MATHEMATISCHE LOGIK & MENGENLEHRE

VORLESUNG XVIII

SEMINAR SS20
[vermutlich im August]
KHOMSKII
"Weiterführung der Theorie der Kardinalzahlen"

WOHLORDNUNGEN
⟶ Suchen nach kanonischen Repräsentanten [so wie $\mathbb{N}$ die Repr. für endliche Ordnungen waren]

ORDINALZAHLEN : α ist Ord. falls $(\alpha, \in)$ Wohlordnung
α transitiv.

Wir hatten gesehen: α Ord. $\Longrightarrow$ $S(\alpha)$ Ord.

A Menge von Ord $\Longrightarrow$ $\bigcup A$ Ord.

Falls A Menge von Ord., so ist $\bigcup A$ Ord.

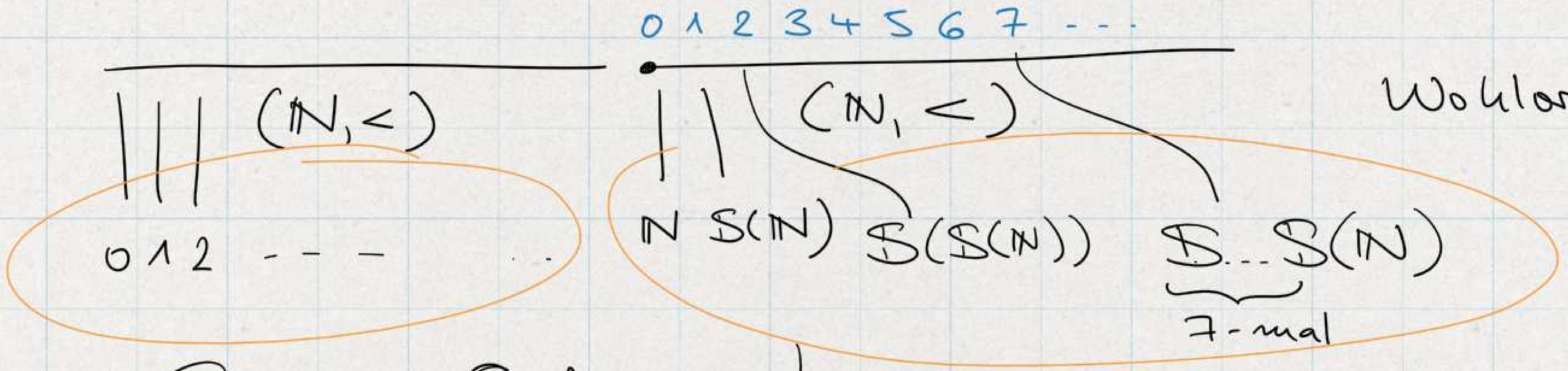
[Wir hatten gesehen, daß $(A, \in)$ Wohlordnung ist.
~~Ebenso~~ besteht $\bigcup A$ aus Ord., also ist auch $(\bigcup A, \in)$ Wohlord.
Also müssen wir zeigen: $\bigcup A$ trs.:

ang. $x \in y \in \bigcup A$

$\longrightarrow \exists z \in A (y \in z)$

$$x \in y \in z \xRightarrow[\text{Trs. von } z]{} x \in z \Longrightarrow x \in \bigcup A.$$]

Transitive Mengen von Ord. z. sind Ord. z.



Wohlordnung

Frage Ex. α Ord. mit

$$(\alpha, \in) \cong (\mathbb{N}, <) \oplus (\mathbb{N}, <) \,?$$

Intuitiv: $\{0, 1, 2, 3, \ldots, \mathbb{N}, S(\mathbb{N}), SS(\mathbb{N}), \ldots\}$

