Mathematische Logik & Mengenlehre

VORLESUNG XVII

Seien $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ Wohlordnungen. Dann sei

$$\mathfrak{X} \preceq \mathfrak{Y} \;:\iff\; \mathfrak{X} \text{ ist isomorph zu einem Anfangsabschnitt von } \mathfrak{Y}$$

Fundamentalsatz. $\mathfrak{X} \preceq \mathfrak{Y}$ oder $\mathfrak{Y} \preceq \mathfrak{X}$.

Also: Wohlordnung sind b.a.I. linear durch $\preceq$ geordnet.

Theorem Sei X eine nichtleere Menge von Wohlordnungen. Dann ex. ein $\mathfrak{W}_M \in X$, so daß für alle $\mathfrak{W} \in X$ gilt $\mathfrak{W} \preceq \mathfrak{W}_M$.

D.h. es ex. b.a.I. ein minimales Element von X.

BLOCKSEMINAR
WEITERFÜHRUNG DER THEORIE DER KARDINALZAHLEN
YURII KHOMSKII

Bitte Kontakt aufnehmen, falls Interesse.

__Beweis des Theorems.__ $X \neq \emptyset$, also sei $\mathcal{W}_0 \in X$.

$\mathcal{W}_0 = (W_0, R_0) \longleftarrow$ Wohlordnung

Betrachte $X_0 := \{ \mathcal{W} \in X \,;\, \underline{\mathcal{W} < \mathcal{W}_0} \}$

$\iff$

$\mathcal{W} \leq \mathcal{W}_0$ und $\mathcal{W} \not\equiv \mathcal{W}_0$

$\iff$

$\mathcal{W}$ ist isom. zu einem echten Anfangsabschnitt von $\mathcal{W}_0$

__Fall 1__ $X_0 = \emptyset$

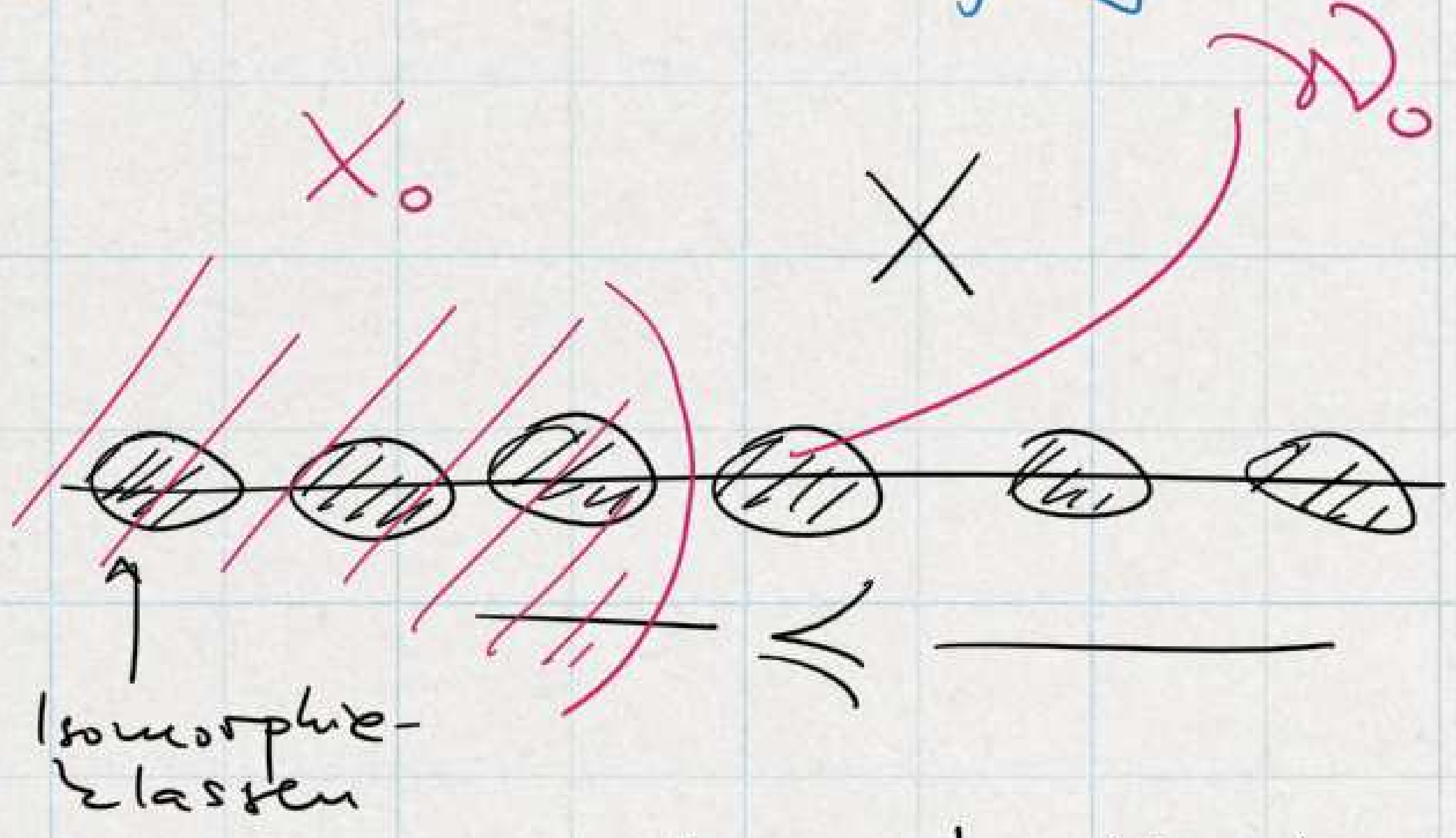
Dann gilt nach Fundamentalssatz f.a. $\mathcal{W} \in X$ $\underline{\mathcal{W} \geq \mathcal{W}_0}$.

