**Mathematische Logik & Mengenlehre**
Sommersemester 2020
Prof. Dr. Benedikt Löwe
**Übungsblatt 7**

Abgabe am 16. Juni 2020 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=273` .

(34) Eine Menge $I$ hieß *induktiv*, falls $\varnothing \in I$ und für alle $x \in I$, ist auch $x \cup \{x\} \in I$.

Analog nennen wir eine Menge $Z$ *Zermelo-induktiv* falls $\varnothing \in Z$ und für alle $x \in Z$, ist auch $\{x\} \in Z$. Zeigen Sie:

(a) Falls es eine Zermelo-induktive Menge gibt, so gibt es eine minimale Zermelo-induktive Menge.

(b) Wir bezeichnen die minimale Zermelo-induktive Menge aus (a) mit $\mathbb{N}_{\text{Zermelo}}$. Dann gilt $\bigcup \mathbb{N}_{\text{Zermelo}} = \mathbb{N}_{\text{Zermelo}}$.

(c) Falls $x \in \mathbb{N}_{\text{Zermelo}}$, so gilt $x \notin x$.

(35) Sei $(X, \leq)$ eine linear geordnete Menge. Eine Teilmenge $Z \subseteq X$ heißt $Z$ *ordnungsinduktiv*, falls für alle $x \in X$ gilt: wenn $\{z \in X\,;\, z < x\} \subseteq Z$, so ist $x \in Z$.

Wir sagen, daß $(X, \leq)$ das *Prinzip der Ordnungsinduktion erfüllt*, falls für jede ordnungsinduktive Teilmenge $Z \subseteq X$ gilt, daß $Z = X$.

Zeigen Sie, daß $(\mathbb{N}, \subseteq)$ das Prinzip der Ordnungsinduktion erfüllt. Kennen Sie Beispiele von linear geordneten Mengen, welche nicht das Prinzip der Ordnungsinduktion erfüllen?

(36) Beweisen Sie die folgenden Aussagen über natürliche Zahlen:

(a) Für alle $n$ und $m$ gilt: falls $m \in n$, so $n \notin m$.

(b) Für alle $n$, $m$ und $k$ gilt: $(n + m) + k = n + (m + k)$.

(c) Für alle $n$ und $m$ gilt: $n + m = m + n$.

(d) Für alle $n$ gilt: $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$.

(e) Für alle $n$ und $m$ gilt: $n \cdot m = m \cdot n$.

(37) Eine Menge $X$ heißt *endlich*, falls sie in Bijektion zu einer natürlichen Zahl ist; sie heißt *unendlich*, falls sie nicht endlich ist; sie heißt *Dedekind-unendlich*, falls sie eine echte Teilmenge $Y \subsetneq X$ hat, die in Bijektion mit $X$ steht.

Zeigen Sie:

(a) Jede Dedekind-unendliche Menge ist unendlich.

(b) Falls eine Injektion $f : \mathbb{N} \to X$ existiert, so ist $X$ Dedekind-unendlich.

(38) Lösen Sie Aufgabe V.2.4.5 aus dem Buch von Ebbinghaus:

**2.5.4** Es sei $a \subseteq \omega$ und $\forall i\ a \backslash i \neq \emptyset$. Dann existiert eine Funktion $f$ mit $f : \omega \overset{bij}{\to} a$.