Studentische Lösungen zum Übungsblatt 1

Hier finden sich gute bis sehr gute Lösungen zu den Aufgaben, die von Studierenden abgegeben wurden. Die Autorinnen und Autoren der Lösungen haben zugestimmt, dass sie an dieser Stelle zur Verfügung gestellt werden.

Aufgabe 1.

a) Beh: "alle n sind m" $\Leftrightarrow$ $m|n$

Beweis

"$\Rightarrow$"

"alle n sind m" heißt: Jedes Individuum i was ein n ist ist auch ein m

d.h. $\forall i \in I$ mit $n|i$: $m|i$ (*)

Da $n \in P \subseteq I$ und $n|n$ folgt also: $m|n$.

"$\Leftarrow$"

$m|n$, d.h. $\exists k \in \mathbb{N}$: $k \cdot m = n$

Wir wollen (*) zeigen. Nehmen wir also an: $n|i$

$\overset{n=k\cdot m}{\Rightarrow}$ $k \cdot m \mid i$

$\Rightarrow$ $m \mid i$

Also ist jedes Individuum i, welches ein n ist auch ein m.

$\square$

Beh.: "einige n sind nicht m" $\Leftrightarrow$ $m \nmid n$

Beweis

"$\Rightarrow$"

"einige n sind nicht m" heißt: Es gibt ein Individuum i, welches n aber nicht m ist.

d.h. $\exists i \in I$: $n|i \wedge m \nmid i$

Angenommen es gelte $m|n$, dann ex. $k \in \mathbb{N}$ s.d. $k \cdot m = n$.

Nun gilt, falls $n|i$ dann auch $m|i$ wegen $n = k \cdot m$ für alle $i \in I$ $\lightning$ zur Voraussetzung

„$\Leftarrow$"

Es gelte: $m \nmid n$

Da $n \in P \subseteq I$ ex. ein $i \in I$ nämlich $i := n$ mit

$n|i$ und $m \nmid i$

$\square$

b) $m, n, k \in P$

Beh.: Wenn jedes n ein m ist und jedes k ein n, so ist jedes k ein m.

Beweis

Beh. $\overset{a)}{\Leftrightarrow}$ $((m|n \wedge n|k) \Rightarrow m|k)$

$m|n$ bedeutet: $\exists s \in \mathbb{N}: \; m \cdot s = n$

$n|k$ bedeutet: $\exists t \in \mathbb{N}: \; n \cdot t = k$

$\Rightarrow k = n \cdot t = m \cdot \underbrace{s \cdot t}_{\in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow m|k$

$\square$

c) $n, m, k \in P$

Beh.: Wenn jedes m ein n ist und einige k kein n sind, so sind einige k kein m.

Beweis

Beh.: $\overset{a)}{\Leftrightarrow}$ $((n|m \wedge n \nmid k) \Rightarrow m \nmid k)$

$n|m$, d.h.: $\exists s \in \mathbb{N}: \; s \cdot n = m$ (i)

$n \nmid k$, d.h.: $\forall t \in \mathbb{N}: \; t \cdot n \neq k$ (ii)

Angenommen $m|k$, dann müsste es ein $u \in \mathbb{N}$ geben mit

$k = u \cdot m \overset{(i)}{=} u \cdot s \cdot n$ $\lightning$ zu (ii)

$\square$

Aufgabe 2.

Behauptung: In einem S-Term taucht das Symbol ')' genauso oft auf wie '('.

Beweis: Durch Induktion über den Termaufbau:

Sei $Z := \{t \in T_S | \ t \text{ hat genauso viele '(' wie ')'}\}$.

Dann gilt $Var \subseteq Z$ und $S_k \subseteq Z$, da diese gar keine Klammern enthalten.

Ist t von der Form $ft_1 \dots t_n$, mit $t_1, \dots, t_n \in Z$ so gilt auch $t \in Z$, da jedes t_i das Symbol '(' genauso oft enthält wie ')', und auch f nicht mehr von der einen Klammer als von der anderen hinzufügt (genau genommen gar keine).

Insgesamt folgt damit $Z = T_S$.

$\square$

Aufgabe 3.

a) Sei eine Sprache durch das Alphabet konstruiert das als einziges Symbol „•“ enthält. Eine endliche Folge von „•“ sei Kette genannt. Basiskette sei eine Kette, die entweder 2 Elemente hat oder deren Anzahl an Elementen ein Vielfaches von 11 sei.
Eine chinesische Kette sei wie folgt def.: jede Basiskette ist chinesisch und falls s und t chin. Ketten sind ist st eine chin. Kette

a) •••• ist eine chin. Kette aber keine Basiskette, ebenso ist
•••••• " " " " " "

b) •••
••••• } keine chin. Ketten

c) chin. Ketten sind all die Ketten, deren Anzahl an Elementen ≥ 10 sind oder deren Anzahl an Elementen in der Menge $\{2, 4, 6, 8\}$ liegt.

