**Mathematische Logik & Mengenlehre**
Sommersemester 2020
Prof. Dr. Benedikt Löwe
**Übungsblatt 1**

Abgabe am 28. April 2020 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=273` .

Die Prüfungsform ist noch unbekannt. Unter Annahme, daß schriftliche Klausuren im Juli wieder stattfinden können, wird es nach dem Ende des Sommersemesters an einem noch bekanntzugebenden Termin eine Klausur geben. Um zur Prüfung zugelassen zu werden, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

(a) schriftliche Bearbeitung der Hälfte der Übungsaufgaben (die Aufgaben werden nicht als "richtig" oder "falsch" bewertet; jede Aufgabe, die bearbeitet wurde, zählt als bearbeitet, unabhängig davon, ob die Bearbeitung erfolgreich war);

(b) regelmäßige Anwesenheit und aktive Teilnehme in der Übungsgruppe (aktive Teilnahme beinhaltet unter den üblichen Bedingungen Vorrechnen an der Tafel: wegen der erschwerten Bedingungen über Zoom ist dies keine zwingende Voraussetzung, solange der reguläre Betrieb nicht stattfinden kann).

---

(1) Sei $P$ die Menge aller natürlichen Zahlen $\geq 2$, in der jede Primzahl höchstens einmal in der Primfaktorzerlegung auftaucht; wir nennen Elemente von $P$ auch *Prädikate*. Sei $I := \{n \in \mathbb{N}\,;\, n \geq 2\}$; wir nennen die Elemente von $I$ auch *Individuen*. Falls $i \in I$ und $n \in P$, so sagen wir "$i$ ist ein $n$", falls $n|i$.

Falls $n$ und $m$ Prädikate sind, so sagen wir

"alle $n$ sind $m$", falls jedes Individuum $i$, welches ein $n$ ist, auch ein $m$ ist und

"einige $n$ sind nicht $m$", falls es ein Individuum $i$ gibt, welches ein $n$, aber kein $m$ ist.

(a) Überlegen Sie sich, daß "alle $n$ sind $m$" gilt, genau dann, wenn $m|n$. Beschreiben Sie "einige $n$ sind nicht $m$" auf ähnliche Weise.

(b) Seien $n, m, k \in P$. Zeigen Sie: wenn jedes $n$ ein $m$ ist und jedes $k$ ein $n$ ist, so ist jedes $k$ ein $m$.

(c) Seien $n, m, k \in P$. Zeigen Sie: wenn jedes $m$ ein $n$ ist und einige $k$ kein $n$ sind, so sind einige $k$ kein $m$.

(d) Was haben (b) und (c) mit den Namen *Barbara* und *Baroco* zu tun?

(2) Sei $S$ eine Symbolmenge. Zeigen Sie durch Induktion über den Termaufbau, daß in jedem $S$-Term das Symbol ) genau so oft auftritt wie das Symbol (.

(3) Wir konstruieren eine Sprache aus einem einzigen Symbol $\bullet$. Eine endliche Folge von diesen Symbolen heiße *Kette*. Eine Kette heißt *Basiskette*, falls Sie entweder zwei Elemente hat oder die Anzahl ihrer Elemente ein Vielfaches von elf ist. Wir definieren rekursiv den Begriff der *chinesischen Kette*: jede Basiskette ist chinesisch und falls $s$ und $t$ chinesische Ketten sind, so ist auch $st$ eine chinesische Kette (wobei Hintereinanderschreiben die Verkettung zweier Folgen bezeichnet).

(a) Geben Sie zwei Beispiele für chinesische Ketten, die keine Basisketten sind.

(b) Geben Sie zwei Beispiele für nichtchinesische Ketten.

(c) Beschreiben Sie die Menge der chinesischen Ketten.

(4) Sei $S = S_{\mathrm{R}} \cup S_{\mathrm{F}} \cup S_{\mathrm{K}}$ die Symbolmenge mit $S_{\mathrm{R}} := \varnothing$, $S_{\mathrm{F}} := \{\dot{m}, \dot{a}\}$ und $S_{\mathrm{K}} := \{\dot{e}\}$. Sei $\sigma$ die Signatur mit $\sigma(\dot{m}) = \sigma(\dot{a}) = 2$. Interpretieren Sie $\dot{m}$ als Multiplikation, $\dot{a}$ als Addition und $\dot{e}$ als 1 und drücken Sie den informellen Term $x^2 + 2x + 1$ als $S$-Term aus. Geben Sie eine Ableitung für den Term im Termkalkül.

(5) Lösen Sie Aufgabe 2.4.8 im Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas:

> **2.4.8 Aufgabe** (Klammerfreie Darstellung der Ausdrücke, sog. *polnische Notation*). Sei $S$ eine Symbolmenge und bezeichne $\mathbb{A}'$ die unter (a) bis (d) in 2.2.1 genannten Symbole. Wir setzen $\mathbb{A}'_S := \mathbb{A}' \cup S$. $S$-Ausdrücke in polnischer Notation (kurz $S$-P-Ausdrücke) seien alle Zeichenreihen über $\mathbb{A}'_S$, die man durch endlichmalige Anwendung der Regeln (A1), (A2), (A3), (A5) aus 2.3.2 und der folgenden Regel (A4)' erhalten kann:
>
> (A4)' Sind $\varphi$ und $\psi$ $S$-P-Ausdrücke, so sind auch $\wedge\varphi\psi$, $\vee\varphi\psi$, $\rightarrow\varphi\psi$ und $\leftrightarrow\varphi\psi$ $S$-P-Ausdrücke.
>
> Man beweise die 2.4.3(b) und 2.4.4(b) entsprechenden Behauptungen für $S$-P-Ausdrücke.