Studentische Lösungen zum Übungsblatt 8

Hier finden sich gute bis sehr gute Lösungen zu den Aufgaben, die von Studierenden abgegeben wurden. Die Autorinnen und Autoren der Lösungen haben zugestimmt, dass sie an dieser Stelle zur Verfügung gestellt werden.

Aufgabe 39.

(39) Sei $\mathcal{A} = (A, +, 0)$ ein abelsches Monoid mit Kürzungsregel.

a) Beh: Falls A D-endlich, so ist $\mathcal{A}$ Gruppe.

Bew: zz $\forall a \in A \ \exists x \in A$ mit $x + a = 0$.

Betrachte $f_a : A \to A$, $x \mapsto x + a$

Falls $f(x) = f(y) \iff x + a = y + a \overset{KR}{\Rightarrow} x = y$

Also ist f_a injektiv $\forall a$.

Da A D-endlich ist, muss f_a auch surjektiv sein.

Also $\exists x \in A$ mit $f(x) = 0 \iff x + a = 0$. $\square$

b) Wir setzen $(a,b) \sim (a',b') \iff a + b' = b + a'$

Beh: $\sim$ ist Äquivalenzrelation.

Bew: reflexiv: Es gilt $a + b = b + a \Rightarrow (a,b) \sim (a,b)$

symmetrisch: Sei $(a,b) \sim (a',b')$
$\iff a + b' = b + a'$
$\Rightarrow a' + b = b' + a$
$\iff (a',b') \sim (a,b)$

transitiv: Sei $(a,b) \sim (c,d)$ und $(c,d) \sim (e,f)$
$\iff a + d = b + c \ \land \ c + f = d + e$

$\Rightarrow \cancel{c} + f + a + \cancel{d} = b + \cancel{c} + \cancel{d} + e$
$\overset{KR}{\Rightarrow} f + a = b + e \Rightarrow a + f = b + e$
$\iff (a,b) \sim (e,f)$ $\square$

Die KR sichert die Transitivität.

c) $G = {}^{A \times A}/_{\approx}$ mit

$$[a,b] \oplus [a',b'] = [a+a', b+b']$$

zz $\oplus$ wohldefiniert

Sei $(a,b) \sim (c,d)$ und $(a',b') \sim (c',d')$
$\Leftrightarrow$ $a+d = b+c$ und $a'+d' = b'+c'$
$\Rightarrow$ $a+d+a'+d' = b+c+b'+c'$
$\Rightarrow$ $(a+a', b+b') \sim (c+c', d+d')$

Sei $0 = [0,0]$

zz Für $(a,b) \sim (0,0)$: $[a,b] \oplus [c,d] = [c,d]$

$$
\begin{aligned}
(a,b) \sim (0,0) &\Leftrightarrow a+0 = b+0 \\
&\Rightarrow a = b \\
&\Rightarrow a+c+d = b+c+d \\
&\Rightarrow c+b+d = d+a+c \\
&\Rightarrow (c+b, d+a) \sim (c,d) \\
&\Rightarrow [a,b] \oplus [c,d] = [c,d]
\end{aligned}
$$

Sei $-[a,b] = [b,a]$

zz Für $(c,d) \sim (a,b)$: $(d,c) \sim (b,a)$

$$
\begin{aligned}
(c,d) \sim (a,b) &\Leftrightarrow a+d = c+b \\
&\Rightarrow d+a = b+c \\
&\Leftrightarrow (d,c) \sim (b,a)
\end{aligned}
$$

Beh: $i: A \to G$, $a \mapsto [a,0]_\sim$ ist eine strukturerhaltende Injektion

Bew: Seien a,b mit $i(a) = i(b)$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow [a,0] = [b,0] \\
&\Leftrightarrow a+0 = b+0 \\
&\overset{KR}{\Rightarrow} a = b
\end{aligned}
$$

Also ist i injektiv.
Alle Rechenregeln übertragen sich von $+$ und 0 auf $\oplus$ und $[0,0]$. $\square$

d) Wir nutzen diese Konstruktion, um aus $(\mathbb{Z}\setminus\{0\}, \cdot, 1)$ $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot, 1)$ zu erhalten.

