Studentische Lösungen zum Übungsblatt 2

Hier finden sich gute bis sehr gute Lösungen zu den Aufgaben, die von Studierenden abgegeben wurden. Die Autorinnen und Autoren der Lösungen haben zugestimmt, dass sie an dieser Stelle zur Verfügung gestellt werden.

Aufgabe 6.

Aufgabe 6. Sei S eine Symbolmenge und seien die Funktion qt, die Mengen Q_n^s wie in der Aufgabe definiert.

Behauptung $L^s = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n^s$

Beweis Jede Formel aus $\phi \in L^s$ hat eine endliche Formelableitung. Dann gilt $qt(\phi) \leq$ Länge der Ableitung, da qt in jedem Schritt der Ableitung höchstens um 1 wächst. Damit ist $qt(\phi)$ für jede Formel ϕ beschränkt und somit liegt jede Formel in einem Q_n^s. Damit ist $L^s = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n^s$. □

Behauptung Die Mengen Q_n^s bilden eine echt aufsteigende Folge.

Beweis Nach Definition gilt $Q_n^s \subset Q_{n+1}^s$. Wir zeigen per Induktion nach n, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formel ϕ existiert, sodass genau $qt(\phi) = n$. Sei für den Induktionsanfang $n = 0$.Jede atomare Formel hat genau Quantorentiefe 0. Nehmen wir nun an, dass für alle $m \leq n$ die Behauptung gilt. Dann sei ϕ eine Formel mit $qt(\phi) = n$. Wir setzen $\psi = \forall x\phi$. Dann ist ψ eine Formel mit $qt(\psi) = qt(\phi) + 1 = n + 1$. Also gilt $Q_n^s \subsetneq Q_{n+1}^s$. □

Sei $Z \subset L^s$ eine Menge wie in der Aufgabe.

Behauptung Dann ist $Z = L^s$.

Beweis Wir zeigen, dass $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n^s$. Für Z gilt $Q_n^s \subset Z; \forall n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \subset Z \subset L^s$. Da $L^s = Q_n^s$ gilt also auch $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n^s = L^s$. □

Aufgabe 7.

Beh (Lemma 2.4.2 (b))**.** *Für alle Ausdrücke ϕ, ϕ' gilt: ϕ ist kein echtes Anfangsstück von ϕ'.*

Beweis. Sei Z:=$\{\phi$; für alle Ausdrücke ϕ, ϕ' gilt: ϕ ist weder ein echtes Anfangsstück von ϕ' noch ist ϕ' ein echtes Anfangsstück von $\phi\}$.

(A1) Sei ϕ ein Ausdruck der Form $\phi = t_1 \equiv t_1$ mit den S-Termen t_1 und t_2.
Angenommen es gibt einen Ausdruck ϕ' mit $\phi\zeta = \phi'$ für $\zeta \neq \square$, also $\phi \notin Z$.
Dann ist das Zeichen $\equiv$ auch Teil des S-Ausdrucks ϕ' und auf beiden Seiten dieses Zeichens stehen S-Terme, das heißt $\phi' = t_1' \equiv t_2'$. Daraus folgt mit Lemma 2.4.3 (a) dass $t_1 = t_1'$ und es muss $t_2\zeta = t_2'$ sein, also der Term t_2 ist ein echtes Anfangsstück des Terms t_2'. Nach Lemma 2.4.2 (a) ist jedoch kein Term ein echtes Anfangsstück eines anderen Terms, es ist also $t_2 = t_2'$ und $\zeta = \square$. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass $\zeta \neq \square$ ist, also gilt für jeden nach der Regel (A1) gebildeten Ausdruck ϕ, dass $\phi \in Z$.

(A2) Sei ϕ ein Ausdruck und es sei $\phi = Rt_1, \ldots, t_n$, wobei $t_1, \ldots, t_n$ S-Terme sind und R ein n-stelliges Relationssymbol aus S ist.

Angenommen es gibt einen S-Ausdruck ϕ' mit $\phi\zeta = \phi'$ für $\zeta \neq \square$, also $\phi \notin Z$. Dann fängt auch ϕ' mit dem Symbol R an, es ist also $\phi' = Rt'_1 \dots t'_n$ und $t'_1, \dots t'_n$ sind S-Terme, da auch ϕ' nach der Regel (A2) mit dem n-stelligen Relationssymbol R gebildet wurde. Also ist $t_1, \dots, t_n\zeta = t'_1, \dots t'_n$ und es muss nach Lemma 2.4.3 (a) $t_1 = t'_1$, $t_2 = t'_2$, $\dots$, $t_{n-1} = t'_{n-1}$ und somit $t_n\zeta = t'_n$ sein. Nach Lemma 2.4.2 (a) ist jedoch kein Term ein echtes Anfangsstück eines anderen Terms; damit ist t_n kein echtes Anfangsstück des Terms t'_n, vielmehr ist $t_i = t'_i$ für jedes $1 \leq i \leq n$ und es muss $\zeta = \square$ sein. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Annahme, dass $\zeta \neq \square$ ist, also gilt für jeden nach der Regel (A2) gebildeten S-Ausdruck ϕ, dass $\phi \in Z$.

