Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2020
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 6

Abgabe am 9. Juni 2020 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=273` .

(27) Lösen Sie Aufgaben III.3.5.2 und III.3.5.3 aus dem Buch von Ebbinghaus:

> **3.5.2** Man gebe Mengen x und y an mit $\bigcup(x \cap y) \neq (\bigcup x) \cap (\bigcup y)$. Gibt es eine stets gültige Teilmengenbeziehung zwischen $\bigcup(x \cap y)$ und $(\bigcup x) \cap (\bigcup y)$?
>
> **3.5.3** Man zeige: $\forall x\, x \subseteq \mathrm{Pot}(\bigcup x)$. Kann Gleichheit eintreten? Kann Ungleichheit eintreten? Wie stehen $\bigcup \mathrm{Pot}(x)$ und $\mathrm{Pot}(\bigcup x)$ zueinander?

(28) Lösen Sie Aufgabe III.2.3.3 aus dem Buch von Ebbinghaus:

> **2.3.3** Man zeige mit einem geeigneten „Universum“, daß $\bigcup$**-Ax** nicht aus **Ex**, **Ext**, **Aus** und $\cup$**-Ax** bewiesen werden kann.

(29) Ebbinghaus bemerkt auf Seite 34, daß das Paarmengenaxiom nicht aus den Vereinigungsaxiomen (mit Aussonderung und Extensionalität) folgt. Beweisen Sie diese Aussage.

> Aus dem Paarmengenaxiom, dem Schema **Aus** der Aussonderung und $\bigcup$**-Ax** ist $\cup$**-Ax** beweisbar, da $x \cup y = \bigcup\{x, y\}$. Umgekehrt können wir das Paarmengenaxiom noch nicht mit den bisherigen Axiomen beweisen (man zeige das durch Angabe eines geeigneten „Universums“).

(30) Sei $S = \{\in\}$. In Analogie zur Konstruktion der Aufgaben (24) bis (26) wollen wir ein Modell konstruieren, welches alle Axiome der *endlichen Mengenlehre* FST erfüllt, also Extensionalität, Aussonderung, beide Vereinigungsaxiome und das Potenzmengenaxiom.

Wie in Aufgabe (24) nehmen Sie die natürlichen Zahlen als potentielle Ecken und beginnen mit der Struktur $\mathfrak{A}_0 = (A_0, E_0)$ wie dort. Geben Sie eine Konstruktion von Modellen $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_\infty$, welche die Eigenschaften von Aufgabe (25) haben und so daß $\mathfrak{A}_\infty$ ein Modell von FST ist.

[**Hinweis.** Diese Aufgabe ist deutlich aufwendiger als alle anderen: kümmern Sie sich nur um diese Aufgabe, wenn Sie sonst keine Verpflichtungen in der Pfingstpause haben.

Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten, dies zu tun. Z.B.: In Aufgabe (24) hatten wir den Konstruktionsschritt $A_n \mapsto A_{n+1}$ gesehen, der jeweils Paarmengen hinzufügt. Definieren Sie ähnliche Konstruktionsschritte für das große Vereinigungsaxiom (Hinzufügen von Vereinigungen von Mengen) und das Potenzmengenaxiom (Hinzufügen der Menge aller bisher existierender Teilmengen). Dann verwenden Sie diese drei Schritte jeweils in den Stufen $3n+1$, $3n+2$

und $3n+3$ der Konstruktion. Überlegen Sie sich, daß in einem Schritt hinzugefügte Paare und Vereinigungen stets Paare und Vereinigungen bleiben, daß aber eine hinzugefügte Menge aller Teilmengen nicht unbedingt die Potenzmenge bleiben muss. Warum ist das Potenzmengenaxiom trotzdem in $\mathfrak{A}_\infty$ erfüllt? Überlegen Sie sich, ob alle drei genannten Konstruktionsschritte nötig sind: was für ein Modell erhält man, wenn man einen der drei wegläßt? Welche Alternativen für die drei genannten Konstruktionsschritte gibt es, die auch funktionieren?]

(31) Lösen Sie Aufgabe IV.1.20.1 aus dem Buch von Ebbinghaus:

> **1.20.1** Welche der zweistelligen Operationen (i) $x, y \mapsto \{\{\{x\}, \emptyset\}, \{\{y\}\}\}$, (ii) $x, y \mapsto \{\{x, \emptyset\}, \{y\}\}$, (iii) $x, y \mapsto \{x, x \cup y\}$ lassen sich zur Definition geordneter Paare verwenden?

(32) Lösen Sie Aufgabe IV.1.20.5 aus dem Buch von Ebbinghaus:

> **1.20.5** (i) Ist (a, r) eine Ordnung i.S.v. $<$, so ist $(a, r \cup \mathrm{id}_a)$ eine Ordnung i.S.v. $\leq$.
> (ii) Ist (a, r) eine Ordnung i.S.v. $\leq$, so ist $(a, r \setminus \mathrm{id}_a)$ eine Ordnung i.S.v. $<$.

(33) Lösen Sie Aufgaben IV.1.20.6 und IV.1.20.7 aus dem Buch von Ebbinghaus:

> **1.20.6** Sind a und b zueinander disjunkt und (a, r) und (b, s) Ordnungen i.S.v. $<$, so ist mit $t := r \cup s \cup (a \times b)$ auch $(a \cup b, t)$ eine Ordnung i.S.v. $<$, die *Summe* der Ordnungen (a, r) und (b, s).
>
> **1.20.7** Es seien (a, r) und (b, s) Ordnungen i.S.v. $<$. Die Relation t sei definiert durch $t := \{((u, v), (u', v')) \in (a \times b)^2 \mid uru' \vee (u = u' \wedge vsv')\}$. Man zeige, daß $(a \times b, t)$ eine Ordnung i.S.v. $<$ ist, das *lexikographische Produkt* der Ordnungen (a, r) und (b, s).