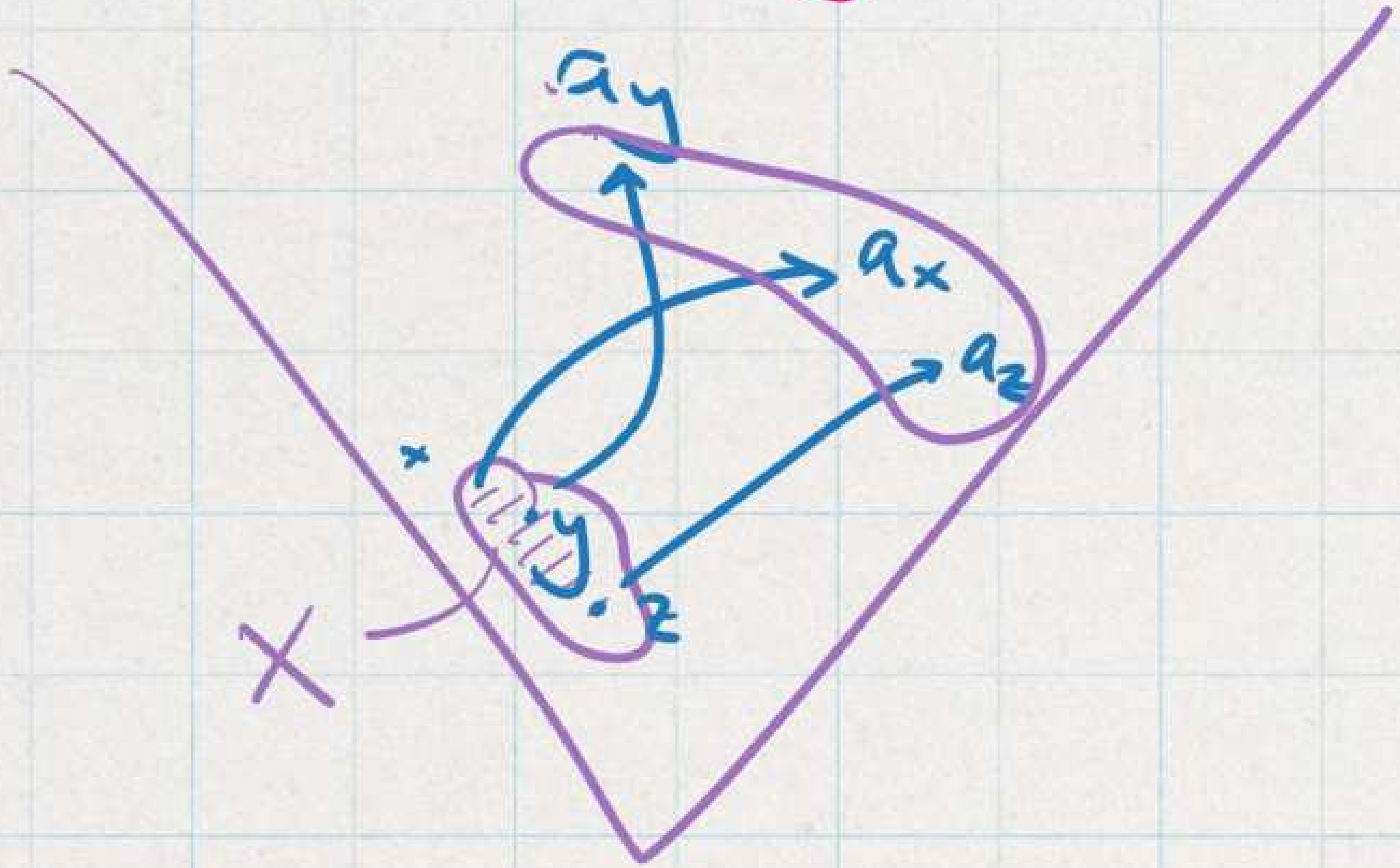
PROBLEM Die Axiome von Z^0 implizieren **nicht** die Existenz einer solchen Menge.

Das allgemeine Mengenbildungsprinzip ist: für jedes $x \in X$ haben wir ein a_x

wir wollen bilden $\{a_x ; x \in X\}$

$X = \{x ; x \in X\}$

Wir ersetzen in X die Elemente von X durch das entsprechende a_x.