Also $\mathcal{W}_M := \mathcal{W}_0$ minimal.

__Fall 2__ $X_0 \neq \emptyset$

Übungsaufgabe (43) betrachtet __echte__ Anfangsabschnitte einer Wohlordnung

Es gibt eine 1-1-Korrespondenz zw. den echten Anf.abschnitten und den Elementen der Wohlordnung.



D.h. falls $\mathcal{W} \in X_0$ so ex. eindeutig bestimmtes $w \in W_0$, so daß $\mathcal{W} \cong \underbrace{(R_0[w], R_0)}$

der von w bestimmte echte Aufabschnitt von $\mathcal{W}_0$.

$$Z := \{ w \in W_0 ; \exists \mathcal{W} \in X_0 \; \mathcal{W} \cong (R_0[w], R_0) \} \subseteq W_0$$

Da wir in Fall 2 sind, $Z \neq \emptyset$. Sei also $z \in Z$ R_0-minimal. Finde $\mathcal{W} \cong (R_0[z], R_0)$. Dann ist $\mathcal{W}_1 := \mathcal{W}$ minimal in X_0. q.e.d.

BEMERKUNG $<$ ist sozusagen eine Wohlordnung aller Wohlordnungen.

Problem: Gibt es eine Menge aller Wohlordnungen? NEIN!

- b. a. I.

Endliche Wohlordnungen

$$4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$0 < 1 < 2 < 3$$

$$1 <^* 2 <^* 3 <^* 0$$

$$1 <^+ 2 <^+ 3 <^+ 4$$

$$0 <^\circ 1 <^\circ \mathbb{N} <^\circ \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} <^{\circ\circ} N <^{\circ\circ} 2\mathbb{N} <^{\circ\circ} \mathbb{Q}_{<0}$$

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3$$

für jedes $x \in 4$ gilt

$$<[x] = x$$

$$\boxed{n+1 = \{0, \ldots, n\}}$$

Unter alle diesen (immens vielen) zur 4 isomorphen Strukturen kann man die 4 als KANONISCH hervorheben.

