Studentische Lösungen zum Übungsblatt 7

Hier finden sich gute bis sehr gute Lösungen zu den Aufgaben, die von Studierenden abgegeben wurden. Die Autorinnen und Autoren der Lösungen haben zugestimmt, dass sie an dieser Stelle zur Verfügung gestellt werden.

Aufgabe 34.

Aufgabe 34: Behauptung: (a): Falls es eine Zermelo-induktive Menge (ZIM) gibt, so gibt es eine minimale ZIM.

(b): Es gilt $\bigcup \mathbb{N}_{Zermelo} = \mathbb{N}_{Zermelo}$.

(c): Falls $x \in \mathbb{N}_{Zermelo}$, so folgt $x \notin x$.

Beweis: (a): Sei I ZIM. Definiere

$I^* := \{x \in I \mid \text{Ist J ZIM, dann } x \in J\}$.

Dann ist I^* selbst eine ZIM:

$\emptyset \in I^*$: $\emptyset \in J$ für jede ZIM (insbesondere auch I) per Definition, also $\emptyset \in I^*$.

$z \in I^* \to \{z\} \in I^*$: Ist $z \in J$ für jede ZIM J, so auch $\{z\}$. Also folgt $\{z\} \in I^*$.

Da I^* Teilmenge jeder ZIM ist, ist I^* die kleinste ZIM.

(b):

'$\subseteq$': Z.z. ist, dass Elemente von Elementen von $\mathbb{N}_{Zermelo}$ wieder in $\mathbb{N}_{Zermelo}$ liegen, d.h.: es soll $X := \{x \in \mathbb{N}_{Zermelo} \mid z \in x \to z \in \mathbb{N}_{Zermelo}\} \overset{!}{=} \mathbb{N}_{Zermelo}$ gelten.

Dies folgt, wenn X ZIM ist:

$\emptyset \in X$: Erfüllt, da $\emptyset \in \mathbb{N}_{Zermelo}$, und $z \in \emptyset$ für kein z gilt.

$x \in X \to \{x\} \in X$: Sei $x \in X \subseteq \mathbb{N}_{Zermelo}$. Dann ist $\{x\} \in \mathbb{N}_{Zermelo}$ nach Definition von $\mathbb{N}_{Zermelo}$, und jedes Element von $\{x\}$ (ist ja nur x selbst) liegt in $\mathbb{N}_{Zermelo}$, also $\{x\} \in X$.

'$\supseteq$': Sei $x \in \mathbb{N}_{Zermelo}$. Dann ist $\{x\} \in \mathbb{N}_{Zermelo}$ und $x \in \{x\}$. Also $x \in \bigcup \mathbb{N}_{Zermelo}$.

(c): Definiere $X := \{x \in \mathbb{N}_{Zermelo} \mid x \notin x\}$. Zu zeigen ist, dass X ZIM ist:

$\emptyset \in X$: Erfüllt, da $\emptyset \in \mathbb{N}_{Zermelo}$ und $\emptyset \notin \emptyset$ gilt.

$x \in X \to \{x\} \in X$: Sei $x \in X$, also $x \notin x$. Insbesondere gilt also $x \neq \{x\}$.

Nun hat $\{x\}$ genau ein Element x, welches aufgrund von $x \neq \{x\}$ nicht '$\{x\}$' ist.

Also gilt $\{x\} \notin \{x\}$.

$\square$

Aufgabe 35.

Behauptung: (a) Die Menge $(\mathbb{N}, \subseteq)$ erfüllt das Prinzip der Ordnungsinduktion.

(b) Die Mengen $(\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}})$ und $(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$ mit gewöhnlicher Ordnung erfüllen das Prinzip der Ordnungsinduktion nicht.

Beweis:

(a) (nach Vorlesung).

Sei Z ordnungsinduktiv. Definiere $\hat{Z} := \{x ; \forall y \leq x \, (y \in Z)\}$. Da $\hat{Z} \subseteq Z$ reicht es zu zeigen, dass $\hat{Z}$ induktiv ist. Dann folgt $\hat{Z} = Z = \mathbb{N}$.