Aufgabe 4.

Aufgabe 4. Sei $S = S_R \cup S_F \cup S_K$ mit $S_R :=$, $S_F := \{\dot{m}, \dot{a}\}$, $S_K := \{\dot{e}\}$. Sei σ die Signatur mit $\sigma(\dot{m}) = \sigma(\dot{a}) = 2$. Wir interpretieren $\dot{m}$ als Multiplikation, $\dot{a}$ als Addition und $\dot{e}$ als neutrales Element. Wir möchten den informellen Term $x^2 + 2x + 1$ ableiten.

1. $\dot{e}$ nach (T1)
2. x nach (T2)
3. $\dot{a}xx$ nach (T3) mit $\dot{a}$ auf 2. und 2.
4. $\dot{m}xx$ nach (T3) mit $\dot{m}$ auf 2. und 2.
5. $\dot{a}\dot{m}xx\dot{a}xx$ nach (T3) mit $\dot{a}$ auf 4. und 3.
6. $\dot{a}\dot{a}\dot{m}xx\dot{a}xx\dot{e}$ nach (T3) mit $\dot{a}$ auf 1. und 5.

Aufgabe 5.

Mit A_S' hat sich für die S-Terme nichts verändert.

Es gilt also noch

2.4.2 (a): Für alle Terme t, t' gilt: t ist kein echtes Anfangsstück von t'

und

2.4.3 (a): $t_1, \dots, t_n$ und $t_1', \dots, t_m'$ Terme mit

$t_1 \dots t_n = t_1' \dots t_m'$

$\Rightarrow n = m$ und $t_i = t_i'$ für $1 \le i \le n$

Wir zeigen, dass für alle S-P-Ausdrücke φ, φ' gilt, dass φ kein echtes Anfangsstück von φ' ist:

Sei Z die Menge der S-P-Ausdrücke, für die diese Eigenschaft gilt.

(A1) Sei $\varphi' = t_1 \equiv t_2$, $\varphi = t_1' \equiv t_2' \zeta$ mit $\varphi' = \varphi$

$\Rightarrow t_1' = t_1$ und $t_2 = t_2' \zeta$

$\Rightarrow t_2 = t_2'$, $\zeta = \square$ (2.4.2 (a))

(A2) $\varphi' = R t_1 \dots t_n$, $\varphi = R t_1' \dots t_n' \zeta$ mit $\varphi' = \varphi$

$\Rightarrow t_1 \dots t_n = t_1' \dots t_n' \zeta$

$\Rightarrow t_i = t_i'$ für $1 \le i \le n$ und $\zeta = \square$ (2.4.3 (a))

(A4) $\varphi_1, \varphi_2 \in Z$. $\psi = \wedge \varphi_1 \varphi_2$, $\psi' = \wedge \varphi_1' \varphi_2' \zeta$ mit $\psi = \psi'$

$\Rightarrow \varphi_1 \varphi_2 = \varphi_1' \varphi_2' \zeta$ (genauso $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$)

$\overset{\varphi_1, \varphi_2 \in Z}{\Rightarrow} \varphi_1 = \varphi_1'$ und $\varphi_2 = \varphi_2' \zeta$ $\Rightarrow \varphi_2 = \varphi_2'$

(A3) $\varphi, \varphi' \in Z$, $\psi = \neg \varphi$, $\psi' = \neg \varphi' \zeta$

$\Rightarrow \varphi = \varphi' \zeta \overset{\varphi, \varphi' \in Z}{\Rightarrow} \varphi = \varphi'$

(A5) $\varphi', \varphi \in Z$, $x, x' \in Var$, $\psi = \forall x \varphi$, $\psi' = \forall x' \varphi' \zeta$ (genauso $\exists$)

$\Rightarrow x = x'$, $\varphi = \varphi' \zeta \Rightarrow \varphi = \varphi'$, $\zeta = \square$

Zeige nun 2.4.3 (b):

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ und $\varphi_1', \ldots, \varphi_m'$ S-P-Ausdrücke

mit $\varphi_1 \cdots \varphi_n = \varphi_1' \cdots \varphi_m'$

$\Rightarrow n = m$, $\varphi_i = \varphi_i'$ für $1 \leq i \leq n$

Angenommen $m \neq n$. OBdA: $m > n$.

dann gäbe es zu $1 \leq i \leq n$ Indizes $1 \leq j_1, \ldots, j_k \leq m$ mit

$\varphi_i = \varphi_{j_1}' \cdots \varphi_{j_k}'$

$\Rightarrow \varphi_{j_1}'$ wäre Anfangsstück von φ_i ↯

Mit 2.4.3 (a) und dem Neuen 2.4.3 (b) erhält man

2.4.4 (b), indem man (A1), (A2), (A3), (A4)', (A5)

für Ausdrücke wie im Satz

zeigt, wobei die Eigenschaft der Eindeutigkeit aus den

genannten Sätzen folgt.

$\square$