(A3) Sei ψ ein Ausdruck der Art $\phi = \neg\psi$ mit dem Ausdruck $\psi \in Z$.
Angenommen es gibt einen Ausdruck ϕ' mit $\phi\zeta = \phi'$ für $\zeta \neq \square$, also $\phi \notin Z$.
Dann ist $\phi' = \neg\psi'$ für einen Ausdruck ψ' und ψ ist ein echtes Anfangsstück von ψ'. Nach Voraussetzung ist aber $\psi \in Z$ und es muss $\zeta = \square$ sein. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Annahme, dass $\zeta \neq \square$ ist, also gilt für jeden nach der Regel (A3) gebildeten S-Ausdruck ϕ, dass $\phi \in Z$.

(A4) Seien ψ und χ Ausdrücke und sei $\phi = \psi * \chi$ mit $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Weiterhin seien die Ausdrücke $\psi, \chi \in Z$.
Angenommen es gibt einen Ausdruck ϕ' mit $\phi\zeta = \phi'$ für $\zeta \neq \square$, also $\phi \notin Z$.
Dann ist das Zeichen $*$ auch Teil des Ausdrucks ϕ' und auf beiden Seiten dieses Zeichens stehen S-Ausdrücke, d.h. $\phi' = \psi' * \chi'$. Nach Lemma 2.4.3(b) ist dann $\psi = \psi'$ und es muss $\chi\zeta = \chi'$ sein. Nach Voraussetzung ist aber $\chi \in Z$ und somit ist $\zeta = \square$. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Annahme, dass $\zeta \neq \square$ ist, also gilt für jeden nach der Regel (A4) gebildeten S-Ausdruck ϕ, dass $\phi \in Z$.

(A5) Sei ψ ein S-Ausdruck, x sei eine Variable und sei $\phi = *x\psi$ mit $* \in \{\forall, \exists\}$. Weiterhin sei $\psi \in Z$.
Angenommen es gibt einen Ausdruck ϕ' mit $\phi\zeta = \phi'$ für $\zeta \neq \square$, also $\phi \notin Z$.
Dann ist das Zeichen $*$ auch Teil des Ausdrucks ϕ' und es ist $\phi' = *x'\psi'$, wobei x' eine Variable und ψ' ein S-Ausdruck ist. Nach Lemma 2.4.3(a) ist dann $x = x'$ und es muss $\psi\zeta = \psi'$ sein. Nach Voraussetzung ist aber $\psi \in Z$ und somit folgt $\zeta = \square$.

Dies steht jedoch im Widerspruch zur Annahme, dass $\zeta \neq \square$ ist, also gilt für jeden nach der Regel (A5) gebildeten Ausdruck ϕ, dass $\phi \in Z$.

Da alle Ausdrücke aus L^S durch endliche Anwendung der Regeln (A1) bis (A5) gebildet werden, folgt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 8.

In folgender Aufgabe wird φ ☺ϕ statt (φ ☺ϕ) geschrieben wobei ☺$\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

Behauptung i)Ausdrücke lassen sich nicht mehr eindeutig in ihre Teilausdrücke zerlegen
ii)Die Funktion TA aus 2.4.5 b) ist mit den neuen Bedingungen keine Funktion

Beweis

i) Wir definieren ☺ $= \neg\varphi \wedge \varphi$ *und* $\phi = \varphi \wedge \varphi$

FRAGE *Ist* ☺ *eine Kontradiktion oder* $\neg\varphi$*?*

<u>Fall 1</u> ☺ *ist eine Kontradiktion*
$\Rightarrow \phi$ *ist <u>kein</u> Teilausdruck von* ☺

<u>Fall 2</u> ☺ $= \neg\varphi$
$\xRightarrow{\varphi = \varphi \wedge \varphi}$ ϕ *ist <u>ein</u> Teilausdruck von* ☺

ii) Sei $\heartsuit = \forall v_0 \varphi \wedge \phi \in L^S$
Betrachten wir nun TA($\heartsuit$*)*

$$\underbrace{\{\heartsuit, \varphi \wedge \phi, \varphi, \phi\}}_{\leftmoon} = TA(\heartsuit) = \underbrace{\{\overbrace{\forall v_0 \varphi \wedge \phi}^{\heartsuit}, \forall v_0 \varphi, \phi\}}_{\boxtimes}$$

Offensichtlich gilt $\leftmoon \neq \boxtimes$
Außerdem sehen wir das es nicht klar ob φ *zu dem Quantor oder zu der Konjugation gehört. Damit ist das Bild von* $\heartsuit$ *nicht eindeutig bestimmt*

$\Rightarrow TA(\heartsuit) = \{\leftmoon, \boxtimes\}$ $\lightning$

$\square$

Aufgabe 9.

