Mathematische Logik & Mengenlehre

XXII

4.2.2 Voraussetzungsregel (Vor) $\times$

$$\frac{}{\Gamma \quad \varphi}\ ,\ \textit{falls } \varphi \textit{ ein Glied von } \Gamma \textit{ ist.}$$

4.2.1 Antezedensregel (Ant) $\times$

$$\frac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma' \quad \varphi}\ ,\ \textit{falls jedes Glied von } \Gamma \textit{ ein Glied von } \Gamma' \textit{ ist}$$

(kurz: falls $\Gamma \subseteq \Gamma'$).

4.2.4 Widerspruchsregel (Wid)

$$\begin{array}{lll} \Gamma & \neg\varphi & \psi \\ \Gamma & \neg\varphi & \neg\psi \\ \hline \Gamma & & \varphi \end{array}$$

4.2.3 Fallunterscheidungsregel (FU)

$$\begin{array}{lll} \Gamma & \psi & \varphi \\ \Gamma & \neg\psi & \varphi \\ \hline \Gamma & & \varphi \end{array}$$

Hatten:

"abgeleitete Regeln"

"Beweisen" vs "Widerlegen"

φ ist beweisbar ⟵ BEWEIS

φ ist nicht beweisbar ⟵ ?

Alle Folgen von Formeln sind kein Beweis

BRAUCHT einen präzisen Beweisbegriff.

EINFACHES BSP.

Sei $\mathfrak{K}$ der Kalkül, der nur die Regeln (Vor) und (Aut) hat. Dann gilt:

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \iff \varphi \in \Phi$$

für jede Formelmenge Φ & Fml φ.

"$\Longleftarrow$": Wenn $\varphi \in \Phi$, dann ist $\varphi\varphi$ eine Sequenz wie in (Vor). Also ist die Folge S_1 mit $S_1 = \varphi\varphi$ eine Ableitung in $\mathfrak{K}$. und somit $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$.

"$\Longrightarrow$": Sei $S_1 \dots S_n$ eine $\mathfrak{K}$-Ableitung mit $S_n = \Gamma\varphi$ mit $T_\Gamma \subseteq \Phi$. Da $\mathfrak{K}$ lediglich eine 0-st. und eine 1-st. Regel hat, existiert ein Pfad $S_{i_0} \dots S_{i_k} = S_n$ durch die Ableitung:

4.2.2 Voraussetzungsregel (Vor)

$$\frac{}{\Gamma \quad \varphi}\text{, } \textit{falls } \varphi \textit{ ein Glied von } \Gamma \textit{ ist.}$$

... ein Pfad

$S_{i_0}, \ldots, S_{i_k}$ mit $S_{i_k} = S_n = \Gamma\varphi$

und $\dfrac{\cdot}{S_{i_0}}$ ist Instanz von (Vor) $\dfrac{S_{i_\ell}}{S_{i_{\ell+1}}}$ ist Instanz von (Ant)

$\Downarrow$

$S_0 = \Gamma_0\, \varphi$

$\Gamma_0 \subseteq \Gamma.$

Da S_{i_0} Ergebnis von (Vor) ist gilt $\varphi \in \Gamma_{\Gamma_0}$.

$\Longrightarrow \varphi \in \Gamma_{\Gamma} \subseteq \Phi$

$\underline{\text{für alle } \ell}$ $S_{i_\ell} = \Gamma_\ell\, \varphi$ für $\Gamma_\ell \subseteq \Gamma.$

$S_{i_k} = S_n = \Gamma\varphi$

Bsp. $\varphi \neq \psi$

$\{\varphi\} \not\vdash_k \psi.$

4.2.1 Antezedensregel (Ant)

$$\frac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma' \quad \varphi}$$, *falls jedes Glied von* Γ *ein Glied von* Γ' *ist* (*kurz: falls* $\Gamma \subseteq \Gamma'$).

Bsp. $\emptyset \not\vdash_k \varphi$

für irgendein φ

4.2.2 Voraussetzungsregel (Vor)

$$\frac{}{\Gamma \quad \varphi}$$, *falls* φ *ein Glied von* Γ *ist.*

Wir hatten

$$\Phi \vdash_{\tilde{k}} \varphi \Longleftrightarrow \varphi \in \Phi$$

D.h. $\{(\varphi \wedge \psi)\} \nvdash_{\tilde{k}} (\psi \wedge \varphi)$ [da $(\psi \wedge \varphi) \notin \{(\varphi \wedge \psi)\}$].

