MLML $\overline{\underline{XXIV}}$

5.1.10 Satz von Henkin *Es sei Φ eine widerspruchsfreie Ausdrucksmenge, die negationstreu ist und Beispiele enthält. Dann gilt für alle φ:*

(*) $$\underline{\mathfrak{I}^\Phi \models \varphi} \quad gdw \quad \Phi \vdash \varphi.$$

Terminterpretation

5.1.8 Definition (a) Φ ist *negationstreu* genau dann, wenn für jeden Ausdruck φ gilt: $\Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \neg\varphi$.
(b) Φ *enthält Beispiele* genau dann, wenn für jeden Ausdruck der Gestalt $\exists x \varphi$ ein Term t existiert mit $\Phi \vdash (\exists x\varphi \to \varphi\frac{t}{x})$.

5.1.9 Lemma *Φ sei widerspruchsfrei, negationstreu und enthalte Beispiele. Dann gilt für alle φ, ψ:*
(a) $\Phi \vdash \varphi$ *gdw nicht* $\Phi \vdash \neg\varphi$.
(b) $\Phi \vdash (\varphi \vee \psi)$ *gdw* $\Phi \vdash \varphi$ *oder* $\Phi \vdash \psi$.
(c) $\Phi \vdash \exists x\varphi$ *gdw es gibt einen Term t mit* $\Phi \vdash \varphi\frac{t}{x}$.

Beweis von 5.1.10 Über Induktion.

1. Atomar
2. $\neg$
3. $\vee$
4. $\exists$

2. $\mathfrak{I}^\Phi \models \neg\varphi \iff \Phi \vdash \neg\varphi$

$[\text{IA}: \mathfrak{I}^\Phi \models \varphi \iff \Phi \vdash \varphi]$

$\mathfrak{I}^\Phi \models \neg\varphi \iff$ nicht $\mathfrak{I}^\Phi \models \varphi$

$\iff$ nicht $\Phi \vdash \varphi$

$\overset{5.1.9(a)}{\iff} \Phi \vdash \neg\varphi$.

3. $\mathfrak{I}^\Phi \models (\varphi \vee \psi) \iff$

$\mathfrak{I}^\Phi \models \varphi$ oder $\mathfrak{I}^\Phi \models \psi$

$\underset{IV}{\iff} \Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \psi$

$\overset{5.1.9(b)}{\iff} \Phi \vdash (\varphi \vee \psi)$

4. $\mathfrak{I}^\Phi \models \exists x\varphi$

$\iff$ es ex. a mit

$\mathfrak{I}^\Phi \frac{a}{x} \models \varphi$

$\iff$ es ex. t mit

$\mathfrak{I}^\Phi \models \varphi\frac{t}{x}$

$\iff$ es ex. t $\Phi \vdash \varphi\frac{t}{x}$

$\overset{5.1.9(c)}{\iff} \Phi \vdash \exists x\varphi$

Bleibt Fall 1. Atomar

$$\mathfrak{I}^{\Phi}(t) = \overline{t} \quad \text{für beliebige Terme } t$$

[Induktion über Termaufbau]

$$\mathfrak{I}^{\Phi} \models t_1 \equiv t_2 \iff \mathfrak{I}^{\Phi}(t_1) = \mathfrak{I}^{\Phi}(t_2)$$
$$\iff \overline{t_1} = \overline{t_2}$$
$$\iff t_1 \sim t_2 \iff \Phi \vdash t_1 \equiv t_2 .$$

$$\mathfrak{I}^{\Phi} \models R t_1 \ldots t_n \iff (\mathfrak{I}^{\Phi}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}^{\Phi}(t_n)) \in R^{\Phi}$$
$$\iff (\overline{t_1}, \ldots, \overline{t_n}) \in R^{\Phi}$$
$$\iff \Phi \vdash R t_1 \ldots t_n .$$

q.e.d.
(Satz von Henkin)

LEMMA (Lindenbaums Lemma)

Falls $\Phi \subseteq L^S$ eine widerspruchsfreie Formelmenge ist, so ex. $\Phi^* \supseteq \Phi$ widerspruchsfrei & negationstreu. [für L^S].