(a) $F := \forall v_1 f v_0 v_1 \equiv v_0$.

Interpretation, die den Ausdruck erfüllt: Wähle $\mathfrak{I} = ((\mathbb{R}, \alpha), \beta)$ mit
$\alpha(f) := \Big((x, y) \mapsto x \cdot y\Big)$ und $\beta(v_0) = 0$:
$\mathfrak{I} \models F \;\Leftrightarrow\;$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\mathfrak{I}\frac{a}{v_1} \models f v_0 v_1 \equiv v_0$
$\Leftrightarrow\;$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\mathfrak{I}\frac{a}{v_1}(f v_0 v_1) = \mathfrak{I}\frac{a}{v_1}(v_0)$
$\Leftrightarrow\;$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha(f)(\mathfrak{I}\frac{a}{v_1}(v_0), \mathfrak{I}\frac{a}{v_1}(v_1)) = \mathfrak{I}\frac{a}{v_1}(v_0)$
$\Leftrightarrow\;$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $0 \cdot a = 0$.
Dies ist erfüllt.
Interpretation, die den Ausdruck nicht erfüllt: $\mathfrak{I} = ((\mathbb{R}, \alpha), \beta)$ mit
$\alpha(f) := \Big((x, y) \mapsto x \cdot y\Big)$ und $\beta(v_0) = 1$:
$\mathfrak{I} \models \forall v_1 f v_0 v_1 \equiv v_0 \overset{\text{analog}}{\Leftrightarrow}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $1 \cdot a = 1$ (nicht erfüllt).

(b) $F := \exists v_0 \forall v_1 f v_0 v_1 \equiv v_1$.

Erfüllende Interpretation: $\mathfrak{I} = ((\mathbb{R}, \alpha), \beta)$ mit
$\alpha(f) := \Big((x, y) \mapsto x + y\Big)$ und β beliebig:
$\mathfrak{I} \models \exists v_0 \forall v_1 f v_0 v_1 \equiv v_1 \;\Leftrightarrow\;$ es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ mit $\mathfrak{I}\frac{a}{v_0} \models \forall v_1 f v_0 v_1 \equiv v_1$
$\Leftrightarrow\;$ es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ mit: für alle $b \in \mathbb{R}$ gilt $\mathfrak{I}\frac{a}{v_0}\frac{b}{v_1} \models f v_0 v_1 \equiv v_1$
$\Leftrightarrow\;$ es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ mit: für alle $b \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha(f)(\mathfrak{I}\frac{a}{v_0}\frac{b}{v_1}(v_0), \mathfrak{I}\frac{a}{v_0}\frac{b}{v_1}(v_1)) = \mathfrak{I}\frac{a}{v_0}\frac{b}{v_1}(v_1)$
$\Leftrightarrow\;$ es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ mit: für alle $b \in \mathbb{R}$ gilt $a + b = b$
Dies gilt ($a = 0$).
Nichterfüllende Interpretation: $\mathfrak{I} = ((\mathbb{R}, \alpha), \beta)$ mit
$\alpha(f) := \Big((x, y) \mapsto 2x + 2y\Big)$ und β beliebig:
$\mathfrak{I} \models F \overset{\text{analog}}{\Leftrightarrow}$ es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ mit: für alle $b \in \mathbb{R}$ gilt $2a + 2b = b$ (nicht erfüllt).

(c) $F := \exists v_0(Pv_0 \land \forall v_1 Pfv_0v_1)$.
Erfüllende Interpretation: Wähle $\mathfrak{I} = ((A, \alpha), \beta)$ mit $\alpha(P) = A$,
wobei $A, \alpha(f), \beta$ beliebig sind.
Es ist durch Herleitung wie zuvor schnell ersichtlich, dass diese Interpretation den Ausdruck modelliert, da $\alpha(P)$ auf alle Elemente in A zutrifft.
Für eine nichterfüllende Interpretation wähle stattdessen $\alpha(P) = \emptyset$.

Aufgabe 10.

Behauptung: Zu jedem positiven S-Ausdruck, gibt es eine S-Interpretation, die ihn erfüllt.

Beweis:

Sei S eine Symbolmenge. Bezeichne mit P die Menge aller positiven S-Ausdrücke.