Dabei benötigen wir die Kürzungsregel, damit $\sim$ transitiv ist.

$$(a,b)\sim(a',b') \iff a\cdot b' = b\cdot a'$$

Sei $(a,b)\sim(c,d)$ und $(c,d)\sim(e,f)$

$\iff a\cdot d = b\cdot c$ und $c\cdot f = d\cdot e$

$\Rightarrow a\cdot d\cdot c\cdot f = b\cdot c\cdot d\cdot e$

$\overset{KR}{\Rightarrow}$ $a\cdot f = b\cdot e$ nur für $d, c \neq 0$

Falls $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ nicht nullteilerfrei, so ist $\sim$ keine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 40.

Behauptung:

(a) Es ist $(\mathrm{Ded}(\mathfrak{X}), <)$ eine strikte, lineare Ordnung, in der jede nicht-leere, (nach oben) beschränkte Teilmenge eine kleinste obere Schranke hat.

(b) Wenn $\mathfrak{X}$ strikt, linear geordnet ist, ist die Funktion aus der Aufgabe eine ordnungserh. Einbettung.

(c) Wenn wir die Bedingung der Adäquatheit weggelassen, d.i. $\mathrm{Ded}(\mathfrak{X})$ als Menge aller Dedekind-Schnitte definieren, verlieren wir die „Eindeutigkeit der Vervollständigung". Formaler:
Vorausgesetzt wir haben $\mathbb{R}$ z.B. via Cauchy-Folgen konstruiert. Dann gilt für $\mathfrak{X} = (\mathbb{Q}, <)$ mit gew. Ordnung: $\mathbb{R} \not\cong \mathrm{Ded}(\mathfrak{X})$.

Beweis:

(a): Zz: $(\mathrm{Ded}(\mathfrak{X}), <)$ ist eine strikte, lineare Ordnung.

- Irrefl. & Trans. vererbt sich von der „$\subsetneq$"-Relation:
  - irreflexiv:

    Angenommen es gäbe einen adäquaten Dedekind-Schnitt (L,R) mit $(L,R)<(L,R)$.
    Dann wäre $L \subsetneq L$ $\lightning$ zu: $L=L$
  - transitiv:

    Seien $(L,R), (L',R'), (L'',R'') \in \mathrm{Ded}(\mathfrak{X})$ mit $(L,R)<(L',R')$ und $(L',R')<(L'',R'')$. Dann sind $L\subsetneq L'$ und $L'\subsetneq L''$. Mit Transitivität der $\subsetneq$-Relation auf $\mathrm{Pot}(X)$ folgt $L\subsetneq L''$. Somit ist $(L,R)<(L'',R'')$.
  - konnex:

    Seien $(L,R), (L',R') \in \mathrm{Ded}(\mathfrak{X})$. Es gelte $(L,R)\not>(L',R')$ und $(L,R)\neq(L',R')$.
    Dann ist $L \not\supseteq L'$. $(*)$
    Da $R \neq X$ ein echtes Anfangssegment ist und $L\cup R = X$ gilt, ist $L\neq\emptyset$. Sei also $l\in L$. Mit $(*)$ ist $L'\setminus L \neq \emptyset$. Sei somit $l'\in L'\setminus L$.

Da X strikt, linear geordnet ist, gilt $l' < l$ oder $l' > l$ oder $l' = l$.

<u>Fall 1:</u> $l' < l$.

Da L Anfangssegment ist, folgt $l' \in L$ $\lightning$ zur Wahl von l'.

<u>Fall 2:</u> $l' > l$.

Da L' Anfangssegment ist, folgt $l \in L'$.

<u>Fall 3:</u> $l' = l$.

Dann ist $l' = l \in L$ $\lightning$ zur Wahl von l'.

Also folgt $l \in L'$. Wir schließen $L \subsetneq L'$.

Also ist $(L, R) < (L', R')$.

<u>ZZ:</u> Jede nicht-leere, beschränkte TM von $(\mathrm{Ded}(\mathfrak{X}), <)$ hat eine kleinste obere Schranke.

Sei $A \subseteq \mathrm{Ded}(\mathfrak{X})$ mit $A \neq \emptyset$ und A beschränkt.

Definiere $\Phi(b) := \forall D (D \in A \longrightarrow (l \in \pi_l(D) \longrightarrow l < b))$.

Sei $R := \{ b \in X ; \Phi(b) \}$. Setze $L := X \setminus R$.

<u>1. Schritt:</u> Wir zeigen: $(L, R) \in \mathrm{Ded}(\mathfrak{X})$.