n+2 freie Variable

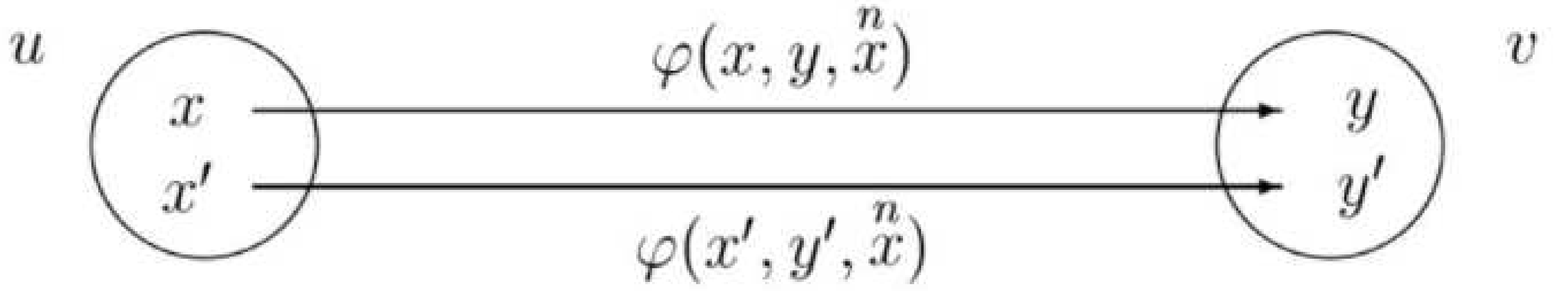
Schema der Ersetzungsaxiome (Ers): Das Schema enthält zu jedem Ausdruck der Gestalt $\varphi(x, y, \overset{n}{x})$ aus der ursprünglichen Mengensprache das Axiom

Für alle $x_1, \ldots, x_n$: Wenn es zu jedem x genau ein y gibt mit $\varphi(x, y, \overset{n}{x})$, so gibt es zu jedem u ein v, das zu jedem $x \in u$ das y mit $\varphi(x, y, \overset{n}{x})$ enthält.

Also:

$$\forall \overset{n}{x} \left(\forall x \, \exists^{=1} y \, \varphi(x, y, \overset{n}{x}) \;\rightarrow\; \forall u \, \exists v \, \forall x y \, \big(x \in u \wedge \varphi(x, y, \overset{n}{x}) \rightarrow y \in v \big) \right).$$

Bildlich:



MERKSATZ

Jede Formel, die sich wie eine Funktion verhält, definiert eine Funktion!

Parameter

$\varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$

FUNKTIONALE FORMEL

für jedes x ex. eindeutig bestimmtes y mit $\varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$

Wenn wir $F(x)$ für das eindeutig bestimmte y mit $\varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$ schreiben, dann nennen wir F eine funktionale Mengenzuweisung.

Zermelo-Fraenkel Axiome (ohne Auswahl & Fundierung)

$$\boxed{ZF^0 = Z^0 + Ers}$$

Theorem **REKURSIONSTHEOREM**

Sei $\mathcal{F}$ eine funktionale Mengenzuweisung (also $\Phi(x,y,x_1,\ldots,x_n)$ mit $\Phi(x,\mathcal{F}(x),x_1,\ldots,x_n)$)

und $\mathcal{W}=(W,<)$ eine Wohlordnung.

Dann ex. eine eindeutige Fkt. H mit $\mathrm{Def}(H)=W$

und f.a. $w\in W$ $\quad H(w)=\mathcal{F}(H\restriction <[w])$.

(42) Sei $\mathfrak{W} := (W, <)$ eine Wohlordnung und Z eine beliebige Menge. Sei $G(\mathfrak{W}, Z)$ die Menge aller Funktionen g mit $\mathrm{Bild}(g) \subseteq Z$, so daß $\mathrm{Def}(g)$ ein echtes Anfangsstück von $\mathfrak{W}$ ist. (Warum ist dies eine Menge?) Sei $F : G(\mathfrak{W}, Z) \to Z$ eine beliebige Funktion.

Beweisen Sie die folgende Version des *Rekursionstheorems*: Es gibt eine eindeutig bestimmte Funktion $H : W \to Z$, so daß für alle $w \in W$ gilt, daß

$$H(w) = F(H{\upharpoonright}{<}[w]).$$

Theorem

$\mathfrak{W} = (W, <)$ Wohlordnung

F Fkt. Mengenzuweisung

Dann ex. H mit $\mathrm{Def}(H) = W$

und $H(w) = F(H{\upharpoonright}{<}[w])$.

STRUKTUR von Beweisen von Rekursionssätzen:

$H \subseteq W \times Z$

$H := \{(w, z) \in W \times Z \,;\, \Phi(w, z)\}$

$\Phi(w, z) \;:\Longleftrightarrow\; \exists g \quad g$ ist ein Keim und $w \in \mathrm{Def}(g)$ und $g(w) = z$

Zu zeigen: $\mathrm{Def}(H) = W$

H ist funktional.

