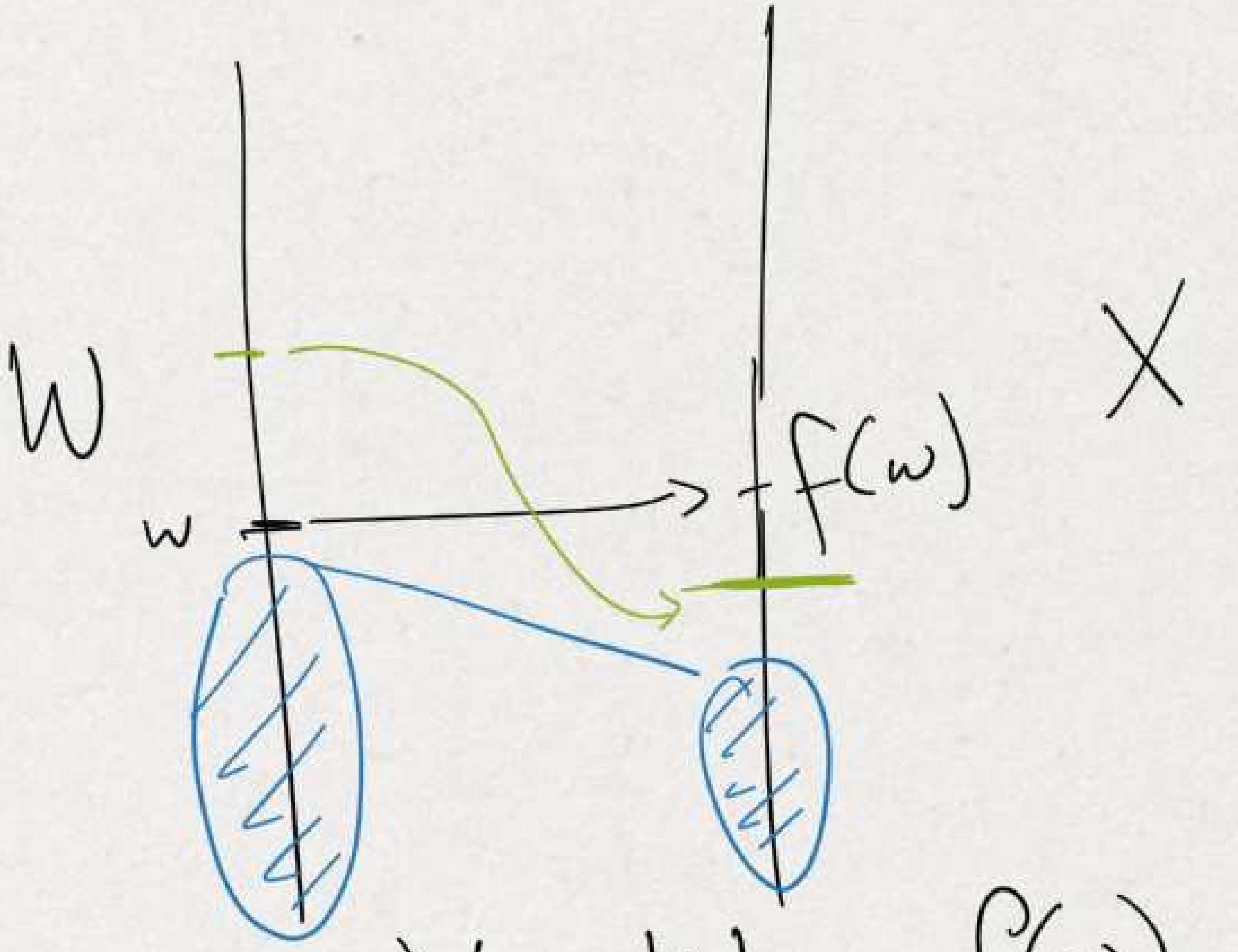
Vorüberlegung:

$f: (W,<) \longrightarrow (X,<)$ Iso mit $W, X$ Wohlordnungen
$w \in W$

$f(w)$ muß größer sein als alle $f(y)$ für $y \in <[w]$.

$\mathrm{Bild}(f \upharpoonright <[w])$

Insbesondere muß $f(w)$ das kleinste Element von $X \setminus \mathrm{Bild}(f \upharpoonright <[w])$ sein.




$\forall w \in W$: $f(w)$ ist das kleinste Elt von $X \setminus \mathrm{Bild}(f \upharpoonright [w])$.

$f : W \to A_1$

$g : W \to A_2$

Beweis per Induktion:

$$G := \{ w \in W ; f(w) = g(w) \}$$

Beh. $G$ ist ordnungsinduktiv. $[\Longrightarrow G = W \Rightarrow f = g]$.

$$(\forall w \in W ( <[w] \subseteq G \Rightarrow w \in G )).$$

Sei $w \in W$ mit $<[w] \subseteq G$.

$$\Longrightarrow f \restriction <[w] = g \restriction <[w] =: B.$$

<u>Beh.</u> $a_1 = a_2$.

