MLML XXIII

KLAUSUR
27.7.2020 14-16
HS H1 [Moodle wird voraussichtlich eine Musterklausur haben.]

5.4.1 Der Vollständigkeitssatz *Für $\Phi \subseteq L^S$ und $\varphi \in L^S$ gilt:*

$$\text{Wenn } \Phi \models \varphi, \text{ so } \Phi \vdash_S \varphi.$$

5.4.2 Satz über die Adäquatheit des Sequenzenkalküls
(a) $\Phi \models \varphi$ *gdw* $\Phi \vdash \varphi$.
(b) Erf Φ *gdw* Wf Φ.

6.2.1 Endlichkeitssatz (a) *(für die Folgerungsbeziehung)*

$\Phi \models \varphi$ *gdw es gibt ein endliches* $\Phi_0 \subseteq \Phi$ *mit* $\Phi_0 \models \varphi$.

(b) *(für die Erfüllbarkeit)*

Erf Φ *gdw für alle endlichen* $\Phi_0 \subseteq \Phi$ *gilt* Erf Φ_0.

Man nennt den Endlichkeitssatz häufig auch *Kompaktheitssatz*, weil er nach geeigneter topologischer Umformulierung besagt, dass eine gewisse Topologie kompakt ist (vgl. Aufgabe 6.2.5).

$\Longrightarrow$ Nichtaxiomatisierbarkeit der Klasse der
- endlichen Gruppen
- endlichen Körper
- endlichen Ringe
- endlichen Graphen
- endlichen X

6.2.2 Satz *Es sei Φ eine Ausdrucksmenge, die über beliebig großen endlichen Mengen erfüllbar ist (d.h., zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gebe es eine Φ erfüllende Interpretation über einer endlichen Menge, die mindestens n Elemente enthält). Dann ist Φ auch über einer unendlichen Menge erfüllbar.*

Zweites Nichtaxiomatisierbarkeitsbeispiel.

$S = \{+, \cdot, -, 0, 1, <\}$ Sprache der geordneten Körper

$\Phi_K \longleftarrow$ Körperaxiome

$\Phi_{LO} \longleftarrow$ Axiome der linearen Ordnung

$0 < 1$

$1 = 1+0 < 1+1$

$1+1 < 1+1+1$

$1+1+1 < 1+1+1+1$

φ_{M+} $\quad \forall x \forall y \forall z \; x < y \longrightarrow x+z < y+z$

$\varphi_{M\cdot}$ $\quad \forall x \forall y \forall z \; (x < y \wedge z > 0) \longrightarrow x \cdot z < y \cdot z$

$$\Phi_{GK} = \Phi_K \cup \Phi_{LO} \cup \{\varphi_{M+}, \varphi_{M\cdot}\}.$$

Bsp. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, -, 0, 1, <)$

$(\mathbb{R}, +, \cdot, -, 0, 1, <)$

Konsequenzen
$$\left[\begin{array}{l} \forall x \;\; x \cdot x \geq 0 \\ \forall x \;\; (x > 0 \longleftrightarrow -x < 0) \\ 0 < 1 \end{array}\right]$$

$\mathbb{Z}_2$ kann kein geordneter Körper sein:

$1+1=0<1$

$t_0 := 0$

$t_1 := 1$

$t_{n+1} := t_n + 1$

$\Phi_{GK} \models t_n < t_m$ für $n<m$

$[\mathfrak{F} \models \Phi_{GK} \Longrightarrow \mathfrak{F}$ unendlich $]$

Ein geordneter Körper $\mathfrak{K}$ heißt ARCHIMEDISCH falls für jedes $x \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\mathfrak{K} \models x < t_n .$$

Wir wissen, daß $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ archimedisch sind.

Falls $\mathfrak{K}$ nichtarchimedisch ist so ex. x mit

$\mathfrak{K} \models x > t_n$ f.a. n

$\Longrightarrow \mathfrak{K} \models 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{t_n}$ f.a. n

Also ist $\frac{1}{x}$ kleiner als jedes $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, aber $\neq 0$.

INFIMITESIMALES ELEMENT

Bsp. für nichtarchimedische Körper:

- p-adische Zahlen
- $\mathbb{R}(X)$ ⟵ hier bildet z.B. das Polynom X ein unendlich großes Elt.

SATZ Die Klasse der archimedischen geordneten Körper ist nicht axiomatisierbar.

Beweis Ang. es gäbe eine solche Axiomatisierung: Φ

$\mathfrak{K} \models \Phi$ gdw $\mathfrak{K}$ ist ein ar. geord. K.