Im Beweis des Theorems (im Gegensatz zu (42)) fehlt uns die Menge Z.

Da $\Phi(w,z)$ als funktional nachgewiesen war, können wir nun Ers auf Φ und W anwenden und erhalten eine Menge Z mit $\forall w \in W \, \forall z \left(\Phi(w,z) \longrightarrow z \in Z \right)$.

Somit kann nun Aus auf Φ und $W \times Z$ angewandt werden:

$$H := \left\{ (w,z) \in W \times Z ; \, \Phi(w,z) \right\}.$$

q.e.d

Finde α mit

$$(\alpha, \in) \cong \underbrace{(\mathbb{N}, <)}_{0\ 1\ 2\ 3\ \ldots} \oplus \underbrace{(\mathbb{N}, <)}_{\mathbb{N},\ S(\mathbb{N}),\ SS(\mathbb{N}),\ \ldots}.$$

$\Phi(x, y) :\Longleftrightarrow (x = \emptyset \wedge y = \mathbb{N})$

$\vee$ (x ist Folge der Länge $n+1$:

$x = (x_0, \ldots, x_n) \wedge$

$y = S(x_n)$)

$\vee$ (x ist etwas anderes

$\wedge\ y = \emptyset$)

funktionale Mengenzuordnung

Schreibe $F(x)$ für y mit $\Phi(x, y)$.

<u>REKURSIONSSATZ</u> H mit $\mathrm{Def}(H) = \mathbb{N}$ und $H(n) = F(H \upharpoonright n)$

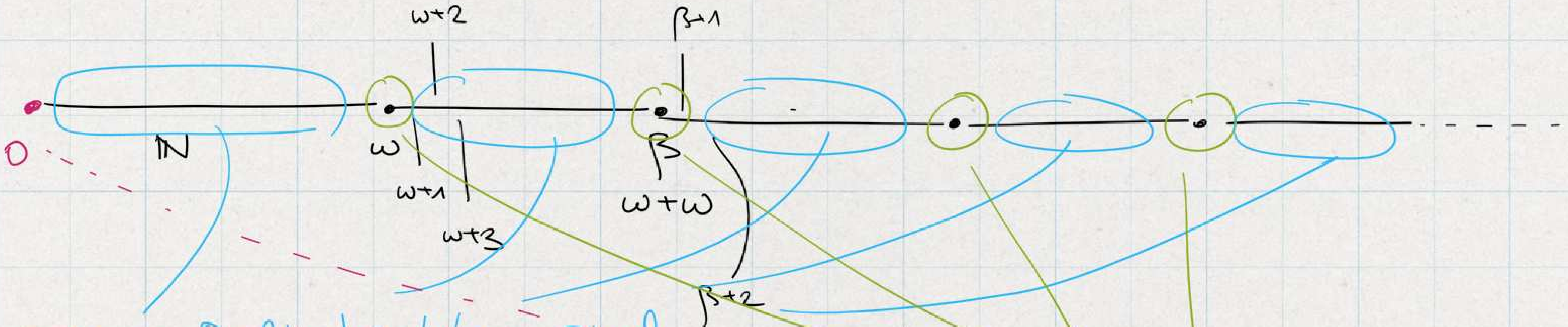
$H \quad \mathrm{Def}(H) = \mathbb{N}$

$$\left[\begin{array}{l} H(0) = \mathbb{N} \\ H(n+1) = \mathcal{S}(H(n)) \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} H'(0) := \beta \\ H'(n+1) := \mathcal{S}(H'(n)) \end{array}\right.$$

$\mathcal{B} := \mathrm{Bild}(H)$ ist eine Menge von Ord.z.

Somit ist $\beta := \bigcup \mathcal{B}$ eine Ordinalzahl, die genau die Elemente $0, 1, 2, \ldots$ und die Elt. $H(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ enthält.

$$(\beta, \in) \cong (\mathbb{N}, <) \oplus (\mathbb{N}, <).$$



Diese Ordinalzahlen sind $S(\alpha)$ für ein α.

$\iff$ haben ein größtes Element

α ist das größte Elt von $S(\alpha)$

NACHFOLGERZAHLEN

Nicht Nachfolger von irgendetwas.