LEMMA (Skolems Lemma)

Falls $\Phi \subseteq L^S$ eine widerspruchsfreie Formelmenge ist, so ex. $S^+ \supseteq S$ und $\Phi^+ \subseteq L^{S^+}$ mit $\Phi \subseteq \Phi^+$ und Φ^+ ist widerspruchsfrei und enthält Bsp.

Allgemeine Methode:

$$\Phi \longmapsto \Phi^* \qquad \Phi \longmapsto \Phi^+$$
$$S \longrightarrow S^+$$

$$\Phi_0 \overset{*}{\rightsquigarrow} \Phi_1 \overset{+}{\rightsquigarrow} \Phi_2 \overset{*}{\rightsquigarrow} \Phi_3 \overset{+}{\longrightarrow} \Phi_4$$

LINDENBAUM ($\ast$), SKOLEM ($+$)

$\Phi_0 = \Phi$	$\Phi_1 = \Phi_0^*$	$\Phi_2 = \Phi_1^+$	$\Phi_3 = \Phi_2^*$	$\Phi_4 = \Phi_3^+$
WIDERSPRUCHSFREI	WIDERSPRUCHSFREI	WIDERSPRUCHSFREI	"	"
$S_0 = S$	$S_1 = S_0$	$S_2 = S_1^+$	$S_3 = S_2^*$	$S_4 = S_3^*$

$$\Phi_{2n+1} := \Phi_{2n}^*$$
$$S_{2n+1} := S_{2n}$$
$$\Phi_{2n+2} := \Phi_{2n+1}^+$$
$$S_{2n+2} := S_{2n+1}^+$$

PER INDUKTION Φ_n widerspruchsfrei f.a. $n \in \mathbb{N}$

Wir erinnern uns an ÜA (58):

$$\hat{\Phi} := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Phi_m$$ ebenfalls widerspruchsfrei

BEMERKUNG

Falls λ eine Limeszahl ist und $(\Phi_\alpha \mid \alpha < \lambda)$ eine widerspruchsfreie Formelmenge, so ist $\bigcup_{\alpha<\lambda} \Phi_\alpha$ widerspruchsfrei

$\hat{\Phi}$ widerspruchsfrei $\quad \hat{S} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$

$$\hat{\Phi} \subseteq L^{\hat{S}}$$

Beh. 1 $\hat{\Phi}$ ist negationstreu.

Ang. $\hat{\Phi} \nvdash \varphi$ und $\hat{\Phi} \nvdash \neg\varphi$. $\quad \varphi \in L^{\hat{S}} \Longrightarrow \varphi \in L^{S_n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$

Aber nach Konstruktion ist Φ_{n+2} negationstreu für L^{S_n}. Also entw. $\Phi_{n+2} \vdash \varphi$ oder $\Phi_{n+2} \vdash \neg\varphi$. $\lightning$

Beh 2

$\hat{\Phi}$ enthält Bsp.

5.1.8 Definition (a) Φ ist *negationstreu* genau dann, wenn für jeden Ausdruck φ gilt: $\Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \neg\varphi$.

(b) Φ *enthält Beispiele* genau dann, wenn für jeden Ausdruck der Gestalt $\exists x\varphi$ ein Term t existiert mit $\Phi \vdash (\exists x\varphi \to \varphi\frac{t}{x})$.

5.1.9 Lemma *Φ sei widerspruchsfrei, negationstreu und enthalte Beispiele. Dann gilt für alle φ, ψ:*

(a) *$\Phi \vdash \varphi$ gdw nicht $\Phi \vdash \neg\varphi$.*

(b) *$\Phi \vdash (\varphi \vee \psi)$ gdw $\Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \psi$.*

(c) *$\Phi \vdash \exists x\varphi$ gdw es gibt einen Term t mit $\Phi \vdash \varphi\frac{t}{x}$.*

Sei $\exists x\varphi \in L^{\hat{S}}$ ein Ausdruck wie in der Def. von "enthält Bsp.".