Kann die Eigenschaft $<[x]=x$
auch für unendliche Wohlordnungen
gelten?

(1) $\mathbb{N} \longleftarrow$ ist eine unendliche Wohlordnung mit dieser Eigenschaft

(2) Falls $\mathcal{W}_0, \mathcal{W}_1$ Wohlordnungen sind, so auch $\mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_1$.
[Addition von Ordnungen auf Übl #6.
Wird wieder auf Übl #9 sein.]

$S(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\} \longleftarrow (\mathbb{N},<) \oplus (1,<)$

$\underbrace{\quad\quad}_{\mathbb{N}}\ \overset{!}{\underset{a}{\bullet}}$ $\qquad <[a] = a$, $<[a] = \mathbb{N}$

$S(S(\mathbb{N})) = \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}\} \longleftarrow (\mathbb{N},<) \oplus (2,<)$

$\underbrace{\quad\quad}_{\mathbb{N}}\ \underset{a}{\bullet}\ \underset{b}{\bullet}$ $\qquad <[b] = b$, $<[b] = \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$

$\underline{X}$

Def. Eine Menge heißt <u>transitiv</u> gdw
für alle x, y gilt
wenn $x \in \underline{X}$ und $y \in x$, dann $y \in \underline{X}$

Übungsblatt # 9 Äq. sind: "jede Elt. von $\underline{X}$ ist eine TM von $\underline{X}$"
"für alle $x \in \underline{X}$ gilt $\in[x] = x$".

Definition Eine Menge α heißt ORDINALZAHL
gdw α eine transitive Menge ist und
$(\alpha, \in)$ eine Wohlordnung ist.

Ein paar Eigenschaften ① Falls X transitiv ist, so auch $S(X)$.

[$z \in y \in S(X) = X \cup \{X\}$

Fall 1 $\quad z \in y \in X \longrightarrow z \in X$

Fall 2 $\quad z \in y = X \longrightarrow z \in X \in S(X)$]

② Falls Z eine Menge von transitiven Mengen ist, so $\bigcup Z$ transitiv.

[$z \in y \in \bigcup Z \longrightarrow$ ex. $x \in Z$ mit $y \in x$

$z \in y \in x \xrightarrow[\text{trs}]{} z \in x$

$\longrightarrow z \in \bigcup Z$.]

Lemma (Hilfssatz 2.3) Sei α Ordinalzahl. Dann sind äq.

(1) $x \in \alpha$

(2) x ist echtes Anfangsstück von α bzgl. $\in$

(3) x ist transitive echte TM von α

Beweis. (2) $\Rightarrow$ (3) offensichtlich

(3) $\Rightarrow$ (2) offensichtlich

(1) $\Rightarrow$ (2). Ang. $x \in \alpha$. Transitivität von α impliziert $\in[x] = x$.

$$\in[x] = \{y \in \alpha;\ y \in x\}$$

Da $\in$ auf α eine Wohlordnung ist, gilt

$$a \in b \in c \longrightarrow a \in c \text{ für alle } a, b, c \in \alpha$$

Also ist $\in[x]$ ein Anfangsstück von α. Ang. $\in[x]$ wäre nicht echt also $\in[x] = \alpha \ni x$. D.h. $x \in x$, aber $\in$ ist irreflexiv auf α.

Widerspruch!

(2) $\Rightarrow$ (1). Sei x ein echtes Anfangsstück von α.
Finde das minimale Element m von $\alpha \setminus x$.

$$\in[m] = m \qquad \text{(da } \alpha \text{ transitiv war)}$$
$$= x$$

Daher $x \in \alpha$. q.e.d.

Korollar Alle Elemente einer Ordinalzahl sind Ordinalzahlen.