$\iff$ haben kein größtes Element

NICHTNACHFOLGER $\overset{?}{=}$ LIMESZAHL

Manchmal nimmt man die Null NICHT als Limes

Übliche Formulierung der TRANSFINITEN INDUKTION

Sei λ eine Ord.z. $A \subseteq \lambda$ mit

1. $0 \in A$
2. falls $\alpha \in A$, so $\mathbb{S}(\alpha) \in A$
3. falls $\delta < \lambda$ eine Limeszahl ist und $<[\delta] \subseteq A$, so $\delta \in A$

Dann $A = \lambda$.

Ebenso: TRANSFINITE REKURSION

Übungsblatt #9

(48) Es sei X eine Menge und F eine funktionale Mengenzuordnung, also eine Formel in zwei freien Variablen Φ, so daß für alle Mengen x eine eindeutige Menge $F(x)$ existiert mit $\Phi(x, F(x))$. Dann schreiben wir $\#(X, F)$ für die folgenden *Rekursionsgleichungen*:

$$\begin{aligned} ① \quad H(0) &= X; \\ ② \quad H(\alpha+1) &= F(H(\alpha)); \\ ③ \quad H(\lambda) &= F(H \restriction \lambda) \qquad \text{falls } \lambda \text{ Limeszahl ist.} \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Für jede Ordinalzahl μ gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion H_μ mit $\mathrm{Def}(H_\mu) = \mu$, welche $\#(X, F)$ auf ihrem Definitionsbereich erfüllt.

(b) Falls $\nu < \mu$, so ist $H_\mu \restriction \nu = H_\nu$.

Bsp. Ordinalzahlarithmetik

α Ord.

$$\boxed{\begin{aligned} ① \quad \alpha + 0 &:= \alpha \\ ② \quad \alpha + S(\beta) &:= S(\alpha+\beta) \end{aligned}}$$

GRASSMANN Gleichungen auf $\mathbb{N}$

$$③ \quad \alpha + \delta := \bigcup \underbrace{\{\alpha + \xi;\ \xi < \delta\}}$$

δ Limeszahl

(1) $\alpha + 0 := \alpha$

(2) $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$

(3) $\alpha + \delta = \bigcup \{\alpha + \xi ; \xi < \delta\}$

$\alpha \cdot 0 := 0$

$\alpha \cdot S(\beta) := \alpha \cdot \beta + \alpha$

$\alpha \cdot \delta := \bigcup \{\alpha \cdot \xi ; \xi < \delta\}$

Falls $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, so sind $+$ und $\cdot$ einfach die herkömmlichen Operationen auf $\mathbb{N}$. Was sind z.B. $\omega = \mathbb{N}$ verknüpft mit $n \in \mathbb{N}$.

$\omega + 0 \overset{1}{=} \omega$ nach Def.