Betrachte die S-Interpretation $(A, \mathfrak{a}, \beta) =: \mathfrak{I}$ mit dem Träger $A = \{1\}$, und der auf S definierten Abbildung $\mathfrak{a}$ mit:

Für jedes n-stellige Relationssymbol $R \in S_R$ ist $\mathfrak{a}(R) = \{1\}^n$.
Für jedes n-stellige Funktionssymbol $f \in S_R$ ist $\mathfrak{a}(f): \{1\} \longrightarrow \{1\}$ die Funktion mit $(\mathfrak{a}(f))(1, .., 1) = 1$.

Für jede Konstante $c \in A$ ist $\mathfrak{a}(c) = 1 \in A$.

Die Belegung β sei die Abbildung $\beta: \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \longrightarrow A$ mit $\beta(v_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir betrachten nun einen modifizierten Ausdruckskalkül, indem (A3) gelöscht ist, und (A4) lautet: Sind φ und ψ S-Ausdrücke, so sind $(\varphi \land \psi)$ und $(\varphi \lor \psi)$ S-Ausdrücke.
Man beweist analog, dass ein analoges Lemma zur Induktion über den Formelaufbau in diesem Kalkül gilt.
Wir beweisen die zuzeigende Behauptung nun per Induktion über den Formelaufbau in diesem modifizierten Kalkül.

Betrachte dafür die Menge $Z := \{\varphi \in P \mid$ die Interpretation $\mathfrak{I}$ erfüllt $\varphi\}$

- Sei $\varphi \in P$ ein Ausdruck der Gestalt $\varphi = t_1 \equiv t_2$ für $t_1, t_2 \in T^S$.

Mit Satz 2.4.4. (a) sind t_1 und t_2 jeweils entweder eine Variable, oder eine Konstante, oder von der Gestalt $f\, s_1 \ldots s_n$ mit $s_1, \ldots, s_n \in T^S$.
Aufgrund der Definition von $\mathfrak{I}$ gilt in jedem Fall $\mathfrak{I}(t_1) = 1 = \mathfrak{I}(t_2)$
Per Definition der Modellbeziehung folgt $\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2$.
Die Interpretation $\mathfrak{I}$ erfüllt also φ, also $\varphi \in Z$

- Sei $\varphi \in P$ ein Ausdruck der Gestalt $\varphi = Rt_1 \dots t_n$ mit R n-stelliges Relationssymbol und $t_1, \dots, t_n \in T^S$.

Mit Satz 2.4.4. (a) sind alle t_i mit $i \in \underline{n} \setminus \{0\}$ jeweils eine Variable, oder eine Konstante, oder von der Gestalt $f s_1 \dots s_n$ mit $s_1, \dots, s_n \in T^S$. Sei $i \in \underline{n} \setminus \{0\}$ beliebig.
Aufgrund der Definition von $\mathfrak{I}$ gilt in jedem Fall $\mathfrak{I}(t_i) = 1$.

Also: $\mathfrak{I}(t_1), \dots \mathfrak{I}(t_n) \in \{1\}^n = \mathfrak{a}(R)$.

Per Definition der Modellbeziehung folgt $\mathfrak{I} \models Rt_1 \dots t_n$
Die Interpretation $\mathfrak{I}$ erfüllt also φ, also $\varphi \in Z$.

- Seien $\varphi, \psi \in Z$.
  Dann gilt per Definition von Z, dass $\mathfrak{I} \models \varphi$ und $\mathfrak{I} \models \psi$.
  Insbesondere gilt auch (einschließendes Oder): $\mathfrak{I} \models \varphi$ oder $\mathfrak{I} \models \psi$.
  Mit Definition 3.3. 2. schließen wir $\mathfrak{I} \models (\varphi \wedge \psi)$ und $\mathfrak{I} \models (\varphi \vee \psi)$.
- Sei $\varphi \in Z$, und v_0 eine Variable.
  Sei $a \in A$ beliebig. Dann gilt $a = 1$.
  Mit dem (modifizierten) Satz 2.4.4. (b) wissen wir, dass
  φ von der Form (1), oder (2), oder (4) oder (5), oder (8), oder (9) ist (vgl. Seite 21, EFT)
  In jedem Fall gilt $\mathfrak{I}\frac{a}{v_0} = \mathfrak{I}\frac{1}{v_0} \models \varphi$ (aufgrund der Def. von $\mathfrak{I}$).

Da $a \in A$ beliebig gewählt war, folgt:
Für alle $a \in A$ ist $\mathfrak{I}\frac{a}{v_0} \models \varphi$.

Also mit Def. 3.3.2. schließen wir:
$\mathfrak{I}\ \forall v_0 \varphi \models \mathfrak{I}$.

Da $\forall v_0 \varphi \in P$, folgt $\forall v_0 \varphi \in Z$.

- Analog behandelt man den Existenzquantor.

Mit dem (modifizierten) Lemma über Induktion über den Formelaufbau schließen wir: $P = Z$.

Hieraus folgt die Behauptung.

$\dashv$