Beweis Sei α Ord. und $x \in \alpha$. Nach Lemma ist x also transitive TM von α. $(x, \in)$ Wohlordnung
$\longrightarrow x$ ist Ordinalzahl. q.e.d.

Eigenschaften α, β, γ Ordinalzahlen

① $\alpha \notin \alpha$ [Ang. $\alpha \in \alpha$, da $(\alpha, \in)$ irreflexive Struktur gilt f.a. $x \in \alpha$ $x \notin x$ $\lightning$]

② $\alpha \in \beta, \beta \in \gamma \longrightarrow \alpha \in \gamma$ [folgt direkt aus Transitivität]

③ $\alpha \in \beta$ oder $\alpha = \beta$ oder $\beta \in \alpha$

[$\delta := \alpha \cap \beta \implies (\delta, \in)$ Wohlordnung, δ ist transitiv

$\implies \delta$ ist Ordinalzahl.

Es gilt nach Lemma $\delta = \alpha$ oder $\delta \subsetneq \alpha$ $(\implies \delta \in \alpha)$

$\delta = \beta$ oder $\delta \subsetneq \beta$ $(\implies \delta \in \beta)$

Fall 1 $\delta = \alpha$ und $\delta = \beta \implies \alpha = \beta$.

Fall 2 $\delta = \alpha$ und $\delta \in \beta \implies \alpha \in \beta$

Fall 3 $\delta \in \alpha$ und $\delta = \beta \implies \beta \in \alpha$

Fall 4. $\delta \in \alpha$ und $\delta \in \beta$

$\implies \delta \in \alpha \cap \beta = \delta$

Widerspruch zu ①.]

(4) $\alpha \subseteq \beta \iff \alpha \in \beta$ oder $\alpha = \beta$

[Folgt direkt aus (3).]

(5) $\alpha \subseteq \beta$ oder $\beta \subseteq \alpha$.

[Folgt aus (3) & (4).].

FERTIG

(6) $\alpha \cong \beta \implies \alpha = \beta$.

[Nach (3), drei Möglichkeit $\alpha \in \beta$ oder $\alpha = \beta$ oder $\beta \in \alpha$.

Falls $\alpha \in \beta \longrightarrow \alpha$ ist ein echtes Anfangsstück von β.

Aber Wohlordnungen sind nie isomorph zu einem ihrer echten Anfangsstücke.

Ebenso für den Fall $\beta \in \alpha$.].