[OBdA $\Phi_{GK} \subseteq \Phi$]

Füge ein neues Konstantensymbol c zur Sprache S hinzu:

$S^* := S \cup \{c\}$. In L_{S^*}, betrachten wir $\Psi := \{\psi_n ; n \in \mathbb{N}\}$

$$\psi_n := c > t_n$$

Falls $(\mathfrak{K}, x) \models \Phi_{GK} \cup \Psi$, so ist $\mathfrak{K}$ ein nichtarchimedischer geordneter Körper. mit x als "unendlich großem Element".

<u>Ziel</u>: Finde $(\mathfrak{K}, x) \models \Phi \cup \Psi$.

[Dies ist ein Widerspruch, da $(\mathfrak{K}, x) \models \Phi_{GK} \cup \Psi$
$\longrightarrow \mathfrak{K}$ nicht archimedisch
und $\mathfrak{K} \models \Phi$
$\longrightarrow \mathfrak{K}$ archimedisch]

Nach Kompaktheit ist nur zu zeigen, daß jede endliche TM von $\Phi \cup \Psi$ erfüllbar ist.

Sei nun $\Phi_0 \subseteq \Phi \cup \Psi$ endlich.

D.h. $\Phi_0 \subseteq \Phi \cup \{\psi_{i_0}, \dots, \psi_{i_k}\}$ für eine endliche Menge $\{i_0, \dots, i_k\}$.

Sei nun oBdA $i_k = \max(i_0, \dots, i_k)$

$$\psi_{i_k} = c > t_{i_k}$$

$$\mathfrak{K}_0 = (\mathbb{R}, +, \cdot, -, 0, 1, <, i_k + 1) \models \Phi \cup \{\psi_{i_k}\} \Longrightarrow \mathfrak{K}_0 \models \Phi_0$$

$\xRightarrow{\text{KOMPAKTHEIT}}$ ZIEL. q.e.d.

Korollar zum Beweis

Sei $Th(\mathbb{R}) := \{ \varphi \,;\, (\mathbb{R},+,\cdot,-,0,1,<) \models \varphi \}$

THEORIE DER REELLEN ZAHLEN

„alles was in den reellen Zahlen wahr ist"

Dann gilt $\mathfrak{K}_0 = (\mathbb{R},+,\cdot,-,0,1,i+1) \models \Phi_0 \cup Th(\mathbb{R})$

$\mathfrak{K}_i := \quad \boxed{Th(\mathbb{R}) \cup \Phi} = \hat{\Phi}$

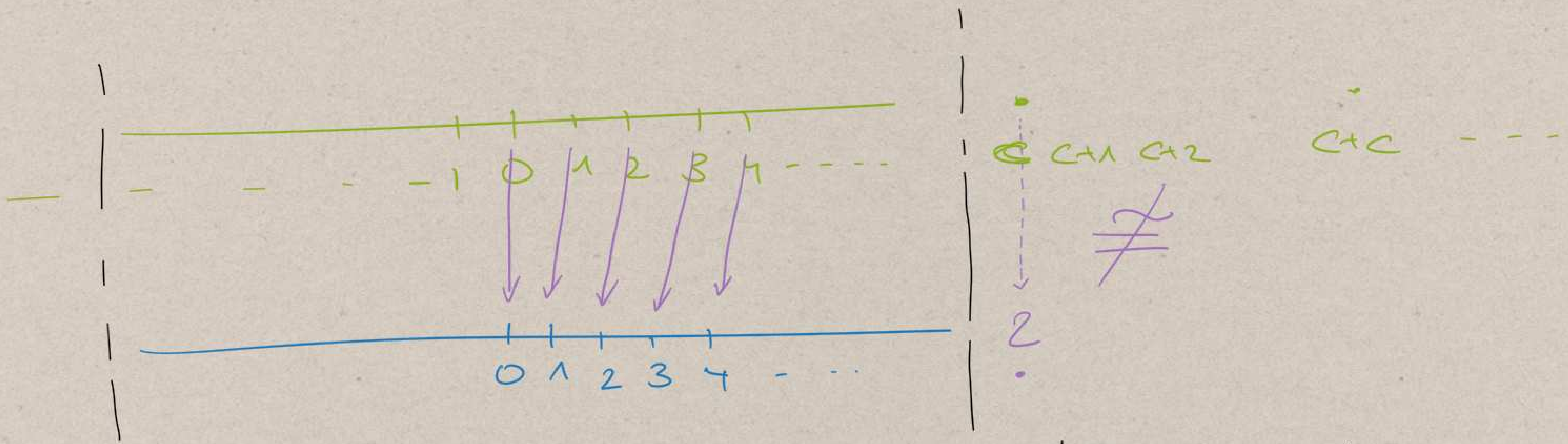
Jede endliche TM von $\hat{\Phi}$ ist erfüllbar

$\xRightarrow[\text{Kompaktheit}]{}$ $\hat{\Phi}$ ist erfüllbar

Falls $\mathfrak{K} \models \hat{\Phi}$, so ist $\mathfrak{K}$ nichtarchimedisch aber $\underline{\mathfrak{K} \models Th(\mathbb{R})}$

$\mathfrak{K} \not\cong \mathbb{R}$

$\mathfrak{K}$ ist elementar äquivalent zu $\mathbb{R}$



Dies gibt uns ein Bsp. eines Körpers, der elementar äquivalent zu $\mathbb{R}$ ist, aber nicht isomorph.

