Studentische Lösungen zum Übungsblatt 4

Hier finden sich gute bis sehr gute Lösungen zu den Aufgaben, die von Studierenden abgegeben wurden. Die Autorinnen und Autoren der Lösungen haben zugestimmt, dass sie an dieser Stelle zur Verfügung gestellt werden.

Aufgabe 16.

Behauptung. Jede $*$-universelle Formel ist universell.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung per Induktion über den Formelaufbau. Sei

$$Z := \{\varphi \in L^S : \varphi \text{ ist universell oder nicht } *\text{-universell}\}.$$

$\varphi = t_1 \equiv t_2$: Dann ist φ quantorenfrei und somit universell. Also $\varphi \in Z$.

$\varphi = Rt_1 \dots t_n$: Dann ist φ quantorenfrei und somit universell. Also $\varphi \in Z$.

$\varphi = \neg\psi$ mit $\psi \in Z$: Dann ist φ nicht $*$-universell und somit $\varphi \in Z$.

$\varphi = (\psi \vee \chi)$ mit $\psi, \chi \in Z$: Falls ψ oder χ nicht $*$-universell ist, so ist auch $(\psi \vee \chi)$ nicht $*$-universell. Also können wir annehmen, dass ψ und χ $*$-universell sind. Dann sind ψ und χ nach der IV universell. Somit ist auch $(\psi \vee \chi)$ universell. Also $\varphi \in Z$. Analog für $\varphi = (\psi \wedge \chi)$.

$\varphi = (\psi \to \chi)$ mit $\psi, \chi \in Z$: Dann ist φ nicht $*$-universell und somit $\varphi \in Z$. Analog für $\varphi = (\psi \leftrightarrow \chi)$.

$\varphi = \forall x\psi$ mit $\psi \in Z$: Wir können wieder oBdA annehmen, dass ψ $*$-universell ist. Dann ist ψ nach der IV universell. Somit ist auch $\forall x\psi$ universell. Also $\varphi \in Z$.

$\varphi = \exists x\psi$ mit $\psi \in Z$: Dann ist φ nicht $*$-universell und somit $\varphi \in Z$.

Insgesamt ist $Z = L^S$. Somit ist jede $*$-universelle Formel universell. $\square$

Die Umkehrung gilt nicht. Betrachte zum Beispiel die Formel $\varphi = \neg x \equiv x$. Dann ist φ quantorenfrei und somit universell. Aber φ enthält $\neg$ und ist daher nicht $*$-universell.

Aufgabe 17.

(17) Sei $S = \{\dot{0}, \dot{+}, \dot{\times}\}$, $A = \mathbb{Z}$ und $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0)$, $S_0 = \emptyset$, $S_1 = \{\dot{0}\}$, $S_2 = \{\dot{0}, \dot{+}\}$, $S_3 = S$

und sei $\mathfrak{A}_i$ das S_i Redukt von $\mathfrak{A}$ für $i \in \{1,2,3\}$, dann gilt:

	$\mathfrak{A}_0$	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_3$
$X_0 = \{0\}$	x	✓	✓	✓
$X_1 = \{1\}$	x	x	x	✓
$X_2 = 2\mathbb{Z}$	x	x	✓	✓

wobei x für X_i ist nicht $\mathfrak{A}_{S_i}$-def. steht und ✓ für X_i ist $\mathfrak{A}_{S_i}$-definierbar.

<u>Bew</u>: X_0, X_1, X_2 sind nicht S_0 definierbar:

$\pi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n+1$ ist ein S_0-Isomorphismus (da $S = \emptyset$) also ist X_0, X_1, X_2 nicht S_0 definierbar, denn nach VL gilt: Ist X_i S_0 definierbar und $a \in X_i$, so auch: $\pi(a) \in X_i$ ↯.

