Studentische Lösungen zum Übungsblatt 10

Hier finden sich gute bis sehr gute Lösungen zu den Aufgaben, die von Studierenden abgegeben wurden. Die Autorinnen und Autoren der Lösungen haben zugestimmt, dass sie an dieser Stelle zur Verfügung gestellt werden.

Aufgabe 50.

Angenommen es gibt eine Menge A aller Ordinalzahlen, welche Φ erfüllen.

Sei α eine beliebige Ordinalzahl, da Φ unbeschränkt in den Ordinalzahlen ist gilt:

es ex. Ordinalzahl β mit $\alpha \in \beta$ und $\Phi(\beta)$ gilt

$\Rightarrow \beta \in A$

$\Rightarrow \alpha \in \bigcup A$

Da α beliebig war ist $\bigcup A$ die Menge aller Ordinalzahlen, die es nach VL nicht gibt.

Wäre A eine Menge so müsste $\bigcup A$ nach $\bigcup$-Axiom auch eine Menge sein $\lightning$

Aufgabe 51.

Beh: Jede normale Ordinalzahloperation hat viele Fixpunkte.

Bew: Sei F normale Ord.-z.-operation. Zunächst zeige man die Existenz von Fixpunkten. Sei α eine Ordinalzahl. OBdA ist α kein Fixpunkt, also $\alpha \neq F(\alpha)$, dann gilt $\alpha < F(\alpha)$, denn sonst wähle minimales α' mit $F(\alpha') < \alpha'$, dann ist aber wegen der Monotonie $\gamma := F(\alpha') < \alpha' \overset{(b)}{\Rightarrow} F(\gamma) < F(\alpha') = \gamma$, was ein Widerspruch zur Minimalität von α' ist.

Betrachte die ω-fache Anwendung von F auf α:
Def. rekursiv $\beta_0 := \alpha$, $\beta_{n+1} := F(\beta_n)$. Dann ist $\lambda := \bigcup_{n<\omega} \beta_n$ eine Limeszahl und es gilt

$$F(\lambda) \overset{(c)}{=} \bigcup \{F(\xi) : \xi \in \lambda\} = \bigcup_{n<\omega} F(\beta_n) = \bigcup_{n<\omega} \beta_{n+1} = \bigcup_{n<\omega} \beta_n = \lambda.$$

Also ist λ ein Fixpunkt.

Für jede Ordinalzahl α gilt also entweder α ist Fixpunkt oder die ω-fache Anwendung von F auf α ist ein Fixpunkt. Wegen der strengen Monotonie von F, kann jedem α injektiv ein Fixpunkt zugeordnet werden. $\square$

Aufgabe 52.

(52) a) <u>Beh:</u> $\alpha < \beta \rightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta$

<u>Bew:</u> Induktion nach β.

(1) $\beta = 0$ ✓

(2) $\beta = \gamma + 1$

Sei $\alpha < \beta = \gamma + 1$

<u>1. Fall:</u> $\alpha = \gamma$

$\Rightarrow \aleph_\alpha = \aleph_\gamma$

$\Rightarrow \aleph_{\beta+1} = \aleph(\aleph_\beta) > \aleph_\beta$ (es ex. Inj von $\aleph_\beta$ nach $\aleph_\beta$)

<u>2. Fall:</u> $\alpha < \gamma$

$\aleph_\alpha \overset{IV}{<} \aleph_\gamma < \aleph_{\gamma+1}$

$\Rightarrow \aleph_\alpha < \aleph_{\gamma+1}$ (transitivität)

(3) λ Limenzahl, $\alpha < \beta < \lambda \Rightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta$.

Sei $\delta < \lambda$. Betrachte $\aleph_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha$

$\Rightarrow \aleph_\delta \subseteq \bigcup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha$

$\Rightarrow \aleph_\delta \in \bigcup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha$ (Vereinigung Ord.z. ist Ord.z.)

$\Rightarrow \aleph_\delta < \aleph_\lambda$

b) <u>Beh:</u> $\alpha \leq \aleph_\alpha$ für alle Ord.z. α.

<u>Bew:</u>

(1) $\alpha = 0$ ✓ $(\emptyset \subseteq \aleph_0)$

(2) $\alpha \leq \aleph_\alpha$. Betr. $\alpha + 1$.