Zz: $\hat{Z}$ ist induktiv

- $\emptyset \in \hat{Z}$: Da $\forall y < \emptyset \;\; y \in Z$ (leere Bedingung) ist, gilt $\emptyset \in Z$.
  Also auch $\emptyset \in \hat{Z}$.
- Angenommen $x \in \hat{Z} \Leftrightarrow \forall y \leq x \, (y \in Z)$

$$\Leftrightarrow \forall y < S(x) \, (y \in Z) \quad \text{[denn: Falls } x \in y \text{, ist entweder } y = S(x) \text{ oder } S(x) \in y.]$$

$$\Rightarrow S(x) \in Z \quad \text{[da } Z \text{ ordnungsinduktiv]}$$

Mit $\forall y \leq x \, (y \in Z)$ und $S(x) \in Z$ folgt $\forall y \leq S(x) \, (y \in Z)$.

Nach Definition von $\hat{Z}$ ist somit $S(x) \in \hat{Z}$.

Mit (P3) folgt die Behauptung. $\square$

(b) Betrachte $A := \{x \in \mathbb{Q} ; x \leq_{\mathbb{Q}} 0\}$ und $B := \{x \in \mathbb{R} ; x \leq_{\mathbb{R}} 0\}$

Sei $y \in \mathbb{Q}$ mit $\{z \in \mathbb{Q} ; z <_{\mathbb{Q}} y\} \subseteq A$. Dann ist $y \leq_{\mathbb{Q}} 0$. Andernfalls wäre $\frac{y}{2} \in A$ mit $y > 0$. Wid.

Die Menge A ist also $\mathbb{Q}$-ordnungs-induktiv. Analog zeigt man, dass B $\mathbb{R}$-ordnungs-induktiv ist.

Es ist jedoch $A \neq \mathbb{Q}$, $B \neq \mathbb{R}$. $\square$

Aufgabe 36.

(a) Bh.: $\forall n, m \in \mathbb{N}$ gilt $m \in n \Rightarrow n \notin m$

Beweis: $m \in n \Rightarrow m \subseteq n, m \neq n \Rightarrow \exists x \, (x \in n \wedge x \notin m) \Rightarrow n \not\subseteq m \Rightarrow n \notin m$. $\square$

(b) Bh.: $\forall n, m, k \in \mathbb{N}$ gilt $(n + m) + k = n + (m + k)$

Beweis: $(n + m) + k = add_n(m) + k = add_{add_n(m)}(k)$,

$n + (m + k) = add_n(m + k) = add_n(add_m(k))$.

Mit Induktion folgt die Gleichheit:

- Für $k = \emptyset$ gilt $add_{add_n(m)}(\emptyset) = add_n(m) = add_n(add_m(0))$.
- Angenommen nun für k gilt Gleichheit. Dann folgt für

$S(k)$: $\mathrm{add}_{\mathrm{add}_n(m)}(S(k)) = S(\mathrm{add}_{\mathrm{add}_n(m)}(k))$ und

$\mathrm{add}_n(\mathrm{add}_m(S(k)) = \mathrm{add}_n(S(\mathrm{add}_m(k)) = S(\mathrm{add}_n(\mathrm{add}_m(k))$,

also folgt Gleichheit wegen $\mathrm{add}_{\mathrm{add}_n(m)}(k) = \mathrm{add}_n(\mathrm{add}_m(k))$ und somit wegen Gleichheit der Nachfolger.

(c) Bh.: $\forall m,n \in \mathbb{N}$ gilt $m+n = n+m$.

Beweis: per Induktion. • $m+0 = \mathrm{add}_m(0) = m = \mathrm{add}_0(m) = 0+m$, denn wiederum per Induktion folgt $\mathrm{add}_0(m) = m \ \forall m \in \mathbb{N}$. (denn $\mathrm{add}_0(0)=0$ und $\mathrm{add}_0(S(m)) = S\,\mathrm{add}_0(m) = S(m)$.)

