Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2020
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 11

Abgabe am 14. Juli 2020 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=273` .

(55) Sei Φ eine beliebige Menge von Formeln.

(a) Definieren Sie einen Kalkül $\mathfrak{K}_\Phi$, so daß $\vdash_{\mathfrak{K}_\Phi} \varphi$ genau dann, wenn $\varphi \in \Phi$.

(b) Zeigen Sie: falls $\mathfrak{K}_\Phi$ korrekt ist, so ist Φ $\mathfrak{K}_\Phi$-widerspruchsfrei.

(c) Gilt die Umkehrung von (b)?

(d) Ein Kalkül $\mathfrak{K}$ heißt *explosiv*, falls für jede $\mathfrak{K}$-widersprüchliche Menge Ψ und jedes φ gilt, daß $\Psi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$. Zeigen Sie, daß es nicht-explosive Kalküle gibt. Können diese korrekt sein?

(56) Lösen Sie Aufgabe 4.5.5 aus dem Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas. Hier heißt "ableitbar" im vollen Gentzen-Kalkül ableitbar.

4.5.5 Aufgabe Man zeige, dass die folgenden Regeln ableitbar sind:

(a1) $\dfrac{\Gamma \quad \forall x\varphi}{\Gamma \quad \varphi\frac{t}{x}}$ (a2) $\dfrac{\Gamma \quad \forall x\varphi}{\Gamma \quad \varphi}$

(b1) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi\frac{t}{x} \quad \psi}{\Gamma \quad \forall x\varphi \quad \psi}$ (b2) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \quad \forall x\varphi}$, falls y nicht frei in $\Gamma\ \forall x\varphi$

(b3) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi \quad \psi}{\Gamma \quad \forall x\varphi \quad \psi}$ (b4) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad \forall x\varphi}$, falls x nicht frei in Γ

(57) Sei $\mathfrak{K}$ der Kalkül, welcher aus den Regeln (Ant), (Vor) und ($\vee$A) besteht. Beweisen Sie, daß für keine Formel φ gilt, daß $\vdash_{\mathfrak{K}} (\varphi \vee \neg\varphi)$. Überlegen Sie sich, warum das bedeutet, daß die Regel (TND) (definiert auf S. 66 im Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas) nicht in $\mathfrak{K}$ ableitbar ist.

(58) Sei $\{\Phi_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ eine aufsteigende Folge von widerspruchsfreien Mengen (also: für $n \leq m$ gilt $\Phi_n \subseteq \Phi_m$). Zeigen Sie, daß $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_n$ widerspruchsfrei ist.

(59) Zeigen Sie (mit Hilfe des Kompaktheitssatzes), daß die Klasse der Körper positiver Charakteristik nicht axiomatisierbar (Δ-elementar) ist und daß die Klasse der Körper von Charakteristik Null axiomatisierbar (Δ-elementar), aber nicht endlich axiomatisierbar (elementar) ist.

(60) In der Vorlesung haben wir Beispiele für die Anwendung des Kompaktheitssatzes gesehen: z.B. "falls T eine Theorie ist, die beliebig große endliche Modelle hat, dann hat T ein unendliches Modell". Betrachten Sie die folgenden umgangssprachlichen Aussagen; welche davon sind Anwendungen des Kompaktheitssatzes, welche nicht?

[Ein *Schiefkörper* erfüllt alle Axiome für Körper bis auf die Kommutativität der Multiplikation. Er ist *kommutativ*, wenn er auch dieses Axiom erfüllt.]

(a) Da es beliebig große endliche kommutative Schiefkörper gibt, gibt es einen unendlichen kommutativen Schiefkörper.

(b) Da es einen unendlichen nichtkommutativen Schiefkörper gibt, gibt es beliebig große endliche nichtkommutative Schiefkörper.

(c) Es gibt keine Formelmenge Φ, so daß für jeden Ring $\mathfrak{R}$ gilt, daß genau dann $\mathfrak{R} \models \Phi$, wenn $\mathfrak{R}$ endlich ist.

(d) Es gibt keine Formelmenge Φ, so daß für jeden Ring $\mathfrak{R}$ gilt, daß genau dann $\mathfrak{R} \models \Phi$, wenn $\mathfrak{R}$ unendlich ist.

(e) Es gibt keine Formelmenge Φ, so daß für alle Graphen $\mathfrak{G}$ gilt, daß genau dann $\mathfrak{G} \models \Phi$, wenn $\mathfrak{G}$ zusammenhängend ist.

(f) Da es für beliebig große Zahlen n eine Gruppe gibt, in der jedes nichtneutrale Element die Ordnung n hat, gibt es eine unendliche Gruppe, in der jedes nichtneutrale Element die Ordnung n hat.