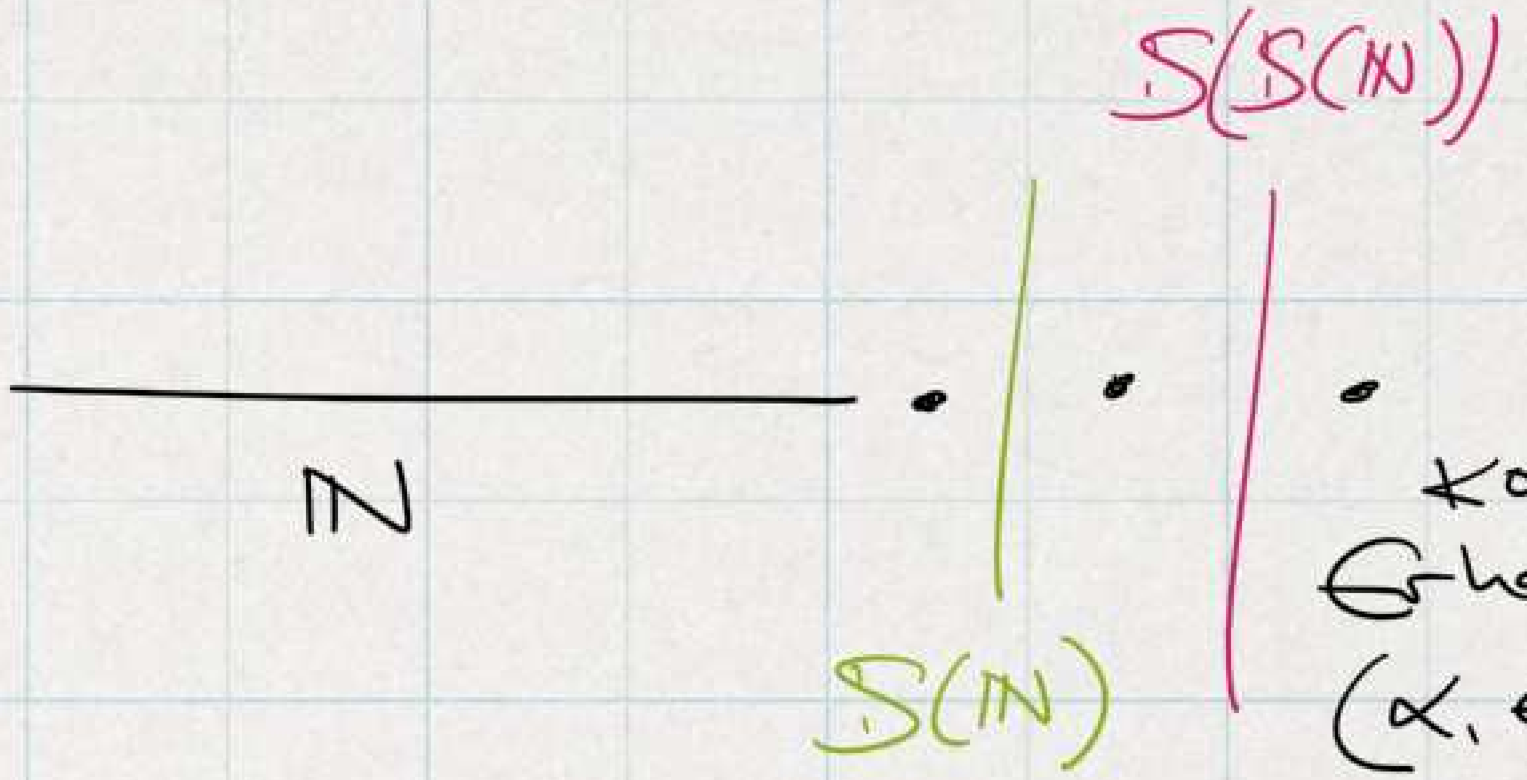
ZUSAMMENFASSUNG:

Nach (6) sind also die Ordinalzahlen die kanonischen Repräsentanten der Isomorphieklassen von Wohlordnungen.

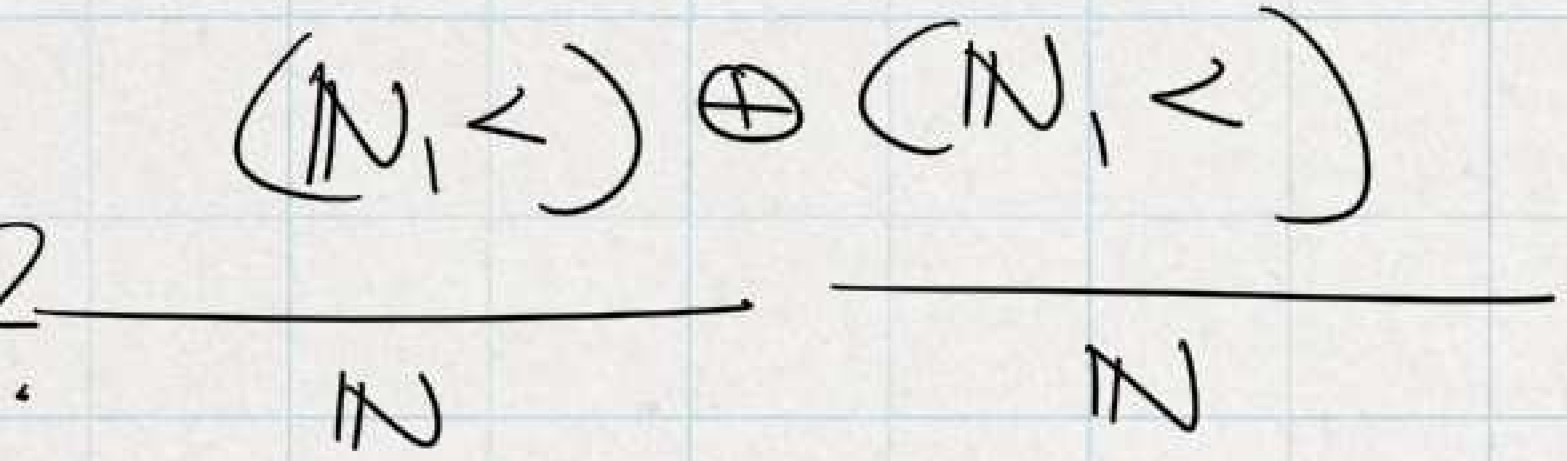
...... Sicher?