• $m + S(n) = \mathrm{add}_m(S(n)) = S(\mathrm{add}_m(n))$ und

$S(n)+m = \mathrm{add}_{S(n)}(m) \overset{\text{denn:}}{=} S(\mathrm{add}_n(m))$, womit aus $\mathrm{add}_m(n) = \mathrm{add}_n(m)$ auch die Gleichheit der Nachfolger folgt.

wiederum mit Induktion folgt $\forall m \in \mathbb{N}$:

$\mathrm{add}_{S(n)}(m) = S(\mathrm{add}_n(m))$, denn • $\mathrm{add}_{S(n)}(0) = S(n) = S(\mathrm{add}_n(0))$ und

• $\mathrm{add}_{S(n)}(S(m)) = S(\mathrm{add}_{S(n)}(m)) \overset{\text{Induktionsvoraussetzung}}{=} S(S(\mathrm{add}_n(m))) = S(\mathrm{add}_n(S(m)))$. □

(d) Bh.: $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $1\cdot n = n \cdot 1 = n$

Beweis: per Induktion.

• $1\cdot 0 = \mathrm{mult}_1(0) = 0$, $0 \cdot 1 = \mathrm{mult}_0(1) = \mathrm{mult}_0(S(0)) = \mathrm{add}_0(\mathrm{mult}_0(0))$
$= \mathrm{add}_0(0) = 0$.

• Angenommen es gilt $1\cdot n = n \cdot 1 = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$1 \cdot S(n) = \mathrm{mult}_1(S(n)) = \mathrm{add}_1(\mathrm{mult}_1(n)) = \mathrm{add}_1(1\cdot n) = \mathrm{add}_1(n)$
$= \mathrm{add}_n(1) = S(\mathrm{add}_n(0)) = S(n)$. und

$S(n)\cdot 1 = \mathrm{mult}_{S(n)}(1) = \mathrm{add}_{S(n)}(\mathrm{mult}_{S(n)}(0)) = \mathrm{add}_{S(n)}(0) = \mathrm{add}_0(S(n))$
$= S(n)$ □

c) **Beh.:** $n \cdot m = m \cdot n \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

Beweis. per Induktion:

- $n \cdot 0 = \text{mult}_n(0) = 0$ und $0 \cdot n = \text{mult}_0(n) = 0$

  ↳ folgt per Induktion, denn $\text{mult}_0(0) = 0$ und $\text{mult}_0(S(n)) = \text{add}_0(\text{mult}_0(n)) = \text{add}_0(0) = 0.$

- Angenommen $n \cdot m = m \cdot n$ für ein m und alle $n \in \mathbb{N}$.

  Dann folgt $n \cdot S(m) = \text{mult}_n(S(m))$

  $= \text{add}_n(\text{mult}_n(m)) = \text{add}_n(\text{mult}_m(n)) = \text{mult}_{S(m)}(n) = S(m) \cdot n$

  ↳ per Induktion:

  - $\text{add}_0(\text{mult}_m(0)) = \text{add}_0(0) = 0$ und $\text{mult}_{S(m)}(0) = 0$

  - Angenommen $\text{add}_n(\text{mult}_m(n)) = \text{mult}_{S(m)}(n)$. Dann folgt

    $\text{add}_{S(n)}(\text{mult}_m(S(n))) = \text{add}_{S(n)}(\text{add}_m(\text{mult}_m(n)))$

    $= \text{add}_n(\text{add}_m(\text{mult}_m(n))) = S(\text{add}_n(\text{mult}_m(S(n)))$

    $= \text{add}_{S(n)}\, \text{mult}_{S(n)}(m) = \text{mult}_{S(n)}(S(m)).$ □

Aufgabe 37.

(37) (a) **Beh.:** Jede Ded.-unendliche Menge ist unendlich

Bew.: Sei X Ded. unendlich $\Rightarrow \exists Y \subsetneq X : X \cong Y$ (es ex. Bijektion)

Ang. X endlich, dann ex. $n \in \omega$ mit $X \cong n$, also Fkt. $f: X \xrightarrow{\cong} n$

Nun folgt $f|_Y : Y \to n$ ist injektiv aber nicht surjektiv, da $Y \subsetneq X$.