Ang. nicht.

OBdA $a_1 < a_2$

Nach Vorüberlegung:

$f(w) = a_1$ ist das kleinste Elt. von $A_1 \setminus \underline{B}$.

$g(w) = a_2$ ist das kleinste Elt. von $\underline{A_2} \setminus B$.

$a_1 < a_2 \in A_2$

$\Longrightarrow a_1 \in A_2 \quad \Longrightarrow a_1 = a_2.$

$\Longrightarrow f(w) = g(w) \Rightarrow w \in G.$ q.e.d.

# Fundamentalsatz für Wohlordnungen

Seien $(A,<)$ und $(B,<)$ Wohlordnungen. Dann ist
$(A,<)$ isomorph zu einem Anfangsabschnitt von $(B,<)$ oder
$(B,<)$ —————— " —————— $(A,<)$

[Bem. Dies schließt den Fall $(A,<) \cong (B,<)$ ein.]

Bemerkung D.h., daß Wohlordnungen bis auf Isomorphie durch die Relation

$$(A,<) < (B,<) \;:\Longleftrightarrow\; (A,<) \text{ ist isomorph zu einem echten Anf.abschnitt von } (B,<)$$

strikt linear geordnet.

## Beweis des Fundamentalsatzes.

$(A,<)$, $(B,<)$ Wohlordnungen.

$I := \{ f \subseteq A \times B \,;\, f$ ist ein Isomorphismus zw. einem Anfangsabschnitt von $(A,<)$ und einem Anfangsabschn. von $(B,<)\}$

$$= \{ f \,;\, \exists A', B' \quad A' \text{ AS von } (A,<),\; B' \text{ AS von } (B,<),\; f : (A',<) \cong (B',<) \}$$

$\emptyset \in I$ $\quad \emptyset$ ist Iso. von $\emptyset$ [AS von $A$] nach $\emptyset$ [AS von $B$].

Ebenso: falls $a_0, b_0$ die kleinsten Elte von $A$ und $B$ sind, so ist

$\{(a_0, b_0)\} \in I$.

Ang. $f_1, f_2 \in I$. $\quad f_1 : A_1 \longrightarrow B_1$

$f_2 : A_2 \longrightarrow B_2$

Da $A_1, A_2$ AS von $A$ sind, gilt entweder $A_1 \subseteq A_2$ oder $A_2 \subseteq A_1$.

OBdA $A_1 \subseteq A_2$.

Dann ist $A_1$ AS von $A_2$

$f_2 | A_1 : A_1 \longrightarrow B_1$

Nach Theorem gilt also $f_2 \upharpoonright A_1 = f_1$.

D.h., daß $f_1 \cup f_2 = f_2$.

$I = \{ f ; f$ ist Iso von AS von $A$ nach AS von $B \}$

$h := \bigcup I$ ist eine Funktion.

[Ang. nicht, dann ex. $f_1, f_2 \in I$ und $x \in Def(f_1) \cap Def(f_2)$ mit $f_1(x) \neq f_2(x)$. $\lightning$ ].

$Def(h) = \bigcup \{ S ; S$ ist ein Def.bereich einer Fkt. in $I \}$ ← AS von $(A, <)$

$Bild(h) = \bigcup \{ S ; S$ ist ein Bildbereich einer Fkt in $I \}$ ← AS von $(B, <)$

$h : Def(h) \longrightarrow Bild(h)$

$h \in I$.

$$h : \mathrm{Def}(h) \longrightarrow \mathrm{Bild}(h).$$

**Drei Fälle:**

1. $\mathrm{Def}(h) = A$.
   Dann ist $(A,<)$ iso zu Anf.abschn. von $B$. ✓

2. $\mathrm{Bild}(h) = B$
   Dann ist $(B,<)$ via $h^{-1}$ iso zu Anf.abschnitt von $A$. ✓

3. $\mathrm{Def}(h) \neq A$ & $\mathrm{Bild}(h) \neq B$.

$\emptyset \neq Z := A \setminus \mathrm{Def}(h) \subseteq A$

Sei $z_0$ min. in $Z$

$\emptyset \neq \overline{Z} := B \setminus \mathrm{Bild}(h) \subseteq B$

Sei $\overline{z}_0$ min. in $\overline{Z}$.

$h \cup \{(z_0, \overline{z}_0)\} \in I$

$\Longrightarrow z_0 \in \mathrm{Def}(h)$ ↯

Also kann der Fall 3. nicht eintreten!

q.e.d.