

Studentische Lösungen zum Übungsblatt 6

Hier finden sich gute bis sehr gute Lösungen zu den Aufgaben, die von Studierenden abgegeben wurden. Die Autorinnen und Autoren der Lösungen haben zugestimmt, dass sie an dieser Stelle zur Verfügung gestellt werden.

Aufgabe 27.

Aufgabe 27: Behauptung: (a) Es gibt x, y mit $\bigcup(x \cap y) \neq (\bigcup x) \cap (\bigcup y)$.

Allerdings ist $\bigcup(x \cap y) \subseteq (\bigcup x) \cap (\bigcup y)$ immer erfüllt.

(b) Es gilt $\forall x \ x \subseteq \text{Pot}(\bigcup x)$, wobei sowohl Gleichheit als auch Ungleichheit eintreten kann. Außerdem gilt $x = \bigcup \text{Pot}(x)$.

Beweis:

(a): Sei beispielsweise $x := \{\{z_1\}\}$ und $y := \{\{z_1, z_2\}\}$.

Dann ist $x \cap y = \emptyset$ und somit auch $\bigcup(x \cap y) = \emptyset$. Aber:

$\bigcup x = \{z_1\}$ und $\bigcup y = \{z_1, z_2\} \Rightarrow (\bigcup x) \cap (\bigcup y) = \{z_1\}$.

Beweis von ' \subseteq ': Sei $z \in \bigcup(x \cap y)$. Dann existiert ein $a \in x \cap y$ mit $z \in a$.

Damit ist sowohl $\exists a : a \in x \wedge z \in a$ als auch $\exists a : a \in y \wedge z \in a$ erfüllt,

z liegt also in $(\bigcup x) \cap (\bigcup y)$.

(b): Sei $z \in x \stackrel{\text{Def. } \bigcup x}{\Rightarrow} z \subseteq \bigcup x \stackrel{\text{Def. Pot}(\cdot)}{\Rightarrow} z \in \text{Pot}(\bigcup x)$.

Gleichheit tritt zum Beispiel dann ein, wenn $x = \{\emptyset\}$ ist:

$x = \{\emptyset\} \Rightarrow \bigcup x = \emptyset \Rightarrow \text{Pot}(\bigcup x) = \{\emptyset\} = x$.

Ungleichheit hingegen tritt zum Beispiel ein, wenn $\emptyset \notin x$,

denn wir haben immer $\emptyset \in \text{Pot}(\cdot)$, also kann $x = \text{Pot}(\bigcup x)$ nicht gelten.

Beweis von $x = \bigcup \text{Pot}(x)$:

' \subseteq ': Sei $z \in x$. Zu zeigen ist $\exists \hat{x} : \hat{x} \in \text{Pot}(x)$ und $z \in \hat{x}$.

Dies ist erfüllt für $\hat{x} := \{z\}$.

' \supseteq ': Sei $z \in \bigcup \text{Pot}(x)$. Zu zeigen ist $z \in x$.

Wir wissen: $\exists \hat{x} : \hat{x} \in \text{Pot}(x)$ und $z \in \hat{x}$. Aus $\hat{x} \in \text{Pot}(x)$ folgt $\hat{x} \subseteq x$, und mit $z \in \hat{x}$ dann die Behauptung.

□

Aufgabe 28.

Behauptung. Es gibt eine Struktur \mathfrak{A} so, dass in \mathfrak{A} das Extensionalitäts-, das Aussonderung- und das kleine Vereinigungsaxiom gilt, aber nicht das große Vereinigungsaxiom.

Beweis. Sei $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, F)$ mit $F := \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), \dots\}$. Sei nun $\mathfrak{A} = (A, E)$ mit $A \supset \mathbb{N}$ und $E \supset F$ so gewählt, dass:

- (i) Wenn $X \subset \mathbb{N}$ nur endlich vielen Primzahlen hat, dann existiert ein $\mathfrak{Q} \in A \setminus \mathbb{N}$ mit $n \in X \iff nE\mathfrak{Q}$.
- (ii) Wenn $\mathfrak{Q} \in A \setminus \mathbb{N}$, dann hat $\{n \in \mathbb{N} \mid nE\mathfrak{Q}\}$ nur endlich viele Primzahlen.
- (iii) Wenn $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}' \in A \setminus \mathbb{N}$ mit $nE\mathfrak{Q} \iff nE\mathfrak{Q}'$, dann $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}'$.

Ein A' und E' so, dass (i) gilt, lässt sich sicherlich konstruieren. Durch Aussortieren von Elementen aus A' und E' lässt sich daraus \mathfrak{A} wählen. Diese Struktur \mathfrak{A} erfüllt das Extensionalitäts-, das Aussonderungs- und das kleine Vereinigungsaxiom.