Wir fahren fort mit den Regeln:

4.2.5 Regel der ∨-Einführung im Antezedens (∨A)

$$\begin{array}{lll} \Gamma & \varphi & \chi \\ \Gamma & \psi & \chi \\ \hline \Gamma & (\varphi \vee \psi) & \chi \end{array}$$

2-stellige Regel!

Ang. $\mathfrak{I}$ sei Int. mit $\mathfrak{I} \models \Gamma$ und $\mathfrak{I} \models (\varphi \vee \psi)$

Fall 1 $\mathfrak{I} \models \varphi$. $\Longrightarrow$ $\mathfrak{I} \models \chi$

Fall 2 $\mathfrak{I} \models \psi$ $\Longrightarrow$ $\mathfrak{I} \models \chi$

Korrektheit

Ang. $\Gamma \varphi \chi$ und $\Gamma \psi \chi$ sind korrekt,

d.h. f.a. $\mathfrak{I}$: $\mathfrak{I} \models \Gamma$ und $\mathfrak{I} \models \varphi$, dann $\mathfrak{I} \models \chi$

und $\mathfrak{I} \models \Gamma$ und $\mathfrak{I} \models \psi$, dann $\mathfrak{I} \models \chi$.

In beiden Fällen $\mathfrak{I} \models \chi$.

4.2.6 Regeln der $\vee$-Einführung im Sukzedens ($\vee$S)

(a) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad (\varphi \vee \psi)}$ (b) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad (\psi \vee \varphi)}$

[Korrektheit (nur (a), (b) ist symmetrisch)

Ang. für alle $\mathfrak{I}$: $\mathfrak{I} \models \Gamma$, so $\mathfrak{I} \models \varphi$.

$\Longrightarrow \mathfrak{I} \models (\varphi \vee \psi)$.]

4.4.3 Regel der Reflexivität der Gleichheit ($\equiv$)

0-stellige Regel

$$\overline{\quad t \equiv t \quad}$$

[Korrektheit: $\mathfrak{I}$ beliebig, dann $\mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}(t) \Longrightarrow \mathfrak{I} \models t \equiv t$.]

4.4.4 Substitutionsregel für die Gleichheit (Sub)

1-stellige Regel

$$\frac{\Gamma \qquad\qquad \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \quad t \equiv t' \quad \varphi\frac{t'}{x}}$$

(Korrektheit $\longrightarrow$ nächste Seite)

4.4.3 Regel der Reflexivität der Gleichheit $(\equiv)$

$$\frac{}{t \equiv t}$$

4.4.4 Substitutionsregel für die Gleichheit (Sub)

$$\frac{\Gamma \qquad \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \quad t \equiv t' \quad \varphi\frac{t'}{x}}$$

3.8.3 Substitutionslemma (a) *Für alle Terme t:*

$$\mathfrak{I}\left(t\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}\right) = \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)\ldots\mathfrak{I}(t_r)}{x_0\ldots x_r}(t).$$

(b) *Für alle Ausdrücke* φ:

$$\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} \quad gdw \quad \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)\ldots\mathfrak{I}(t_r)}{x_0\ldots x_r} \models \varphi.$$

Ang. $\mathfrak{I} \models \Gamma$ und $\mathfrak{I} \models t \equiv t'$

$\mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}(t')$

$\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t}{x}$

$$\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t)}{x} \models \varphi \longrightarrow \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t')}{x} \models \varphi \xRightarrow[\text{Lemma}]{\text{Substit.}} \mathfrak{I} \models \varphi\frac{t'}{x}.$$

Also korrekt!

Vor
Aut
FU] $\neg$
Wid
$\vee$A] $\vee$
$\vee$S
$\equiv$] At.
Sub
?] $\exists$

4.4.1 Regel der ∃-Einführung im Sukzedens (∃S)

$$\frac{\Gamma \quad \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \quad \exists x\varphi}$$

<u>Korrektheit</u> $\mathfrak{I} \models \Gamma$. Nach Vor. gilt $\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t}{x}$

Nach Substitutionslemma:

$$\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t)}{x} \models \varphi$$

$\Rightarrow$ es ex. a (nämlich $a := \mathfrak{I}(t)$) mit

$$\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$$

$$\Rightarrow \mathfrak{I} \models \exists x \varphi.$$

4.4.2 Regel der ∃-Einführung im Antezedens (∃A)

$$\frac{\Gamma \quad \varphi\frac{y}{x} \quad \psi}{\Gamma \quad \exists x\varphi \quad \psi}\ , \quad \textit{falls } y \textit{ nicht frei in } \Gamma\ \exists x\varphi\ \psi.$$