DER VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ

5.4.1 Der Vollständigkeitssatz *Für $\Phi \subseteq L^S$ und $\varphi \in L^S$ gilt:*

$$\textit{Wenn } \Phi \models \varphi, \textit{ so } \Phi \vdash_S \varphi.$$

5.4.2 Satz über die Adäquatheit des Sequenzenkalküls
(a) $\Phi \models \varphi$ *gdw* $\Phi \vdash \varphi$.
(b) Erf Φ *gdw* Wf Φ.

$\Longleftarrow$ Falls Φ widerspruchsfrei, so ist Φ erfüllbar.

[Für Widerspruch nehmen wir an:

(*) $\Phi \models \varphi$, aber $\Phi \not\vdash \varphi$

$\Downarrow$

$\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ ist widerspruchsfrei

$\Downarrow$ Ann.

$\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ ist erfüllbar.

$\lightning$ zu (*).]

WIR WERDEN ZEIGEN:

Φ widerspruchsfrei

$\Longrightarrow$ ex. $\mathfrak{I} \models \Phi$.

Beweis nach Leon HENKIN (aus den 50 ger Jahren)

SLOGAN: Mache die Syntax zur Semantik!

Idee

z.B. in geordneten Körpern hat man den Term $(1+1)+1 = t_3$, $++111$

den man nun als Repräsentanten für das bezeichnete Objekt nehmen.

$$\underset{(1+1)+1}{\overset{}{++111}} \equiv \underset{1+(1+1)}{+1+11}$$

$\Phi_{GK} \models ++111 \equiv +1+11$

Also brauchen wir Äquivalenzklassen von Termen.

⟶ Termmodell / Termstruktur

Terminterpretation

Sei Φ eine beliebige Menge von S-Formeln. $t, t' \in T^S$

$$t \sim t' \;:\Longleftrightarrow\; \Phi \vdash t \equiv t'.$$

Bsp.

Beh. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation:

[ZB. $t \sim t$: $t \equiv t$ ist eines der ~~Axiome~~ im Gentzenkalkül.

$\Phi \vdash t \equiv t'$, $t' \equiv t''$ nach Substitutionsregel ist dann

$\Phi \vdash t \equiv t''$.]

$\mathfrak{J}^{\Phi}$ sei die Termstruktur

$$\mathfrak{J}^{\Phi} = \left(T^S/_{\sim}, R^{\Phi}, f^{\Phi}, c^{\Phi} \right)$$

für jedes $R \in S_R$ für jeds $f \in S_F$ für jedes $c \in S_K$

Schreiben $\bar{t} := \{t' ; \Phi \vdash t \equiv t'\} = \{t' ; t \sim t'\}$

Falls R n-stellig ist, so $R^{\Phi}\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n :\Longleftrightarrow \Phi \vdash R t_1 \dots t_n$

$$R^{\Phi}\overline{t_1},\dots,\overline{t_n} :\Longleftrightarrow \Phi \vdash Rt_1\dots t_n$$

LEMMA 5.1.2.

Man muß Wohldefiniertheit zeigen:

z. B. $t_1 \sim t_1'$ Dann soll gelten $\Phi \vdash Rt_1,\dots,t_n$

$\Phi \vdash t_1 \equiv t_1'$ $\qquad \Longrightarrow \Phi \vdash Rt_1' \dots t_n$.

[Falls D eine Abl. von $\Phi \vdash t_1 \equiv t_1'$ und D' eine Abl. von $\Phi \vdash Rt_1 \dots t_n$ ist, so sind D und D' zusammen mit einer zusätzlichen Anw. der Substitutionsregel eine Abl. $\Phi \vdash Rt_1' \dots t_n$.]

f n-stelliges Fktsymb.

$$f^{\Phi}(\overline{t_1},\dots,\overline{t_n}) := \overline{ft_1\dots t_n}$$

[Hier genauso: Wohldefiniertheit.]

LEMMA 5.1.2.

c Konstantensymbol

$$c^{\Phi} := \overline{c}$$

$$\mathfrak{J}^{\Phi} = \left(T^S/_{\sim}, R^{\Phi}, f^{\Phi}, c^{\Phi}\right)$$

ist die Termstruktur.