X_0 ist S_1 def. mit $\varphi := x_1 \equiv \dot{0}$, dann gilt: $a \in \{0\}$ gdw. $a = 0$ gdw. $\mathfrak{A}\frac{a}{x_1} \models \varphi$

X_1, X_2 sind nicht S_1 def.: Betrachte dazu $\pi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x = 2 \\ 2, & x = 1 \\ x, & \text{sonst} \end{cases}$, dann ist π ein S_1-Isom. (da ein S_1-Iso. um 0 auf 0 abbilden muss)

Wieder gilt: X_1 bzw. X_2 S_1 def., so:

$a \in X_1$ gdw. $\pi(a) \in X_1$ bzw. $a \in X_2$ gdw. $\pi(a) \in X_2$. ↯

X_0 ist S_2 def. nach Koinzidenz-Lemma und X_2 ist S_2 definierbar mit $\psi = \exists y\ x_1 \equiv y \dot{+} y$

dann gilt: $a \in X_2$ gdw. a gerade Zahl gdw. es gibt $b \in \mathbb{Z}$ mit $a = b + b$ gdw. $\mathfrak{A}\frac{a}{x_1} \models \psi$

X_1 ist nicht S_2 def., betrachte wieder S_2-Iso.: $\pi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto -x$ (ist Iso wg. $\pi(x+y) = -x-y = \pi(x) + \pi(y)$, und $\pi(0) = 0$

Wieder folgt: X_1 S_2 def., so wäre $\pi(1) = -1 = \pi(1) \in X_1$ ↯.

Nach Koinz.-lemma ist X_0 und X_2 S_3 def. und X_1 ist auch S_3 def. mit $\chi := \forall y\; y \dot{\times} x_1 \equiv y$

dann: $a \in X_1$ gdw. $a = 1$ gdw. f.a. $b \in \mathbb{Z}$: $b \cdot a = b$ gdw. $\mathcal{A} \frac{a}{x_1} \models \chi$. □

Aufgabe 18.

a) NEIN!

Ich zeige: $\alpha^*(R)$ ist nicht S-definierbar

Definiere $\pi: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ q \mapsto -q$, dann ist π ein Automorphismus, da π bijektiv, $\pi(0) = 0$ und $\pi(x+y) = \pi(x) + \pi(y)$.

Aber:

$$(1,2) \in \alpha^*(<) \quad \text{und} \quad (\pi(1), \pi(2)) = (-1,-2) \notin \alpha^*(R)$$

Also folgt mit ⊛ aus Aufgabe 17 das $\alpha^*(R)$ nicht S-definierbar ist.

b) JA!

i) $(\mathbb{Q}, +, Pos)$ ist Redukt von $(\mathbb{Q}, +, Pos, <)$

ii) Sei $\varphi = \exists x_3\ (Pos\ x_3 \wedge x_1 + x_3 \equiv x_2)$, dann gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \frac{a_1\ a_2}{x_1\ x_2} \iff \text{es ex. } b \in \mathbb{Q}: \ Pos\ b \ \text{und} \ a_1 + b = a_2$$

$$\iff a_1 < a_2$$

$$\iff (a_1, a_2) \in \alpha^*(<)$$

Also ist $\alpha^*(R)$ eine S-definierbare Teilmenge.

c) Nein!

Ich zeige: $\alpha^*(R)$ ist nicht S-definierbar.

Definiere $\pi: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $q \mapsto \frac{1}{q}$, $0 \mapsto 0$, dann ist π ein Automorphismus, da π bijektiv ist, $\pi(0) = 0$ und

$$\forall p, q \in \mathbb{Q}: \ \pi(p \cdot q) = \frac{1}{p \cdot q} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q} = \pi(p) \cdot \pi(q)$$

Aber:

$$(1,2) \in \alpha^*(<) \quad \text{und} \quad (\pi(1), \pi(2)) = (1, \tfrac{1}{2}) \notin \alpha^*(<)$$

Also folgt mit ⊛ aus Aufgabe 17 das $\alpha^*(R)$ nicht S-definierbar ist.

Aufgabe 19.

(19) Behauptung

Wir definieren $\exists^{=1} x \varphi$ als Abkürzung für $\exists x(\varphi \wedge \forall y(\varphi\frac{y}{x} \to y \equiv x))$, wobei $y \notin$ frei φ. Dann gilt für jede Interpretation $\mathfrak{I} = (A, \alpha, \beta)$, dass $\mathfrak{I} \models \exists^{=1} x \varphi$ genau dann, wenn es genau ein $a \in A$ gibt mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$.

