Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2020
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 8

Abgabe am 23. Juni 2020 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=273` .

(39) Eine Struktur $\mathfrak{A} = (A, +, 0)$ heißt *abelsches Monoid mit Kürzungsregel*, falls für alle $a, b, c \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c, \\ a + b &= b + a, \\ a + 0 &= a, \\ 0 + a &= a \text{ und} \\ a + b = a + c &\rightarrow b = c. \end{aligned}$$

(a) Falls A Dedekind-endlich ist, so ist $\mathfrak{A}$ eine Gruppe.

(b) Auf $A \times A$ definieren wir die folgende Relation $(a, b) \approx (a', b')$ genau dann, wenn $a + b' = b + a'$. Zeigen Sie, daß $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist. (Welche Rolle spielt die Kürzungsregel hier?)

(c) In der Vorlesung haben wir beschrieben, wie die Menge $G := A \times A/\approx$ zu einer Gruppe gemacht werden kann. Geben Sie die Details dieser Konstruktion (mit entsprechenden Beweisen, dass die definierten Operationen wohldefiniert sind). Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$i : A \rightarrow G : a \mapsto [a, 0]_{\approx}$$

eine strukturerhaltende Injektion ist.

(d) Wir hatten in der Vorlesung dieses Ergebnis genutzt, um aus dem Monoid $(\mathbb{N}, +, 0)$ die Gruppe $(\mathbb{Z}, +, 0)$ und aus dem Monoid $(\mathbb{Z}\backslash\{0\}, \cdot, 1)$ die Gruppe $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot, 1)$ zu definieren. Erläutern Sie, warum in dieser Konstruktion die Nullteilerfreiheit des Eins-Rings $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ wichtig ist.

(40) Sei $\mathfrak{X} := (X, <)$ eine strikte lineare Ordnung. Eine Menge $L \subseteq X$ heißt *Anfangssegment (von $\mathfrak{X}$)*, wenn für alle $\ell \in L$ und $x < \ell$ gilt, daß $x \in L$; eine Menge $R \subseteq X$ heißt *Endsegment (von $\mathfrak{X}$)*, wenn für alle $r \in R$ und $x > r$ gilt, daß $x \in R$. Ein Anfangs- oder Endsegment S heißt *echt*, falls $S \neq X$. Eine Teilmenge Z von X heißt *(nach oben) beschränkt*, wenn es ein $b \in X$ gibt, so daß für alle $z \in Z$ gilt, daß $z \leq b$.

Wie in der Vorlesung nennen wir ein Paar (L, R) einen *Dedekind-Schnitt (über $\mathfrak{X}$)*, wenn $L \cup R = X$, $L \cap R = \varnothing$, L ein echtes Anfangssegment und R ein echtes Endsegment ist. Ein Dedekind-Schnitt (L, R) heißt *adäquat*, falls L kein größtes Element hat.

Sind (L, R) und (L', R') Dedekind-Schnitte, so setzen wir $(L, R) < (L', R')$, falls $L \subsetneq L'$. Sei $\mathrm{Ded}(\mathfrak{X})$ die Menge aller adäquaten Dedekind-Schnitte über $(X, <)$.

(a) Zeigen Sie, daß $(\mathrm{Ded}(\mathfrak{X}), <)$ eine strikte totale Ordnung ist, in der jede nichtleere (nach oben) beschränkte Teilmenge eine kleinste obere Schranke hat.

(b) Welchen Anforderungen muß $\mathfrak{X}$ genügen, damit die Abbildung

$$x \mapsto (\{y \in X\,;\, y < x\}, \{y \in X\,;\, x \leq y\})$$

eine ordnungserhaltende Einbettung von $\mathfrak{X}$ nach $(\mathrm{Ded}(\mathfrak{X}), <)$ ist?

(c) Was geschieht, wenn wir die Bedingung der Adäquatheit in der Definition von $\mathrm{Ded}(\mathfrak{X})$ weglassen?

(41) Eine strikte lineare Ordnung heißt *dicht*, falls für $x < y$ ein z existiert, so daß $x < z < y$. Wir sagen, sie ist *ohne Endpunkte*, wenn Sie weder ein kleinstes noch ein größtes Element hat. Zeigen Sie, daß jede abzählbare dichte strikte linear Ordnung ohne Endpunkte $\mathfrak{D}$ isomorph zu $(\mathbb{Q}, <)$ ist.

[*Hinweis.* Konstruieren Sie zunächst rekursiv eine ordnungserhaltende Injektion von $\mathfrak{D}$ nach $(\mathbb{Q}, <)$. Ist diese surjektiv? Wenn nicht, wie können Sie die Surjektivität in der Konstruktion erzwingen?]

(42) Sei $\mathfrak{W} := (W, <)$ eine Wohlordnung und Z eine beliebige Menge. Sei $G(\mathfrak{W}, Z)$ die Menge aller Funktionen g mit $\mathrm{Bild}(g) \subseteq Z$, so daß $\mathrm{Def}(g)$ ein echtes Anfangssegment von $\mathfrak{W}$ ist. (Warum ist dies eine Menge?) Sei $F : G(\mathfrak{W}, Z) \to Z$ eine beliebige Funktion.

Beweisen Sie die folgende Version des *Rekursionstheorems*: Es gibt eine eindeutig bestimmte Funktion $H : W \to Z$, so daß für alle $w \in W$ gilt, daß

$$H(w) = F(H{\restriction}{<}[w]).$$

(43) Lösen Sie Aufgabe VI.1.10.4 aus dem Buch von Ebbinghaus:

> **1.10.4** Es sei (a, r) eine Wohlordnung und A die Menge der von a verschiedenen Anfangsstücke von a bzgl. r. Dann ist $(a, r) \cong (A, \subset_A)$. Gilt dies auch für beliebige Ordnungen i.S.v. $<$?