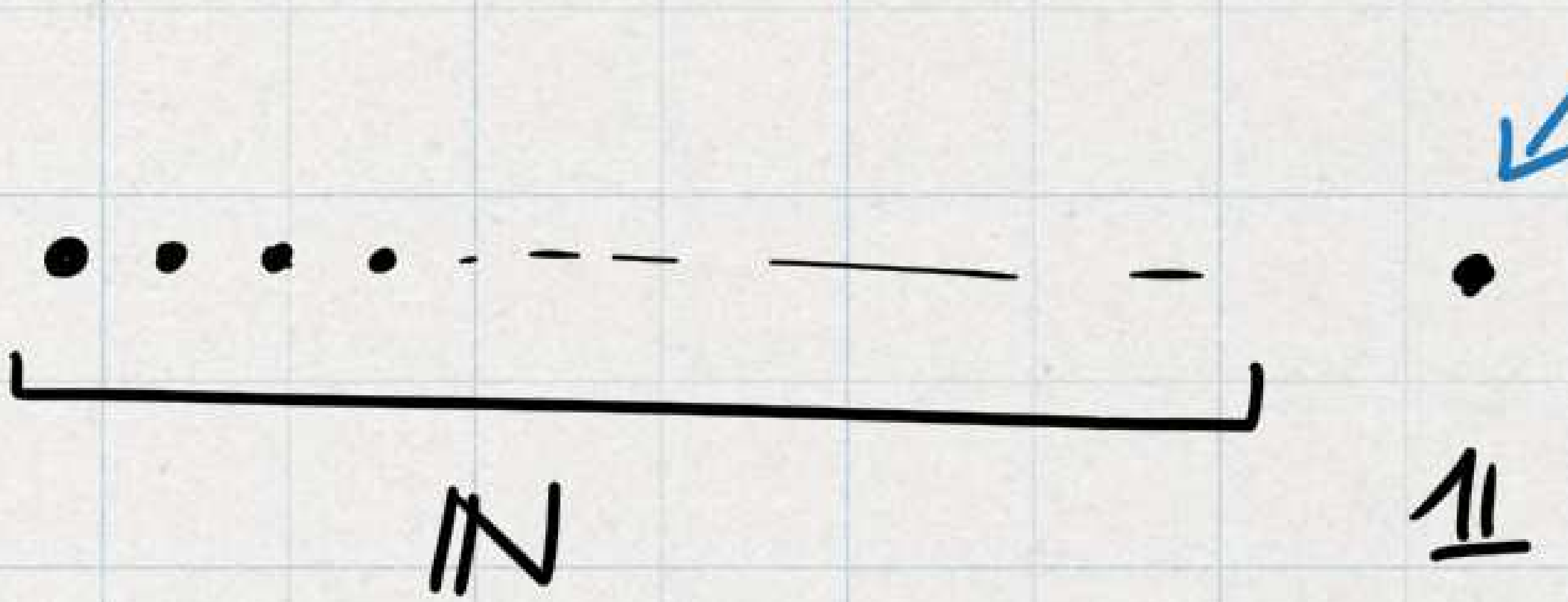
$\omega + 1 = \omega + S(0) \overset{2}{=} S(\omega + 0) = S(\omega) = \omega \cup \{\omega\}$

$\omega + 2 = \omega + S(1) = S(\omega + 1) = \omega \cup \{\omega\} \cup \{\omega \cup \{\omega\}\}$

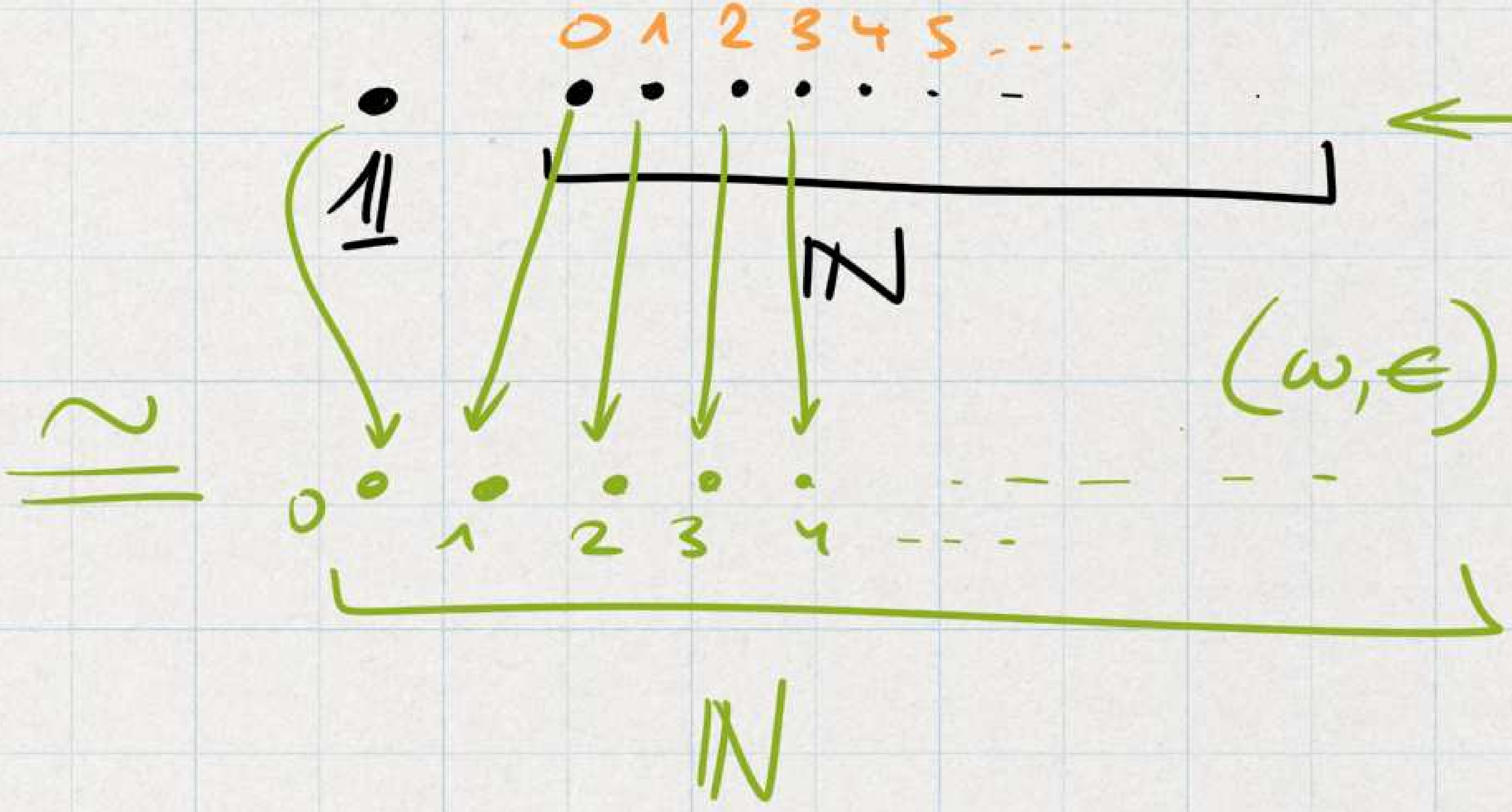
$$\omega+0 = \omega$$
$$\omega+1 = S(\omega) > \omega$$
$$\omega+2 = S(\omega+1) > \omega+1$$