Sei nun $q \in A$ so, dass nEq gdw. n keine Primzahl ist. Insbesondere gilt damit für jede Primzahl p , dass $(p+1)Eq$, außerdem nach Definition von F , dass $pE(p+1)$. Angenommen nun das große Vereinigungsaxiom gilt, so ist $pE \cup q$ für alle Primzahlen p , aber dies steht im Widerspruch zur Definition von \mathfrak{A} . \square

Aufgabe 29.

Wähle $A = \{a\}$ und $E = \emptyset$ und $\mathcal{U} = (A, E)$

Ext gilt dann, da es nur eine Menge gibt. Aus gilt da Aus nur für $a = \emptyset$ überprüft werden muss und $z \in \emptyset \leftrightarrow z \in \emptyset$ gilt.

Ferner gelten \cup und \cup da alle Vereinigungen von einer Mengen diese Menge ergeben. Jedoch erfüllt \mathcal{U} nicht einer, da es keine $a_e \in A$ gibt mit $a_e = \{a\}$. Also gilt auch nicht Paar.

Aufgabe 30.

Wir definieren rekursiv eine Folge von endlichen S -Strukturen. Seien $A_0 := \{0\}$, $E_0 := \emptyset$ und $\mathfrak{A}_0 := (A_0, E_0)$. Angenommen, $\mathfrak{A}_i := (A_i, E_i)$ ist bereits definiert und A_i ist endlich mit $A_i = \{0, \dots, n_i\}$. Sei $Z_i := [A_i]^{\leq i} := \{X \subseteq A_i : |X| \leq i\}$ die Menge der höchstens i -elementigen Teilmengen von A_i . Da A_i endlich ist, ist auch Z_i endlich. Wir nennen ein Element $X \in Z_i$ *bedient*, wenn es ein $b \in A_i$ gibt, sodass für alle $a \in A_i$ gilt $a \in X$ genau dann, wenn $aE_i b$.

Sei $N_i := \{X \in Z_i : X \text{ is nicht bedient}\}$ die Menge der nicht bedienten Elemente aus Z_i . Dann ist N_i endlich und wir schreiben $k_i := |N_i|$ und $N_i := \{X_1, \dots, X_{k_i}\}$. Wir definieren nun $A_{i+1} := A_i \cup \{n_i + 1, \dots, n_i + k_i\}$ und $E_{i+1} := E_i \cup \{(a, b) : a \in X_j \text{ und } b = n_i + j \text{ für ein } j\}$. Weiter setzen wir $\mathfrak{A}_{i+1} := (A_{i+1}, E_{i+1})$.

Wir zeigen als erstes eine Beobachtung.

Behauptung 1. Für alle $i \in \mathbb{N}$ und $a, b \in A_i$ mit $aE_i b$ gilt, dass $a \leq b$ ist.

Beweis. Wir beweisen dies induktiv nach i . Für $i = 0$ ist die Behauptung trivial. Angenommen, die Behauptung gelte für $i \in \mathbb{N}$. Seien $a, b \in A_{i+1}$ mit $aE_{i+1} b$. Falls $aE_i b$ gilt, so folgt $a \leq b$ direkt aus der Induktionsvoraussetzung. Also können wir annehmen, dass $(a, b) \in E_{i+1} \setminus E_i$ gilt. Dann ist $a \in A_i$ und $b > n_i$. Somit gilt $a \leq n_i < b$. \square

Nach Behauptung 1, hat jede Ecke in \mathfrak{A}_i nur endlich viele Pfeilvorgänger. Als nächstes zeigen wir, dass wir eine Folge von Enderweiterungen konstruiert haben.

Behauptung 2. Seien $i \leq j \in \mathbb{N}$. Dann ist \mathfrak{A}_j eine Enderweiterung von \mathfrak{A}_i .

Beweis. Nach Definition gilt, dass $E_i = E_j \cap (A_i \times A_i)$. Also ist \mathfrak{A}_i eine Substruktur von \mathfrak{A}_j . Es bleibt zu zeigen, dass für alle $a, b \in A_j$ gilt, falls $A \in A_i$ und $bE_j a$, so ist $b \in A_i$. Nach Behauptung 1, gilt $b \leq a$ und so $b \in A_i$. \square

Wir definieren nun $E_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ und $\mathfrak{A}_\infty := (\mathbb{N}, E_\infty)$. Wir zeigen, dass \mathfrak{A}_∞ ein Model von FST ist. (\mathfrak{A}_∞ ist sogar ein Model von $\text{FST} + \neg(\text{Inf})$, da jedes $n \in \mathbb{N}$ nur endlich viele Pfeilvorgänger hat.)