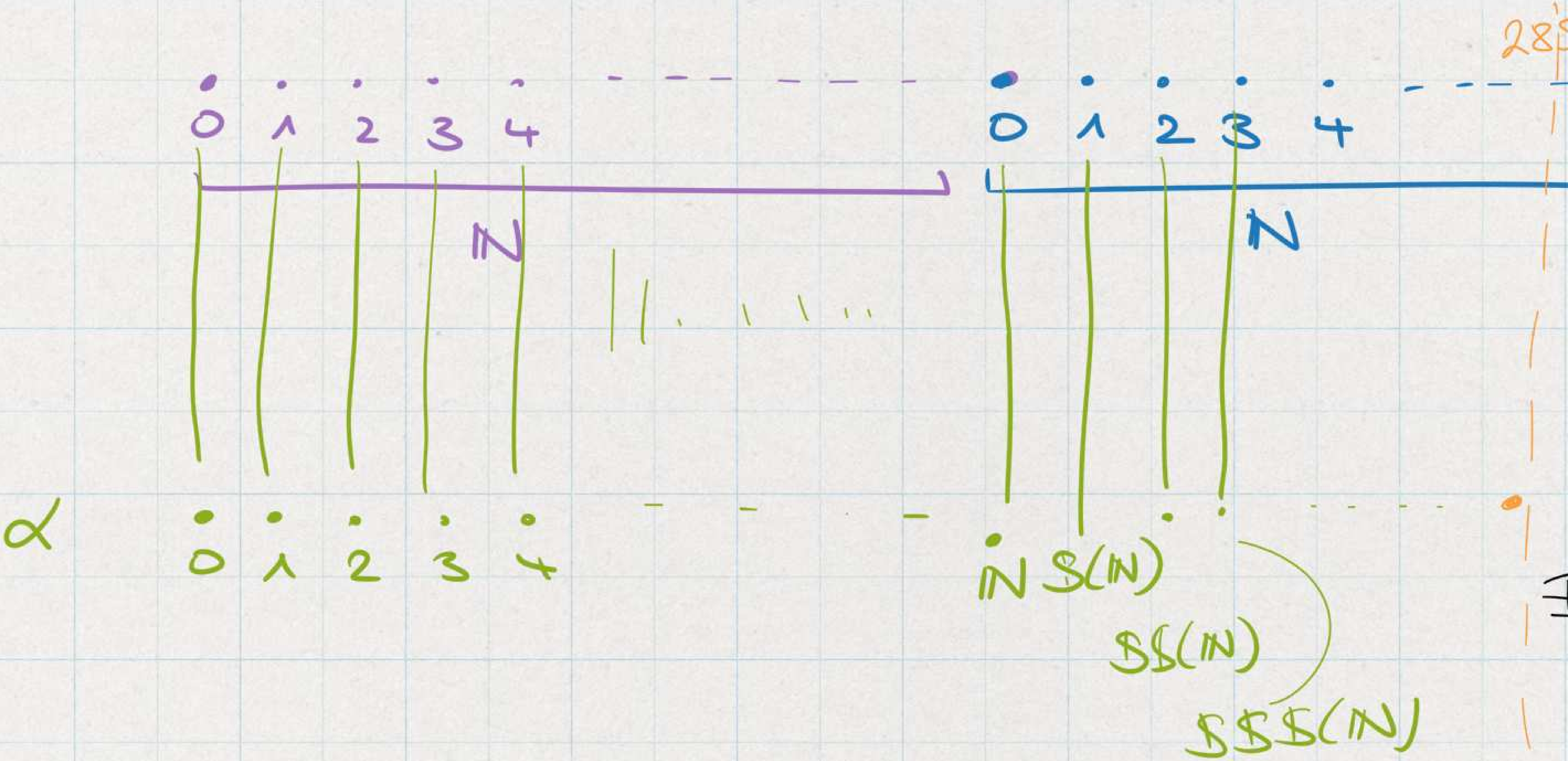
Wir haben nur gesehen, daß falls $\alpha \cong \beta$, so $\alpha = \beta$.