$\aleph_{\alpha+1} = \aleph(\aleph_\alpha) > \aleph_\alpha \geq \alpha$

$\Rightarrow \aleph_{\alpha+1} > \alpha$

$\Rightarrow \aleph_{\alpha+1} \geq \alpha + 1$

(3) λ Limenzahl, $\forall \alpha \in \lambda \;\; \alpha \leq \aleph_\alpha$

$\aleph_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha$

$\alpha \in \lambda \Rightarrow \alpha \in \aleph_{\alpha+1} \Rightarrow \alpha \in \aleph_\lambda$

$\Rightarrow \lambda \subseteq \aleph_\lambda \Rightarrow \lambda \leq \aleph_\lambda$

c) Beh: Falls $\aleph_\alpha \leq \beta < \aleph_{\alpha+1}$, so ist $\aleph_\alpha \sim \beta$.

Bew:

$\aleph_{\alpha+1} = \{\alpha ; \alpha \preceq \aleph_\alpha\}$

$\Rightarrow \beta \preceq \aleph_\alpha$, da $\beta \in \aleph_{\alpha+1}$

$\aleph_\alpha \leq \beta \Rightarrow \aleph_\alpha \subseteq \beta \Rightarrow f : \aleph_\alpha \to \beta : x \mapsto x$ ist Injektion

$\Rightarrow \aleph_\alpha \preceq \beta$

$\overset{CSB}{\Rightarrow} \aleph_\alpha \sim \beta$. $\square$

Aufgabe 53.

(53) Transfinite Induktion über den Rang

Sei $A \subseteq V_{\gamma+1}$ für ein γ Ord.z.

$*$
① Für alle $x \in V_{\gamma+1}$ mit $rg(x) = 0$ gilt $x \in A$

② falls für alle $x \in V_{\gamma+1}$ mit $rg(x) = \alpha \leq \gamma$ gilt $x \in A$, so gilt für alle $x \in V_{\gamma+1}$ mit $rg(x) = \alpha + 1$ $x \in A$

③ $\delta \in \gamma+1$ Limeszahl mit falls $rg(x) < \delta$, so $x \in A$, dann sind alle x mit $rg(x) = \delta$ in A.

$\Rightarrow A = V_{\gamma+1}$

Bew: Sei $A \subseteq V_{\gamma+1}$, γ Ord.z. mit ① + ② + ③.

Definiere $B = \{\alpha \leq \gamma+1 ; V_\alpha \subseteq A\} \subseteq \gamma+2$. Zeige $B = \gamma+2$ über Transfinite Induktion:

① $V_0 = \emptyset \subseteq A \Rightarrow 0 \in B$

② $\alpha \in B. \Rightarrow V_\alpha \subseteq A \overset{*②}{\Rightarrow} V_{\alpha+1} \subseteq A \Rightarrow \alpha+1 \in B$

③ λ Limeszahl mit $\forall \delta < \lambda$ $\delta \in B$.

$\Rightarrow V_\delta \subseteq A$ für alle $\delta \in \lambda$

$\overset{*③}{\Rightarrow} V_\lambda \subseteq A \Rightarrow \lambda \in B$ ($\lambda \neq \gamma+1$, da λ Limeszahl)

$\Rightarrow B = \gamma+2 \quad \Rightarrow \gamma+1 \in B \quad \Rightarrow V_{\gamma+1} \subseteq A$

$\Rightarrow V_{\gamma+1} = A$

(wegen Satz 3.7 kann man überhaupt erst $A \subseteq V_{\gamma+1}$ schreiben, weil es für alle $x \in A$ einen Rang gibt) $\square$

Aufgabe 54.

Behauptung. In ZF^0 folgt aus der Vergleichbarkeit von Kardinalitäten das Auswahlaxiom.

Beweis. Wir zeigen, dass jeder Menge wohlordenbar ist. Sei X eine Menge. Nach dem Satz von Hartogs gibt es eine Ordinalzahl α sodass $\alpha \not\preccurlyeq X$. Also gilt nach Voraussetzung, dass $X \preccurlyeq \alpha$. Dies induziert eine Wohlordnung auf X und so ist X wohlordenbar. Somit gilt das Auswahlaxiom. $\square$