Behauptung 3. Die S -Struktur \mathfrak{A}_∞ ist ein Model von FST.

Beweis. (Ext): Seien $a, b \in \mathbb{N}$ sodass a und b die gleichen Pfeilvorgänger in \mathfrak{A}_∞ haben. Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ sodass a und b in A_i sind. Nach Behauptung 1 sind auch alle Pfeilvorgänger von a und b in A_i . Also reicht es aus zu überprüfen, dass für alle $\mathfrak{A}_i \models (\text{Ext})$ gilt. Wir zeigen dies per Induktion nach i . Für $i = 0$ folgt dies sofort. Angenommen, $\mathfrak{A}_i \models (\text{Ext})$. Seien $a, b \in A_{i+1}$ sodass a und b die gleichen Pfeilvorgänger haben. Nach der Induktionsvoraussetzung können wir annehmen, dass a oder b nicht in A_i ist. O.B.d.A ist $b \notin A_i$. Sei $V_b := \{c \in \mathbb{N} : cE_{i+1}b\}$ die Menge der Pfeilvorgänger von b . Nach Definition ist V_b nicht bedient in \mathfrak{A}_i . Weiter gilt $V_a := \{c \in \mathbb{N} : cE_{i+1}a\} = V_b$. Also kann a nicht in A_i sein, da sonst V_b bedient wäre. Somit gibt es ein $j \leq k_i$ mit $V_a = X_j = V_b$ und so $a = n_i + j = b$.

(Aus): Wir zeigen, dass es für jede endliche Teilmenge der natürlichen Zahlen V eine Ecke in \mathfrak{A}_∞ gibt, sodass die Menge der Pfeilvorgänger genau V ist. Da jede Ecke nur endlich viele Pfeilvorgänger hat impliziert dies (Aus). Sei $V \subseteq \mathbb{N}$ eine endliche Menge und sei $i \in \mathbb{N}$ sodass $i \geq |V|$ und $V \subseteq A_i$. Dann ist $V \in Z_i$. Wir machen eine Fallunterscheidung:

Fall 1: V ist bedient. Dann gibt es ein $a \in A_i$ sodass V genau die Menge der Pfeilvorgänger von a ist. Nach Behauptung 2 gilt das auch in \mathfrak{A}_∞ .

Fall 2: V ist nicht bedient. Dann gibt es ein $j \leq k_i$ sodass $V = X_j$. Dann ist die Menge der Pfeilvorgänger von $n_i + j$ in \mathfrak{A}_{i+1} genau V . Nach Behauptung 2 gilt das auch in \mathfrak{A}_∞ .

(\bigcup -Ax): Sei $a \in \mathbb{N}$, sei $V_a := \{b \in \mathbb{N} : bE_\infty a\}$ die Menge der Pfeilvorgänger von a und sei $V_a^2 := \{c \in \mathbb{N} : cE_\infty b \in V_a\}$ die Menge der Pfeilvorgänger von Pfeilvorgängern von a . Dann ist V_a^2 eine endliche Teilmenge von \mathbb{N} . Somit gibt es eine Ecke in \mathfrak{A}_∞ die genau die Elemente aus V_a^2 als Pfeilvorgänger hat.

(\cup -Ax): Wir haben in dem Beweis von (Aus) bereits gezeigt, dass es für jede endliche Teilmenge der natürlichen Zahlen V eine Ecke in \mathfrak{A}_∞ gibt, sodass die Menge der Pfeilvorgänger genau V ist. Somit gilt (Paar) in \mathfrak{A}_∞ . Also folgt (\cup -Ax) direkt aus (Paar) und (\bigcup -Ax).

(Pot): Sei $a \in \mathbb{N}$, sei $V_a := \{b \in \mathbb{N} : bE_\infty a\}$ die Menge der Pfeilvorgänger von a und sei $P_a := \{b \in \mathbb{N} : \text{für alle } cE_\infty b \text{ gilt } c \in V_a\}$ die Menge aller Ecken b sodass die Menge aller Pfeilvorgänger von b eine Teilmenge der Menge der Pfeilvorgänger von a ist. Dann ist P_a eine endliche Teilmenge von \mathbb{N} . Also gibt es eine Ecke in \mathfrak{A}_∞ die genau die Elemente aus P_a als Pfeilvorgänger hat. \square

Aufgabe 31.