Es ex. ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\exists x\varphi \in L^{S_n}.$$

Nach Konstruktion enthält die Menge Φ_{n+2} Bsp. für alle Ausdrücke aus L^{S_n}. Aber $\hat{\Phi} \supseteq \Phi_{n+2}$. Also gibt es eine Formel

$$\hat{\Phi} \vdash (\exists x\varphi \to \varphi\frac{t}{x}).$$

Also ist $\hat{\Phi}$ eine Menge, die die Voraussetzungen von Henkins Lemma erfüllt.

Für den Vollst.satz brauchen wir

Φ widerspruchsfrei $\Longrightarrow$ Φ erfüllbar

$\rightsquigarrow$

$\hat{\Phi} \supseteq \Phi$ widerspruchsfrei, negationstreu, enth. Bsp. $\xRightarrow{\text{HENKIN}}$ $\mathfrak{I}^{\hat{\Phi}} \models \hat{\Phi}$

$\Longrightarrow$ $\mathfrak{I}^{\hat{\Phi}} \models \Phi$

$\Longrightarrow$ Φ ist erfüllbar.

[D.h. modulo Lindenbaum + Skolem ist der Vollst.satz bewiesen.]

LINDENBAUMS LEMMA

Φ widerspruchsfrei $\Longrightarrow$

$\exists \Phi^* \supseteq \Phi$ widerspr. frei + negationstreu

BEWEIS.

Bemerkung: Für den allgemeinen Fall brauchen wir AC. Dies ist vermeidbar, falls L^S wohlordenbar ist.

[$\Leftarrow$ L^S ist abzählbar]

Wir ordnen L^S wohl und finden eine Bijektion zwischen L^S und Ordinalzahl μ.

$\varphi_\alpha = f(\alpha)$ wenn

$$L^S = \{\varphi_\alpha ; \alpha < \mu\} \qquad f : \mu \xrightarrow[\text{Bijektion}]{} L^S$$

Wir konstruieren rekursiv

$$\Phi_0 := \Phi$$

$$\Phi_{\alpha+1} := \begin{cases} \Phi_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} & \text{falls } \Phi_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \text{ widerspruchsfrei} \\ \Phi_\alpha & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Phi_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} \Phi_\alpha \quad \text{falls } \lambda \text{ Limeszahl}$$

$$\Phi^* := \bigcup_{\alpha<\mu} \Phi_\alpha$$

<u>Beh 1</u> Φ^* ist widerspruchsfrei [Induktion unter Verwendung von ÜA (58) zeigt, daß Φ_α widerspruchsfrei f. a. $\alpha<\mu$. $\overset{\text{ÜA 58}}{\Longrightarrow}$ Φ^* widerspruchsfrei]

<u>Beh 2</u> Φ^* ist negationstreu [Sei φ beliebig und $\Phi^* \nvdash \neg\varphi$. Finde α mit $\varphi = \varphi_\alpha$. Dann gilt $\Phi_\alpha \nvdash \neg\varphi$ [da $\Phi_\alpha \subseteq \Phi^*$]. Dann ist $\Phi_\alpha \cup \{\varphi\} = \Phi_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$ widerspruchsfrei. Also $\varphi_\alpha \in \Phi_{\alpha+1}$. Daraus folgt $\Phi^* \vdash \varphi_\alpha$.]

q.ed LINDENBAUM

SKOLEMS LEMMA

Falls $\Phi \subseteq L^S$ widerspruchsfrei, so ex. S^+ und $\Phi^+ \subseteq L^{S^+}$ mit $\Phi \subseteq \Phi^+$ widerspruchsfrei & enth. Bsp.

Beweis

$$E_S := \{\exists x \varphi \,;\, \varphi \in L^S, x \in Var\}$$

EXISTENZAUSDRÜCKE VON S.