3.4.6 Koinzidenzlemma *Es sei $\mathfrak{I}_1 = (\mathfrak{A}_1, \beta_1)$ eine S_1-Interpretation und $\mathfrak{I}_2 = (\mathfrak{A}_2, \beta_2)$ eine S_2-Interpretation, beide über demselben Träger $A_1 = A_2$. Ferner sei $S := S_1 \cap S_2$.*

(a) *Sei t ein S-Term. Wenn $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ für die in t auftretenden Symbole aus S und die in t auftretenden Variablen übereinstimmen*[3]*, so ist $\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_2(t)$.*

(b) *Sei φ ein S-Ausdruck. Wenn $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ für die in φ auftretenden Symbole aus S und die in φ frei auftretenden Variablen übereinstimmen, so gilt: $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ gdw $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$.*

3.8.3 Substitutionslemma (a) *Für alle Terme t:*

$$\mathfrak{I}\left(t\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r}\right) = \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0) \dots \mathfrak{I}(t_r)}{x_0 \dots x_r}(t).$$

(b) *Für alle Ausdrücke φ:*

$$\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} \quad gdw \quad \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0) \dots \mathfrak{I}(t_r)}{x_0 \dots x_r} \models \varphi.$$

Korrektheit

$\Gamma\ \varphi\frac{y}{x} \models \psi \qquad y \notin \mathrm{frei}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$

$\mathfrak{I} \models \Gamma$ und $\mathfrak{I} \models \exists x\varphi$.

$\Rightarrow \mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \Gamma \qquad$ es ex. a mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$.

Bch. $\left(\mathfrak{I}\frac{a}{y}\right)\frac{a}{x} \models \varphi$.

$\mathfrak{I}\frac{a}{y}(y) = a$

[Fall 1. $x = y$. $\left(\mathfrak{I}\frac{a}{y}\right)\frac{a}{x} = \left(\mathfrak{I}\frac{a}{x}\right)\frac{a}{x} = \mathfrak{I}\frac{a}{x}$. ✓

Fall 2 $x \neq y$. $\Longrightarrow y \notin \mathrm{frei}(\varphi)$

Nach Koinzidenzl. gilt $\left(\mathfrak{I}\frac{a}{y}\right)\frac{a}{x} \models \varphi \Longleftrightarrow \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$.]

$\left(\mathfrak{I}\frac{a}{y}\right)\frac{\mathfrak{I}\frac{a}{y}(y)}{x} \models \varphi \Longrightarrow \mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \varphi\frac{y}{x} \Longrightarrow \mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \psi.$

$\xrightarrow[\text{Koinz.}]{y \notin \mathrm{frei}(\psi)} \mathfrak{I} \models \psi.$

$\mathfrak{K}_{\text{GENTZEN}}$

Der Gentzenkalkül besteht aus

Ant, Vor, Fu, Wid, $\vee$A, $\vee$S, $\exists$A, $\exists$S, $\equiv$, Sub

Wir haben bereits bewiesen, daß alle Regeln korrekt sind.

(Korrektheitssatz)

KOROLLAR

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_{\text{Gentzen}}} \varphi \implies \Phi \models \varphi.$$

Das bedeutet, daß ich statt eine Aussage für beliebige Gruppen/Körper/Graphen zu zeigen auch einfach einen Beweis aus den Axiomen angeben kann.

SYNTAX | KORREKTHEIT $\Longrightarrow$ | SEMANTIK

$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_{\text{GENTZEN}}} \varphi$

es ex. eine endliche Kette $S_1 \dots S_n$ mit $S_n = \Gamma\varphi$, $T_\Gamma \subseteq \Phi$ und die Kette ist $\mathfrak{K}_{\text{GENTZEN}}$-Ableitung

$\Phi \models \varphi$

für jede Interpr. $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I} \models \Phi$ gilt $\mathfrak{I} \models \varphi$.

METHODE DES GEGENBEISPIELS.

$\Longleftarrow$ VOLLSTÄNDIGKEIT

$\Phi \nvdash_{\mathfrak{K}_{\text{GENTZEN}}} \varphi$

für alle Beweise ...