- Behauptung** i) $F(x, y) = \{\{\{x\}, \emptyset\}, \{\{y\}\}\}$ definiert ein geordnetes Paar
 ii) $F(x, y) = \{\{x, \emptyset\}, \{y\}\}$ definiert ein geordnetes Paar
 iii) $F(x, y) = \{x, x \cup y\}$ definiert kein geordnetes Paar

Beweis

Seien $\mathcal{A} = (A, E)$ eine bel. Struktur s.d. $\mathcal{A} \models \text{FST}$ und $x, y, u, v \in A$

$$\text{i) Es gelte } F(x, y) = F(u, v) \text{ also } \underbrace{\{\{\{x\}, \emptyset\}\}}_{a_1} \underbrace{\{\{\{y\}\}\}}_{b_1} = \underbrace{\{\{\{u\}, \emptyset\}\}}_{a_2} \underbrace{\{\{\{v\}\}\}}_{b_2}$$

Bei genauer Betrachtung stellen wir fest das a_1, a_2 Paarmengen (also 2-elementig) sind und b_1, b_2 Einermengen (also 1-elementig) sind.

Da $\mathcal{A} \models \text{FST}$ sind Einer- und Paarmengen Eindeutig bestimmt

$$\Rightarrow a_1 = a_2 \text{ und } b_1 = b_2 \quad \text{also} \quad \{\{x\}, \emptyset\} = \{\{u\}, \emptyset\} \text{ und } \{\{y\}\} = \{\{v\}\}$$

Mit den vorherigen Argumenten und der Eindeutigkeit der leeren Menge folgt

$$\Rightarrow \{x\} = \{u\} \text{ und } \{y\} = \{v\}$$

$\xrightarrow{\text{Eind. (Einer)}} x = u \text{ und } y = v$

\square

$$\text{ii) Es gelte } F(x, y) = F(u, v) \text{ also } \underbrace{\{\{x, \emptyset\}\}}_{a_1} \underbrace{\{\{y\}\}}_{b_1} = \underbrace{\{\{u, \emptyset\}\}}_{a_2} \underbrace{\{\{v\}\}}_{b_2}$$

Fall 1 $x \neq \emptyset$

Mit den gleichen Argumenten wie in i) erhalten wir

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 \text{ und } b_1 = b_2 \\ \Rightarrow x = u \text{ und } y = v \end{aligned}$$

Fall 2 $x = \emptyset$

Also gilt

$$\underbrace{\{\{\emptyset\}, \{y\}\}}_a = \underbrace{\{\{u, \emptyset\}, \{v\}\}}_b$$

Nehmen wir nun an: $x \neq u$

$$\Rightarrow \{u, \emptyset\} \in b \text{ aber } \{u, \emptyset\} \notin a \quad \neq$$

$$\Rightarrow u = x \text{ also } \{\{\emptyset\}, \{y\}\} = \{\{\emptyset\}, \{v\}\}$$

$$\xrightarrow{\text{Eind. (Einer)+(LM)}} \{y\} = \{v\}$$

$$\xrightarrow{\text{Eind. (Einer)}} y = v$$

iii) Diesmal definieren wir x, y, u, v explizit in einer geeigneten Struktur durch

$$\begin{aligned} x = \{1, 2\} & & u = \{1, 2\} \\ y = \{1\} & & v = \{2\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F(x, y) = \{\{1, 2\}, \{1, 2\} \cup \{1\}\} = \{\{1, 2\}, \{1, 2\}\} = \{\{1, 2\}\}$$

$$F(u, v) = \{\{1, 2\}, \{1, 2\} \cup \{2\}\} = \{\{1, 2\}, \{1, 2\}\} = \{\{1, 2\}\}$$

$$\Rightarrow F(x, y) = F(u, v) \text{ aber } y \neq v$$

□

Aufgabe 32.

Behauptung: Ist (a, r) eine Ordnung i.S.v. $<$, so ist $(a, r \cup id_a)$ eine Ordnung i.S.v. \leq .

Beweis: Reflexivität: Wegen $id_a \subseteq r \cup id_a$ ist für alle $x \in a$ das Paar (x, x) in $r \cup id_a$. Somit ist $(a, r \cup id_a)$ reflexiv.

Antisymmetrie: Seien $x, y \in a$ beliebig. Sei zudem $(x, y) \in r \cup id_a$ und $(y, x) \in r \cup id_a$. Wir zeigen nun, dass nicht $(x, y) \in r$ und $(y, x) \in r$ gelten kann. Angenommen, dies gelte. Dann gilt $x = y$ wegen der Antisymmetrie von (a, r) . Somit ist $(x, x) \in r$ was ein Widerspruch zur Irreflexivität von (a, r) . Somit muss $(x, y) \in id_a$ oder $(y, x) \in id_a$ gelten. Es folgt $x = y$.