<u>Beweis:</u>

- $L \cup R = (X \setminus R) \cup R = X$.
- $L \cap R = (X \setminus R) \cap R = \emptyset$.
- Sei $l \in L$, $x \in X$ mit $x < l$.

  Dann existiert ein $(L', R') \in A$ mit $l' \in L'$ und $l' \nless l$.

  Andernfalls wäre $\Phi(l)$ erfüllt, und somit $l \in R$. <u>Wid.</u>

  Da $(X, <)$ eine strikte, lin. Ordnung ist, folgt:

  $$l' > l \text{ oder } l' = l.$$

  Da $<_X$ transitiv ist, folgt: $l' > x$.

  Die Formel $\Phi(x)$ ist also nicht erfüllt. Also $x \notin R$. Somit $x \in L$.
- Sei $r \in R$, $x \in X$ mit $x > r$.

  Dann ist $\forall D (D \in A \longrightarrow (l \in \pi_l(D) \longrightarrow l < r))$.

  Da die $<_X$-Relation transitiv ist, folgt:

  $\forall D (D \in A \longrightarrow (l \in \pi_l(D) \longrightarrow l < x))$. Also $x \in R$.

- Da A beschränkt ist, gilt $R \neq \emptyset$. Somit ist $L \neq X$.

  Da A eine nicht-leere Menge von Dedekind-Schnitten ist, existiert $(L', R') \in A$ mit $L' \neq \emptyset$.

  Sei $l' \in L'$. Dann ist $\Phi(l')$ nicht erfüllt. Also $l' \notin R$. Somit $R \neq X$.

Also: L ist echtes Anfangssegment von $\mathfrak{X}$ bzw. R ein echtes Endsegment von $\mathfrak{X}$.

- Wir zeigen: (L,R) ist adäquat.

Angenommen L hätte ein größtes Element $x \in L$.

Dann wäre für alle $y \in L$: $x = y$ oder $y < x$.

Da $x \in L$ wäre $\Phi(x)$ nicht erfüllt. Es gäbe also $(L',R') \in A$ s.d. $l' \in L'$ und $l' \nleq x$. Also ($<_X$ ist konnex): $x = l'$ oder $x < l'$.

Fall 1: $x = l'$.

Angenommen es gäbe $l'' \in L'$ mit $l'' > x$. Dann wäre $l'' \in L$ mit $l'' > x$. $\lightning$ zur Maximalität von x

Also ist $x = l'$ größtes Element von L'. $\lightning$ zu: L' ist adäquat.

Fall 2: $x < l'$.

Da $l' \in L'$ und $(L',R') \in A$ ist, folgt $l' \in L$. $\lightning$ zur Maximalität von x

Also ist (L,R) adäquat.

Dies zeigt $(L,R) \in \left(\mathrm{Ded}(\mathfrak{X}), <\right)$.

q.e.d.

2. Schritt: Wir zeigen nun, dass (L,R) kleinste, obere Schranke von A ist.

Beweis: • Zz: Für alle $(L',R') \in A$ ist $L \supseteq L'$:

Sei $(L',R') \in A$ und $l' \in L'$. Da $l' \ngtr l'$ ist offenbar $\Phi(l')$ nicht erfüllt. Also $l' \notin R$. Somit $l' \in L$.

• Zz: Für jede obere Schranke $(L',R') \in \mathrm{Ded}(\mathfrak{X})$ von A gilt: $L' \supseteq L$. (∗)

Angenommen es gäbe eine obere Schranke $(L',R') \in \mathrm{Ded}(\mathfrak{X})$ von A mit $L' \not\supseteq L$.

Dann existiert $l \in L \setminus L'$. Also ist $\Phi(l)$ nicht erfüllt.

Es gibt somit ein $(L'',R'') \in A$ s.d. für ein $l'' \in L''$ gilt: $l'' \nleq l$.

Mit Konnexität von $<_X$ folgt: $l'' > l$ oder $l'' = l$.

1. Fall: $l'' > l$.

Da $l \notin L'$, ist $l \in R'$. Da R' echtes Endsegment ist, folgt $l'' \in R'$.

Also: $l'' \notin L'$. Es ist somit $L'' \nsubseteq L'$. $\lightning$ zu: (L',R') ist obere Schranke von A

2. Fall: $l'' = l$.

Dann ist $l'' = l \notin L'$. $\lightning$ zu: (L',R') ist obere Schranke von A

Mit Negation der Annahme folgt (∗)

q.e.d.