5.1.8 Definition (a) Φ ist *negationstreu* genau dann, wenn für jeden Ausdruck φ gilt: $\Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \neg\varphi$.
(b) Φ *enthält Beispiele* genau dann, wenn für jeden Ausdruck der Gestalt $\exists x\varphi$ ein Term t existiert mit $\Phi \vdash (\exists x\varphi \to \varphi\frac{t}{x})$.

5.1.9 Lemma *Φ sei widerspruchsfrei, negationstreu und enthalte Beispiele. Dann gilt für alle φ, ψ:*
(a) $\Phi \vdash \varphi$ *gdw nicht* $\Phi \vdash \neg\varphi$.
(b) $\Phi \vdash (\varphi \vee \psi)$ *gdw* $\Phi \vdash \varphi$ *oder* $\Phi \vdash \psi$.
(c) $\Phi \vdash \exists x\varphi$ *gdw es gibt einen Term t mit* $\Phi \vdash \varphi\frac{t}{x}$.

$$\left(\exists x \varphi \longrightarrow \varphi\frac{t}{x}\right)$$

t bezeugt die Gültigkeit der Existenzaussage

In ZFC $\exists x\, \forall y (y \notin x)$ LM
Füge Konstantensymbol $\emptyset$ hinzu
und $\forall y (y \notin x)\frac{\emptyset}{x}$

ALLGEMEIN: Füge für jeden Ausdruck e in E_S ein neues Konstantensymbol c_e hinzu und

$$\underbrace{\exists x \varphi}_{e} \longrightarrow \varphi\frac{c_e}{x}$$

Sei $\underline{Y}$ eine Symbolmenge

$$E_{\underline{Y}} := \{\exists x \varphi \,;\, \varphi \in L^{\underline{Y}},\, x \in Var\}$$

Sei für $e \in E_{\underline{Y}}$ c_e ein neues Konstantensymbol $[\notin \underline{Y}]$

$$\underline{Y}^+ := \underline{Y} \cup \{c_e \,;\, e \in E_{\underline{Y}}\}.$$

Falls $\underline{\Phi} \subseteq L^{\underline{Y}}$, so setze $\underline{\Phi}^+ := \underline{\Phi} \cup \{(\exists x \varphi \to \varphi\frac{c_{\exists x\varphi}}{x})\,;\, \exists x \varphi \in E_{\underline{Y}}\}$

<u>Beh.</u> Falls $\underline{\Phi}$ widerspruchsfrei ist, so auch $\underline{\Phi}^+$. [S. Bemerkung später.]

Definiere $S_0 := S$

$\Phi_0 := \Phi$

$S_{i+1} := S_i^+$

$\Phi_{i+1} := \Phi_i^+$

$$\Phi^+ := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Phi_i \qquad \Phi^+ \subseteq L^{S^+}$$

$$S^+ := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$$

<u>Beh.</u> Φ^+ ist widerspruchsfrei (vorige Beh. + ÜA (58))
und enthält Bsp.

[Sei $\exists x \varphi \in L^{S^+}$. Es ex. $n \in \mathbb{N}$ mit $\exists x \varphi \in L^{S_n}$.
D.h. $\left(\exists x \varphi \rightarrow \varphi \frac{c_{\exists x \varphi}}{x}\right) \in \Phi_{n+1} \subseteq \Phi^+$.]

q.e.d.
(Skolems Lemma)

BEMERKUNG ZUM BEWEIS VON
"FALLS Φ WID. FREI, SO AUCH Ψ^+":

Im EFT werden verschiedene Sonderfälle bewiesen:

1. Fall Falls Φ nur endlich viele freie Variablen hat
und S abzählbar ist.

LEMMA 5.2.1 Seite 85

In diesem Falle muß die Sprache nicht einmal vergrößert werden, da die ∞ vielen ungenutzten Variablen als Terme für die Bsp. zur Verfügung stehen.

z ist neue Variable

$$\exists x \varphi \longrightarrow \varphi \frac{z}{x}$$

FÜR NAHEZU ALLE ANWENDUNGEN IST DIESER SONDERFALL DAS EINZIGE, WAS UNS INTERESSIERT

$\longrightarrow$ VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ
FÜR DIESEN SONDERFALL: S abzählbar
Φ nur endl. viele fr. Var.