$\Phi \not\models \varphi$

es ex. Int $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I} \models \Phi$ aber $\mathfrak{I} \not\models \varphi$

5.4.1 Der Vollständigkeitssatz *Für $\Phi \subseteq L^S$ und $\varphi \in L^S$ gilt:*

$$\text{Wenn } \Phi \models \varphi, \text{ so } \Phi \vdash_S \varphi.$$

Dieser Satz wird in Vorlesung XXIII bewiesen.

5.4.2 Satz über die Adäquatheit des Sequenzenkalküls

(a) $\boxed{\Phi \models \varphi \quad gdw \quad \Phi \vdash \varphi.}$

(b) Erf Φ *gdw* Wf Φ.

Bem. Unser Kalkülbegriff ist so flexibel, daß die Existenz von vollständigen Kalkülen nicht überraschend ist.

[Dummes Beispiel: Kalkül $\mathcal{D} = \{R\}$ R ist 0-stellige Regel

$$\frac{}{\Gamma \ \varphi} \quad \text{gdw } \Gamma \models \varphi$$

Dann gilt: $\Phi \vdash_{\mathcal{D}} \varphi \iff$ es ex. eine endliche TM $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \models \varphi$.

Dieser Kalkül ist nicht ENTSCHEIDBAR: ich kann nicht durch eine Maschine überprüfen, ob eine Kette von Seq. ein Beweis ist

[KAPITEL 10 EFT]

Vollst. $\Phi \vdash \varphi \Longleftarrow \Phi \models \varphi$.

Erinnerung: $\Phi \vdash \varphi \Longleftrightarrow$ es ex. $\Phi_0 \subseteq \Phi$ endlich so dass $\Phi_0 \vdash \varphi$.

$$\begin{array}{ccc} \Phi \vdash \varphi & \Longleftrightarrow & \Phi \models \varphi \\ \Updownarrow & & \\ \exists \Phi_0 \subseteq \Phi \text{ endl. } \Phi_0 \vdash \varphi & \Longleftrightarrow & \exists \Phi_0 \subseteq \Phi \text{ endl. } \Phi_0 \models \varphi \end{array}$$

6.2.1 Endlichkeitssatz (a) (*für die Folgerungsbeziehung*)

$\Phi \models \varphi$ *gdw es gibt ein endliches* $\Phi_0 \subseteq \Phi$ *mit* $\Phi_0 \models \varphi$.

(b) (*für die Erfüllbarkeit*)

Erf Φ *gdw für alle endlichen* $\Phi_0 \subseteq \Phi$ *gilt* Erf Φ_0.

Man nennt den Endlichkeitssatz häufig auch *Kompaktheitssatz*, weil er nach geeigneter topologischer Umformulierung besagt, dass eine gewisse Topologie kompakt ist (vgl. Aufgabe 6.2.5).

6.2.5 Aufgabe Sei S eine Symbolmenge. Zu jeder erfüllbaren Menge Φ von S-Sätzen sei $\mathfrak{A}_\Phi$ eine S-Struktur mit $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Ferner sei $\Sigma := \{\mathfrak{A}_\Phi \mid \Phi \subseteq L_0^S, \text{Erf } \Phi\}$. Für jeden S-Satz φ setze man $X_\varphi := \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

(a) Man zeige, dass das System $\{X_\varphi \mid \varphi \in L_0^S\}$ die Basis einer Topologie auf Σ bildet.

(b) Man zeige, dass jede Menge X_φ abgeschlossen ist.

(c) Man zeige mit dem Endlichkeitssatz, dass jede offene Überdeckung von Σ eine endliche Teilüberdeckung enthält. Σ ist somit (quasi-) kompakt.

Anwendungen des Kompaktheitssatzes

6.2.1 Endlichkeitssatz (a) *(für die Folgerungsbeziehung)*

$\Phi \models \varphi$ *gdw es gibt ein endliches* $\Phi_0 \subseteq \Phi$ *mit* $\Phi_0 \models \varphi$.

(b) *(für die Erfüllbarkeit)*

Erf Φ *gdw für alle endlichen* $\Phi_0 \subseteq \Phi$ *gilt* Erf Φ_0.

Man nennt den Endlichkeitssatz häufig auch *Kompaktheitssatz*, weil er nach geeigneter topologischer Umformulierung besagt, dass eine gewisse Topologie kompakt ist (vgl. Aufgabe 6.2.5).