Transitivität: Transitivität folgt direkt aus der Transitivität von (a, r) . □

Behauptung: Ist (a, r) eine Ordnung i.S.v. \leq , so ist $(a, r \cup id_a)$ eine Ordnung i.S.v. $<$.

Beweis: Irreflexivität: Für alle $x \in a$ ist $(a, a) \in id_a$ und somit ist $(a, a) \notin r \setminus id_a$.

Antisymmetrie: Seien $x, y \in a$ beliebig mit $(x, y), (y, x) \in r \setminus id_a$. Dann ist wegen $r \setminus id_a \subseteq r$ auch $(x, y), (y, x) \in r$. Wegen der Antisymmetrie von (a, r) ist also $x = y$.

Transitivität: Seien $(x, y), (y, z) \in r \setminus id_a$. Wegen der Transitivität von (a, r) ist nun $(x, z) \in r$. Wir zeigen nun $(x, z) \notin id_a$ womit dann auch $(x, z) \in r \setminus id_a$ folgt. Angenommen, es ist $(x, z) \in id_a$. Dann ist $x = z$. Damit sind (x, y) und (y, x) in $r \setminus id_a$. Wegen der Antisymmetrie von (a, r) ist also auch $x = y$. Somit ist $(x, x) \in r \setminus id_a$, was ein Widerspruch zur Irreflexivität von (a, r) ist. \square

Aufgabe 33.

i)

Behauptung Für (a, r) und (b, s) $<$ -Ordnungen ist $(a \cup b, t)$ eine $<$ -Ordnung mit $t = r \cup s \cup (a \times b)$.

Beweis 1) Angenommen es gibt ein $x \in a \cup b$ mit xtx . Da r, s irreflexiv sind, gilt dann $x \notin a$ und $x \notin b$, was ein Widerspruch ist. Also ist t irreflexiv.

2) Nach Voraussetzung sind r, s transitiv, also ist t für Elemente, die nur aus a oder nur aus b kommen transitiv. Durch das kartesische Produkt gilt sonst ausserdem xy genau dann, wenn $x \in a$ und $y \in b$. Also kann für Elemente x, y, z mit xy und yz nur x aus a sein. Dann gilt aber auch automatisch xz . Also ist t transitiv.

3) Seien u, v aus $a \cup b$.

a) $u \in a, v \in a$. Da r konnex ist, gilt uv oder vtu oder $v = u$.

b) $u \in a, v \in b$. Dann gilt utb .

c) $u \in b, v \in b$. Da s konnex ist, gilt utv oder vtu oder $v = u$.

Also ist t konnex. \square

ii)

Behauptung Für (a, r) und (b, s) $<$ -Ordnungen ist $(a \times b, t)$ eine $<$ -Ordnung mit $t = \{(u, v), (y, z) \in (a, b)^2; ury \vee (u = y \wedge vsz)\}$.

Beweis 1) Angenommen es gibt $(u, v) \in a \times b$ mit $(u, v)t(u, v)$. Dann gilt $uru \vee (u = u \wedge vsv)$ im Widerspruch zur Irreflexivität von r und s . Also ist t irreflexiv.

2) Seien $(u, v), (y, z), (w, x)$ mit $(u, v)t(y, z)$ und $(y, z)t(w, x)$. Dann gilt $ury \vee (u = y \wedge vsz)$ und $yrv \vee (y = w \wedge zsx)$

a) Es gilt $ury \wedge yrv$. Dann folgt aus der Transitivität von r auch urw .

b) Es gilt $u = y \wedge vsz \wedge yrv \rightarrow urw$.

c) Es gilt $ury \wedge y = w \wedge zsx \rightarrow urw$.

d) Es gilt $u = y \wedge vsz \wedge y = w \wedge zsx$. Dann folgt aus der Transitivität von s auch vsx und es gilt $u = w$.

In jedem der Fälle gilt dann $(u, v)t(w, x)$. Also ist t transitiv.

3) Seien $(u, v), (x, y)$ aus $a \times b$. Dann gilt urx oder xru oder $x = u$, da r konnex ist. In den ersten beiden Fällen gilt dann $(u, v)t(x, y)$ bzw. $(x, y)t(u, v)$. Falls $x = u$ gilt weil s ebenfalls konnex ist, vsy oder ysv oder $y = v$. In den ersten beiden Fällen gilt dann $(u, v)t(x, y)$ bzw. $(x, y)t(u, v)$. Falls auch hier $y = v$, so gilt $(u, v) = (x, y)$. Also ist t konnex. \square