Aber: Gibt es für jede Wohlordnung eine isomorphe Ordinalzahl?



KONKRETE FRAGE:
Erhalte ich ein α, so daß $(\alpha, \in) \cong (\mathbb{N},<) \oplus (\mathbb{N},<)$?





Für jede nat. Zahl n finde ich eine Ordinalzahl α, so daß $\alpha \cong (\mathbb{N},<) \oplus (n,<)$

__Frage__ Kann ich all diese zusammen fügen?

__ANTWORT__: Nicht in Z^0!
Wir brauchen ein weiteres Axiom.

Am Mittwoch führen wir das ERSETZUNGSAXIOM ein und werden beweisen, daß es ein $\alpha \cong (\mathbb{N},<)\oplus(\mathbb{N},<)$ gibt.

<u>Heute</u>: allgemeine Theorie der Ordinalzahlen.

<u>Theorem</u> (INDUKTION über Ordinalzahlen)

Falls Φ eine beliebige Formel ist mit der Eigenschaft:

falls α Ord. und $\forall \beta \in \alpha\ \Phi(\beta)$ so $\Phi(\alpha)$ (*)

Dann gilt $\Phi(\alpha)$ für alle Ord.z. α.

<u>Beweis</u>. Ang. nicht. Sei nun α so daß $\neg \Phi(\alpha)$.

<u>Fall 1</u> Für alle $\beta \in \alpha$ $\Phi(\beta)$. Nach (*) folgt $\Phi(\alpha)$. ↯.

<u>Fall 2</u> Es ex. $\beta \in \alpha\ \neg \Phi(\beta)$. $Z := \{\beta \in \alpha;\ \neg \Phi(\beta)\} \neq \emptyset$. $Z \subseteq \alpha$.

Da α Wohlordnung: es ex. $m \in Z$ minimal in Z. Also $\forall \gamma \in \beta\ \Phi(\gamma)$. Nach (*) erhalten wir $\Phi(\beta)$. ↯

q.e.d.

* **Korollar** Jede nichtleere Menge von Ordinalzahlen hat ein kleinstes Elt.

[Da Ordnungsinduktion und das Prinzip des kleinsten Elements äquivalent sind.]

Theorem Es gibt keine Menge aller Ordinalzahlen.

Beweis Ang. Ω sei die Menge aller Ordinalzahlen.

BURALI-FORTI-PARADOX

$(\Omega, \in)$ ist totale strikte Ordnung nach (*) ist es eine Wohlordnung.

Aber falls $x \in \alpha \in \Omega$, so ist $x \in \Omega$.

Also ist Ω transitiv.

Ω eine Ordinalzahl

$\Longrightarrow \Omega \in \Omega$. ↯ zu (1) q.e.d.