Beweis

Es gibt genau ein $a \in A$ mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$

$\Longleftrightarrow$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$ und für alle $b \in A$ mit $\mathfrak{I}\frac{b}{x} \models \varphi$ gilt $b = a$

$\Longleftrightarrow$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$ und für alle $b \in A$ gilt $\mathfrak{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y} \models (\varphi\frac{y}{x} \to y = x)$

$\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{I} \models \exists x(\varphi \wedge \forall y(\varphi\frac{y}{x} \to y \equiv x))$.

$\square$

Aufgabe 20.

Behauptung Mit Definitionen wie in Aufgabe 3.8.9.

(a) $\exists x \exists y(Pxu \wedge Pyv)\frac{u\,u\,u}{x\,y\,v} = \exists x \exists y(Pxu \wedge Pyu)$

(b) $\exists x \exists y(Pxu \wedge Pyv)\frac{v\ fuv}{u\ v} = \exists x \exists y(Pxv \wedge Pyfuv)$

(c) $\exists x \exists y(Pxu \wedge Pyv)\frac{u\ x\ fuv}{x\ u\ v} = \exists w \exists y(Pwx \wedge Pyfuv)$

(d) $(\forall x \exists y(Pxy \wedge Pxu) \vee \exists u fuu \equiv x)\frac{x\ fxy}{x\ u} = \forall v \exists w(Pvw \wedge Pvfxy) \vee \exists u fuu \equiv x$

Beweis (a) $\exists x \exists y(Pxu \wedge Pyv)\frac{u\,u\,u}{x\,y\,v}$

$= \exists x[\exists y(Pxu \wedge Pyv)\frac{u\,x}{v\,x}]$

$= \exists x[\exists y(Px\frac{u\ x}{v\ x}u\frac{u\ x}{v\ x} \wedge Py\frac{u\ x}{v\ x}v\frac{u\ x}{v\ x}]$

$= \exists x[\exists y(Pxu \wedge Pyu)]$

$= \exists x \exists y(Pxu \wedge Pyu)$

(b) $\exists x \exists y(Pxu \wedge Pyv)\frac{v\ fuv}{u\ v}$

$= \exists x[\exists y(Pxu \wedge Pyv)\frac{v\ fuv\ x}{u\ v\ x}]$

$= \exists x[\exists y(Px\frac{v\ fuv\ x}{u\ v\ x}u\frac{v\ fuv\ x}{u\ v\ x} \wedge Py\frac{v\ fuv\ x}{u\ v\ x}v\frac{v\ fuv\ x}{u\ v\ x}]$

$= \exists x \exists y(Pxv \wedge Pyfuv)$

(c) $\exists x \exists y(Pxu \wedge Pyv)\frac{u\ x\ fuv}{x\ u\ v}$

$= \exists w[\exists y(Pxu \wedge Pyv)\frac{x\ fuv\ w}{u\ v\ x}]$

$= \exists w[\exists y(Px\frac{x\ fuv\ w}{u\ v\ x}u\frac{x\ fuv\ w}{u\ v\ x} \wedge Py\frac{x\ fuv\ w}{u\ v\ x}v\frac{x\ fuv\ w}{u\ v\ x})]$

$= \exists w \exists y(Pwx \wedge Pyfuv)$

(d)schreibe hierfür zunächst $\forall x\varphi$ um in $\neg\exists x\neg\varphi$:

$(\forall x \exists y(Pxy \wedge Pxu) \vee \exists u fuu \equiv x)\frac{x\ fxy}{x\ u}$

$= (\neg\exists x \neg\exists y(Pxy \wedge Pxu) \vee \exists u fuu \equiv x)\frac{x\ fxy}{x\ u}$

$= \neg\exists x \neg\exists y(Pxy \wedge Pxu)\frac{x\ fxy}{x\ u} \vee \exists u fuu \equiv x\frac{x\ fxy}{x\ u}$

$= \neg\exists v[\neg\exists y(Pxy \wedge Pxu)\frac{fxy\ v}{u\ x}] \vee \exists u[fuu \equiv x\frac{x}{x}]$

$= \neg\exists v[\neg\exists w(Pxy \wedge Pxu)\frac{fxy\ v\ w}{u\ x\ y}] \vee \exists u[fuu \equiv x\frac{x}{x}]$

$= \neg\exists v[\neg\exists w(Pvw \wedge Pvfxy)] \vee \exists u fuu \equiv x$

$= \forall v \exists w(Pvw \wedge Pvfxy) \vee \exists u fuu \equiv x$

$\square$