Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2020
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 10

Abgabe am 7. Juli 2020 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=273` .

(50) Arbeiten Sie in Z^0 und nehmen Sie an, daß Φ eine Formel in einer freien Variablen ist. Wir nennen Φ *unbeschränkt in den Ordinalzahlen*, falls für jede Ordinalzahl α ein $\beta > \alpha$ existiert, so daß $\Phi(\beta)$ gilt. Zeigen Sie: falls Φ unbeschränkt in den Ordinalzahlen ist, so gibt es keine Menge aller Ordinalzahlen, welche Φ erfüllen.

(51) Arbeiten Sie in ZF^0. Es sei F eine funktionale Zuordnung von Mengen zu Mengen, also eine Formel in zwei freien Variablen Φ, so da für alle Mengen x eine eindeutige Menge $F(x)$ existiert mit $\Phi(x, F(x))$. Wir nennen F eine *normale Ordinalzahloperation*, falls sie die folgenden drei Eigenschaften hat:

(a) für jede Ordinalzahl α ist $F(\alpha)$ eine Ordinalzahl,
(b) für Ordinalzahlen $\alpha < \beta$ ist $F(\alpha) < F(\beta)$ und
(c) falls λ eine Limeszahl ist, so ist $F(\lambda) = \bigcup\{F(\xi)\,;\,\xi \in \lambda\}$.

Eine Ordinalzahl γ heißt *Fixpunkt* von F, falls $F(\gamma) = \gamma$. Zeigen Sie, daß jede normale Ordinalzahloperation viele Fixpunkte hat. Können Sie “viele” präzise formulieren?

(52) Zeigen Sie die in der Vorlesung erwähnten drei Eigenschaften der Aleph-Hierarchie:

(a) falls $\alpha < \beta$, so $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$,
(b) $\alpha \leq \aleph_\alpha$,
(c) falls $\aleph_\alpha \leq \beta < \aleph_{\alpha+1}$, so ist $\aleph_\alpha \sim \beta$.

(53) Lesen Sie die Abschnitte III.6 (S. 43–44) und VII.3 (S. 107–110) im Buch von Ebbinghaus über das Fundierungsaxiom und die von Neumann-Hierarchie, insbesondere Satz VII.3.7. Das Fundierungsaxiom erlaubt es uns, Beweise über alle Mengen per transfinite Induktion (über den Rang) zu beweisen. Formulieren Sie das entsprechende Induktionsprinzip und leiten Sie es aus Satz VII.3.7 und dem Prinzip der transfiniten Induktion für Ordinalzahlen her.

(54) In der Vorlesung hatten wir (in ZFC) bewiesen, daß für je zwei Mengen X und Y entweder $X \preceq Y$ oder $Y \preceq X$ gilt (also “es gibt eine Injektion von X nach Y oder es gibt eine Injektion von Y nach X”. Wir wollen diese Aussage *Vergleichbarkeit von Kardinalitäten* nennen. Zeigen Sie in ZF^0, daß die Vergleichbarkeit von Kardinalitäten das Auswahlaxiom impliziert.