2. Fall S immer noch abzählbar,
Φ beliebig : nur verwenden wir unseren Beweis von Skolems Lemma und fügen Konstantensymbole hinzu.

Widerspruchsfreiheitsbeweis $[\Phi \longrightarrow \Phi^+]$ verwendet den Spezialfall (Fall 1)

EFT Satz 5.2.4 S. 86–87

3. Fall S ist beliebig (Abschnitt 5.3)

EFT 5.3.4 zeigt Widerspruchsfreiheit $(\Phi \longrightarrow \Phi^+)$.

5.4.1 Der Vollständigkeitssatz *Für $\Phi \subseteq L^S$ und $\varphi \in L^S$ gilt:*

$$\text{Wenn } \Phi \models \varphi, \text{ so } \Phi \vdash_S \varphi.$$

5.4.2 Satz über die Adäquatheit des Sequenzenkalküls

(a) $\Phi \models \varphi$ *gdw* $\Phi \vdash \varphi$.

(b) Erf Φ *gdw* Wf Φ.

LÖWENHEIM-SKOLEM-SÄTZE

1. "Absteigender Löwenheim-Skolem"

Falls S eine abz. Symbolmenge ist und $\Phi \subseteq L^S$ widerspruchsfrei. Dann hat Φ ein höchstens abzählbares Modell.

Beweis Falls Φ widerspruchsfrei, so gibt es eine Terminterpretation von Φ. Aber dies ist $\mathfrak{I}^{\hat{\Phi}}$, wobei $\hat{\Phi} \subseteq L^{\hat{S}}$.
Also hat $A^{\hat{\Phi}} = T^{\hat{S}}/_{\sim}$ höchstens so viele Elemente wie $T^{\hat{S}}$. Es reicht also zu zeigen, daß $T^{\hat{S}}$ höchstens abzählbar ist. Dafür reicht es aus, daß $\hat{S}$ abzählbar ist.

$$\hat{S} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \qquad S_{2n+1} = S_{2n}$$

$$S_{2n+2} = S^{+}_{2n+1} = S_{2n+1} \cup \{c_e ; e \in E_{S_{2n+1}}\}$$

Per Ind. ist S_n abzählbar, falls S_0 abzählbar war und somit $\hat{S}$ als abz. Vereinigung von abz. Mengen.

<u>Anwendung</u> $\mathcal{R} := (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$

$Th(\mathcal{R}) := \{ \sigma ; \mathcal{R} \models \sigma \}$

widerspruchsfrei

$\xRightarrow{LS}$ ex. $\mathcal{A}$ abzählbar $\mathcal{A} \models Th(\mathcal{R})$.

(2.) <u>Aufsteigender Löwenheim-Skolem</u>

Falls Φ widerspruchsfrei und ein unendliches Modell hat und κ ist eine Kardinalzahl. Dann ex. $\mathcal{A} \models \Phi$ mit $|A| \geq \kappa$.

[<u>Skizze</u>: Fügen κ viele Konstanten c_α $(\alpha < \kappa)$ hinzu und $\neg c_\alpha \equiv c_\beta$ für $\alpha \neq \beta$

$\Psi := \{ \neg c_\alpha \equiv c_\beta ; \alpha \neq \beta \}$.

Falls $\mathfrak{A} \models \Phi \cup \Psi$,

so $|A| \geq \kappa$.

Nach Kompaktheit ist lediglich zu zeigen, daß jede ENDLICHE TM von $\Phi \cup \Psi$ ein Modell hat. Nur endlich viele $\neg c_\alpha \equiv c_\beta$ sind in dieser endlichen TM, also kann sie in unserem unendl. Modell erfüllt werden.