Die Termbelegung $\beta^{\Phi}(v) := \overline{v}$.

$\mathfrak{J}^{\Phi} := (\mathfrak{T}^{\Phi}, \beta^{\Phi})$ Terminterpretation.

Manchmal auch HENKINMODELL.

Hoffnung: $\mathfrak{J}^{\Phi} \overset{?}{\rightsquigarrow} \models \Phi$.

Φ widerspruchfrei

DIESE HOFFNUNG IST I.A. KOMPLETT FALSCH!

Anderes Bsp. Die Sprache der Mengenlehre $S = \{\in\}$.

D.h. $T^S = Var$.

Für $v, w \in Var$ $ZFC \vdash v \equiv w \iff v = w$.

Für beliebige v, w gilt $ZFC \nvdash v \in w$

$\Longleftarrow$ Korrekth.

$ZFC \nvdash v \notin w$

D.h. $\Phi = ZFC$

$$\mathfrak{J}^{\Phi} = (\mathrm{Var}, \emptyset)$$

Insbesondere $\mathfrak{J}^{\Phi} \not\models ZFC$

$$\mathfrak{J}^{\Phi} \not\models (\in\text{-ker}), (\mathrm{Ext})$$

Henkins Idee kann nur funktionieren, wenn die Sprache hinreichend viele Terme hat.

5.1.8 Definition (a) Φ ist *negationstreu* genau dann, wenn für jeden Ausdruck φ gilt: $\Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \neg\varphi$.

(b) Φ *enthält Beispiele* genau dann, wenn für jeden Ausdruck der Gestalt $\exists x\varphi$ ein Term t existiert mit $\Phi \vdash (\exists x\varphi \to \varphi\frac{t}{x})$.

5.1.9 Lemma *Φ sei widerspruchsfrei, negationstreu und enthalte Beispiele. Dann gilt für alle φ, ψ:*

(a) *$\Phi \vdash \varphi$ gdw nicht $\Phi \vdash \neg\varphi$.*

(b) *$\Phi \vdash (\varphi \vee \psi)$ gdw $\Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \psi$.*

(c) *$\Phi \vdash \exists x\varphi$ gdw es gibt einen Term t mit $\Phi \vdash \varphi\frac{t}{x}$.*

(a) Da Φ negationstreu ist, gilt $\Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \neg\varphi$.
Da Φ widerspruchsfrei ist gilt genau eines von den beiden.

(b) "$\Longrightarrow$" $\Phi \vdash (\varphi \vee \psi)$
Ang nicht $\Phi \vdash \varphi \overset{\text{neg.tr.}}{\Longrightarrow} \Phi \vdash \neg\varphi$

4.3.4

$$\begin{array}{ll} \Gamma & (\varphi \vee \psi) \\ \Gamma & \neg\varphi \\ \hline \Gamma & \psi \end{array}$$

$\Longrightarrow \Phi \vdash \psi$.

"$\Longleftarrow$" folgt direkt aus ($\vee$S).

(c) "$\Longleftarrow$" folgt aus ($\exists$S).
"$\Longrightarrow$" Ang. $\Phi \vdash \exists x\varphi$
$\Phi \vdash (\exists x\varphi \longrightarrow \varphi\frac{t}{x})$
für einen Term t
$\Longrightarrow \Phi \vdash \varphi\frac{t}{x}$.

4.3.5 „Modus ponens"

$$\begin{array}{ll} \Gamma & (\varphi \to \psi) \\ \Gamma & \varphi \\ \hline \Gamma & \psi \end{array}, \qquad \text{d.h.} \qquad \begin{array}{ll} \Gamma & (\neg\varphi \vee \psi) \\ \Gamma & \varphi \\ \hline \Gamma & \psi \end{array}$$

5.1.10 Satz von Henkin *Es sei Φ eine widerspruchsfreie Ausdrucksmenge, die negationstreu ist und Beispiele enthält. Dann gilt für alle φ:*

(∗) $\qquad \mathfrak{I}^{\Phi} \models \varphi \quad gdw \quad \Phi \vdash \varphi.$

Beweisskizze. Per Induktion durch den Formelaufbau.

1. Atomar.
2. $\varphi, \psi \rightsquigarrow \neg\varphi,\ \varphi \vee \psi$ [5.1.9 (a) (b)]
3. $\varphi \rightsquigarrow \exists x\, \varphi$ [5.1.9. (c)]

Details Mittwoch.

Für den Vollständigkeitssatz fehlen dann noch:

1. Φ widerspruchsfreie Menge $\longrightarrow$ ex. $\Psi \supseteq \Phi$ widerspruchsfrei + negationstreu

2. Φ widerspruchsfreie Menge $\longrightarrow$ $\Psi \supseteq \Phi$ widerspruchsfrei + enth. Bsp.