$$1+\omega \overset{3}{=} \bigcup\{1+\xi ; \xi<\omega\}$$
$$= \bigcup \underbrace{\{1+\xi ; \xi\in\mathbb{N}\}}_{\substack{\neq \mathbb{N} \\ = \{n\in\mathbb{N} ; n\neq 0\}}}$$
$$= \mathbb{N} = \omega. \neq \omega+1 > \omega.$$

$$0+\omega$$
$$\overset{3}{=} \bigcup\{0+\xi ; \xi<\omega\}$$
$$= \bigcup\{0+\xi ; \xi\in\mathbb{N}\}$$
$$= \bigcup\underbrace{\{\xi ; \xi\in\mathbb{N}\}}_{\mathbb{N}}$$
$$= \bigcup\mathbb{N} = \mathbb{N} = \omega.$$



hat größtes Elt.



hat kein größtes Element.

$$
\begin{aligned}
(\omega, \in) &\cong (\mathbb{1}, <) \oplus (\mathbb{N}, <) \\
&\cong (\mathbb{N}, <) \\
&\not\cong (\mathbb{N}, <) \oplus (\mathbb{1}, <) \\
&\cong (\omega + 1, \in)
\end{aligned}
$$

Genauso: $2+\omega=\omega$

$3+\omega=\omega$

$4+\omega=\omega$

$\omega+\omega\neq\omega$

$\cong$

$(\mathbb{N},<)\oplus(\mathbb{N},<)$

$0\cdot\omega \overset{3}{=} \bigcup\{0\cdot n \,;\, n\in\mathbb{N}\}$

$= 0$

$1\cdot\omega = \bigcup\{1\cdot n \,;\, n\in\mathbb{N}\}$

$= \mathbb{N} = \omega.$

$\underline{2\cdot\omega} = \bigcup\{2\cdot n \,;\, n\in\mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$

$= \mathbb{N} = \underline{\omega.} \ \underline{\neq \omega\cdot 2}.$

MULTIPLIKATION

$\omega\cdot 0 \overset{1}{=} 0$

$\omega\cdot 1 = \omega\cdot S(0)$

$\overset{2}{=} \omega\cdot 0+\omega$

$= 0+\omega = \omega.$

$\underline{\omega\cdot 2 = \omega\cdot S(1)}$

$= \omega\cdot 1 + \omega$

$= \underline{\omega+\omega.}$

$2\otimes\mathbb{N} \cong \mathbb{N}$

$\mathbb{N}\otimes 2 \not\cong \mathbb{N}$