6.2.2 Satz *Es sei* Φ *eine Ausdrucksmenge, die über beliebig großen endlichen Mengen erfüllbar ist (d.h., zu jedem* $n \in \mathbb{N}$ *gebe es eine* Φ *erfüllende Interpretation über einer endlichen Menge, die mindestens* n *Elemente enthält). Dann ist* Φ *auch über einer unendlichen Menge erfüllbar.*

Beweis: Wir erinnern uns an die Formeln $\varphi_{\geq n}$ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{\geq n} \iff |A| \geq n.$$

$\Psi := \{\varphi_{\geq n} ; n \in \mathbb{N}\}$. Betrachte $\Phi \cup \Psi$.

Offensichtlich: $\mathfrak{A} \models \Psi$, so ist A unendlich.

Es reicht also zu zeigen, daß es ein $\mathfrak{A}$ gibt, welches $\mathfrak{A} \models \Phi \cup \Psi$ erfüllt.

Nach dem Endlichkeitssatz reicht es aus, zu zeigen, daß jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi \cup \Psi$ ein Modell hat.

6.2.2 Satz *Es sei Φ eine Ausdrucksmenge, die über beliebig großen endlichen Mengen erfüllbar ist (d.h., zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gebe es eine Φ erfüllende Interpretation über einer endlichen Menge, die mindestens n Elemente enthält). Dann ist Φ auch über einer unendlichen Menge erfüllbar.*

Reduziert auf: falls $\Phi_0 \subseteq \Phi \cup \Psi$ endlich, so hat Φ_0 ein Modell.

$\Phi_0 \subseteq \Phi \cup \Psi$

Da Φ_0 endlich, ex. $\varphi_{\geq i_0}, \dots, \varphi_{\geq i_k}$, so daß

$$\Phi_0 \subseteq \Phi \cup \{\varphi_{\geq i_0}, \dots, \varphi_{\geq i_k}\}.$$

Sei $K := \max\{i_0, \dots, i_k\}$.

Nach Vor. ex. $\mathfrak{A}_K \models \Phi \cup \{\varphi_{\geq K}\}$

$$\Longrightarrow \mathfrak{A}_K \models \Phi \cup \{\varphi_{\geq i_0}, \dots, \varphi_{\geq i_k}\} \Longrightarrow \mathfrak{A}_K \models \Phi_0.$$

q.e.d.

Korollar Es kann keine Axiomatisierung der endlichen Gruppen geben.

Ein Φ, so daß $\mathfrak{A} \models \Phi \iff \mathfrak{A}$ ist endliche Gruppen

z.B. $A_{Gr} = \{\varphi_A, \varphi_{NI}\}$

$\mathfrak{A} \models A_{Gr} \iff \mathfrak{A}$ ist Gruppe

Beweis Ang. Φ sei so, daß

$\mathfrak{A} \models \underbrace{A_{Gr} \cup \Phi} \iff \mathfrak{A}$ ist endliche Gruppe

Sei z.B. $\mathfrak{A}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dies ist eine Gruppe mit n Elementen. Insbesondre endlich:

$\mathfrak{A}_n \models A_{Gr} \cup \Phi$

Daher hat $A_{Gr} \cup \Phi$ beliebig große endl. Modelle und somit nach 6.2.2. ein unendliches Modell $\mathfrak{A}$

$\mathfrak{A} \models A_{Gr} \cup \Phi$

WIDERSPRUCH!

In diesem Korollar spielen "Gruppen" keine Rolle: jede Klasse von Strukturen, für die es beliebig große endliche Bsp. gibt funktioniert:

(1) keine Axiomatisierung der endliche Körper

(2) —"— endlichen Graphen

(3) —"— endlichen Ringe

usw. usf.

Für eine Menge Φ von S-Sätzen sei

$$\mathrm{Mod}^S\Phi := \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}\ S\text{-Struktur und } \mathfrak{A} \models \Phi\}$$

die *Modellklasse* von Φ. Statt $\mathrm{Mod}^S\{\varphi\}$ schreiben wir auch $\mathrm{Mod}^S\varphi$.

6.3.1 Definition Sei $\mathfrak{K}$ eine Klasse von S-Strukturen.

(a) $\mathfrak{K}$ heißt *elementar* :gdw es gibt einen S-Satz φ mit $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}^S\varphi$. ENDLICH AXIOMATISIERBAR

(b) $\mathfrak{K}$ heißt Δ-*elementar* :gdw es gibt eine Menge Φ von S-Sätzen mit $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}^S\Phi$. AXIOMATISIERBAR