Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2020
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 3

Abgabe am 12. Mai 2020 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=273` .

(11) Lesen Sie den Beweis des Koinzidenzlemmas 3.4.6 im Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas. Im Beweis werden die Fälle $t = c$, $\varphi = t_1 \equiv t_2$ und $\varphi = (\psi \vee \chi)$ nicht behandelt, sondern als "entsprechend" gekennzeichnet. Geben Sie diese Beweise.

Was ist mit den Fällen $\varphi = (\psi \wedge \chi)$, $\varphi = (\psi \to \chi)$, $\varphi = (\psi \leftrightarrow \chi)$ und $\varphi = \forall x \psi$?

(12) Sei S eine Symbolmenge und $R \notin S$ ein n-stelliges Relationssymbol, welches nicht in S vorkommt. Wir setzen $S^* := S \cup \{R\}$. Sei außerdem Ψ ein S-Ausdruck mit den freien Variablen $v_1, ..., v_n$.

Falls $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta) = (A, \mathfrak{a}, \beta)$ eine S-Interpretation ist, definieren wir

$$\mathfrak{a}^* : \begin{cases} \mathsf{x} & \mapsto \quad \mathfrak{a}(\mathsf{x}) \text{ und} \\ R & \mapsto \quad \{(a_1, ..., a_n) \,;\, \mathfrak{I}\frac{a_1}{v_1} \cdots \frac{a_n}{v_n} \models \Psi\}, \end{cases}$$

wobei x ein Symbol aus S ist. Dann ist $\mathfrak{I}^* := (A, \mathfrak{a}^*, \beta)$ eine S^*-Interpretation.

Definieren Sie eine Übersetzung $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$, welche S^*-Ausdrücke in S-Ausdrücke übersetzt, so daß für jede S-Interpretation $\mathfrak{I}$ und jede S^*-Formel φ gilt:

$$\mathfrak{I}^* \models \varphi \iff \mathfrak{I} \models \widehat{\varphi}.$$

(13) Lösen Sie Aufgabe 3.4.11 im Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas:

3.4.11 Aufgabe Man zeige:
(a) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{=\!\mid\!\models} (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$.
(b) $\exists x(\varphi \vee \psi) \mathrel{=\!\mid\!\models} (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)$.
(c) $\forall x(\varphi \vee \psi) \mathrel{=\!\mid\!\models} (\varphi \vee \forall x\psi)$, falls $x \notin \text{frei}(\varphi)$.
(d) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{=\!\mid\!\models} (\varphi \wedge \exists x\psi)$, falls $x \notin \text{frei}(\varphi)$.
(e) Man zeige, dass man in (c), (d) auf die Voraussetzung „$x \notin \text{frei}(\varphi)$" nicht verzichten kann.

(14) Sei S eine Symbolmenge. Eine Klasse $\mathcal{C}$ von S-Strukturen heißt S-*axiomatisierbar*, wenn es eine Menge Γ von S-Sätzen gibt, so daß für jede S-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt, daß $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Zeigen Sie, daß die folgenden Klassen für $S = S_{\mathrm{F}} = \{\star\}$, wobei $\star$ ein zweistelliges Funktionssymbol ist, axiomatisierbar sind:

(a) die Klasse aller abelschen Gruppen,

(b) die Klasse aller sechselementigen Gruppen, und

(c) die Klasse aller unendlichen Gruppen.

Warum ist es egal, ob ich statt der Menge S die Symbolmenge $S' := \{\star, i, e\}$ mit einem zusätzlichen einstelligen Funktionssymbol i (für die Inversen) und einem zusätzlichen Konstantensymbol e (für das neutrale Element) wähle?

(15) Sei S die Symbolmenge mit $S_\mathrm{F} := \{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{\oplus}, \dot{\otimes}\}$ und $S_\mathrm{R} := \{\dot{V}, \dot{S}\}$, wobei $\dot{+}$, $\dot{\times}$, $\dot{\oplus}$ und $\dot{\otimes}$ zweistellige Funktionssymbole und $\dot{V}$ und $\dot{S}$ einstellige Relationssymbole sind.

Falls $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$, so setzen wir $K_\mathfrak{A} := \mathfrak{a}(\dot{S})$ und $V_\mathfrak{A} := \mathfrak{a}(\dot{V})$.

Geben Sie Axiome Γ in der Sprache L^S an, so daß für jede S-Struktur $\mathfrak{A} \models \Gamma$ gilt:

(a) $(K_\mathfrak{A}, \mathfrak{a}(\dot{+}), \mathfrak{a}(\dot{\times}))$ ist ein Körper,

(b) $(V_\mathfrak{A}, \mathfrak{a}(\dot{\oplus}))$ ist ein $K_\mathfrak{A}$-Vektorraum mit Skalarmultiplikation $\mathfrak{a}(\dot{\otimes})$.

Bedeutet dies, daß die Klasse der Vektorräume im Sinne von Aufgabe (14) axiomatisierbar ist?