Andererseits: $Y \cong X \cong n$, also $Y \cong n$ und mit $f|_Y$ ex. also $h: n \to n$ mit h ist injektiv aber nicht surjektiv.

Zeige nun per Ind. h gibt's nicht $\forall n$, d.h.: Jede inj. Fkt. $h: n \to n$ ist surjektiv.

IA: $n = \emptyset$: $\emptyset \to \emptyset$ inj + surj

IS: Sei $a: n \cup \{n\} \to n \cup \{n\}$ inj. Fkt.

Fall 1: $a(n) = n \Rightarrow a|_n : n \to n$ ist bij $\Rightarrow a: n \cup \{n\} \to n \cup \{n\}$ ist bij.

↑ $n \cup \{n\}$ ist disj. Vereinigung, da $n \notin n$ $\forall n$

Fall 2: $a(n) \neq n$, nun ist $b: n \cup \{n\} \setminus \{a(n)\} \to n,\ x \mapsto \begin{cases} x, & x \neq n \\ a(n), & x = n \end{cases}$

eine bij. Fkt., also ist $b \circ a|_n : n \to n$ nach IV eine Bij.

nun: $b^{-1} \circ b \circ a|_n : n \to n \cup \{n\} \setminus \{a(n)\}$ ist auch bij.

also a bij.

Also muss die Annahme X endlich falsch gewesen sein.

(b) Beh.: Falls $f: \mathbb{N} \to X$ inj ex., so ist X Ded.-unendlich

Bew.: ~~[illegible]~~ O.E.

$g: \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Im}(f) \setminus \{f(0)\}$, $f(n) \mapsto f(S(n))$

Dann ist g bij, da $f|_{\mathrm{Im}(f)}$ bij. ist und $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ bij ist.

nun ist

$$f': X \to X \setminus \{f(0)\},\ x \mapsto \begin{cases} x, & x \in X \setminus \mathrm{Im}(f) \\ g(x), & x \in \mathrm{Im}(f) \end{cases}$$

eine Bij. und man erhält wie gewünscht $(f')^{-1}: \underbrace{X \setminus \{f(0)\}}_{\subsetneq X} \to X$ bij. □

Aufgabe 38.

Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ mit $A \setminus n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein bijektives $f : \mathbb{N} \to A$.

Beweis: Wir definieren f rekursiv. Es sei

f(0):= das minimale Element von A bezüglich $\in$

f(S(n)):= das minimale Element von $A \setminus S(f(n))$ bezüglich $\in$.

Da $A \setminus S(f(n))$ nach Definition nicht leer ist existiert ein minimales Element, somit ist f wohldefiniert. Wir zeigen nun, dass f surjektiv ist. Sei $a \in A$. Ist a minimal in A bezüglich $\in$, so ist $f(0) = a$. Ist a nicht minimal, so existiert ein eindeutiges $b \in A$ mit $b \in a$ so, dass kein Element $c \in A$ mit $b \in c \in a$ existiert. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ so, dass $f(n) = b$ ist. Dann ist $f(S(n))$ das minimale Element von $A \setminus S(b)$. Wegen $b \in S(b)$ ist $b \notin A \setminus S(b)$. Somit ist a das minimale Element von $A \setminus S(b)$. Es gilt also $f(S(n)) = a$.

Wir zeigen nun, dass f injektiv ist. Seien also $a, b \in A$ mit $f(a) = f(b)$. Ist $f(a)$ minimal in A, so ist $a = 0$ und $b = 0$. Ist $f(a)$ nicht minimal in A, so existiert ein eindeutiges $n \in \mathbb{N}$ mit $f(S(n)) = f(a)$ und $f(S(n)) = f(b)$. Somit ist $f(a) = f(S(n)) = f(b)$. Es folgt $a = S(n) = b$. □