Dies beendet den Beweis.

$\dashv$

(b): Seien $a, b \in \mathfrak{X}$.
Sei f die Funktion $f: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathrm{Ded}(\mathfrak{X})$ aus der Aufgabe.

- Dann ist $f(a) < f(b) \overset{}{\Longleftrightarrow} (y \in \mathfrak{X}; y < a) \subsetneq (y \in \mathfrak{X}; y < b)$.
$\Updownarrow (*)$
$a < b$

(*): "$\Rightarrow$" Es gelte ($y<a \Rightarrow y<b$). Es ist $a > b$ oder $a = b$ oder $a < b$ (Konnexität)
Jedoch $a \neq b$, da sonst $(y \in \mathfrak{X}; y<a) = (y \in \mathfrak{X}; y<b)$ $\lightning$. Auch $a \not> b$, da andernfalls es $y \in \mathfrak{X}$ gäbe mit $y<b$ und ($y>a$ oder $y=a$), also (Transitivität und direkt) $a<b$. $\lightning$ Wir schließen $a<b$.
"$\Leftarrow$" folgt aus Transitivität & Irreflexivität von $<$.

- <u>Injektivität</u> Es gelte $f(a) = (y \in \mathfrak{X}; y<a) = (y \in \mathfrak{X}; y<b) = f(b)$.
Es ist $a > b$ oder $a < b$ oder $a = b$ (Trichotomie).

Im Fall $a < b$, ist $a \in L_b$. Also $a \in L_a$. $\lightning$ zur Irreflexivität von $<$. Fall $a > b$ analog. Also $a = b$.

Wir stellen fest: Wir haben alle drei Eigenschaften einer strikten, linearen Ordnung verwendet

$\dashv$

(c): Sei $\mathfrak{X} = (\mathbb{Q}, <)$.
Wenn wir die Adäquatheit weglassen, haben wir zwei "Darstellungen" für $q \in \mathbb{Q}$..
Einmal: $D = (L, R)$ mit $L = \{p \in \mathbb{Q}; p < q\}$ und $R = \mathbb{Q} \setminus L$.
Und: $D' = (L', R')$ mit $L' = \{p \in \mathbb{Q}; p \leq q\}$ und $R = \mathbb{Q} \setminus L$.

D ist adäquat, D' nicht.
Man kann zeigen, dass in diesem Fall: $\mathrm{Ded}(\mathfrak{X}) \not\cong \mathbb{R}$.
Dafür müsste man $\mathbb{R}$ auf andere Weise als via Dedekind-Schnitte konstruieren, " "
Das ist (mir) zu viel Arbeit. $\dashv$

Aufgabe 41.

Beh.: Jede abzählbare dichte strikte lineare Ordnung ohne Endpunkte D ist isomorph zu $(\mathbb{Q}, <)$.

Bew.: Seien $D = \{d_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{Q} = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Definiere eine Funktion f rekursiv wie folgt:
$f(d_0) = q_0$. Für $k \geq 1$ sei $f(d_k)$ das Element q_j mit kleinstem j, das zwischen $f(d_0), \ldots, f(d_k)$ genauso liegt wie d_k zwischen $d_0, \ldots, d_{k-1}$
(die Elemente werden also auf den gleichen „Platz" abgebildet. Aufgrund der Konnexität der lin. Ord.

können wir auch die „Vergleiche“ in der Def. rechtfertigen).
Da $\mathbb{D}$ abzählbar ist, ist f injektiv.
Ang. f wäre nicht surjektiv. Dann betrachte ein kleinstes q_n so, dass dieses nicht in Bild(f) ist.
Sei v ein kleinster Index, sodass $\{q_0, \dots, q_{n-1}\} \subseteq \{f(d_0), \dots, f(d_v)\}$ und $w > v$ der kleinste Index, sodass d_w zw. $d_0, \dots, d_v$ liegt wie q_n zw. $f(d_0), \dots, f(d_v)$. Dann wäre $f(d_t) = q_n$ $\lightning$ $q_n \notin$ Bild(f).

$\square$

Aufgabe 42.

Seien $\mathcal{W} = (W, <)$ Wohlordnung und Z eine bel. Menge. Außerdem seien $G(\mathcal{W}, Z) := G$ und $f : G \to Z$ wie in der Aufgabenstellung
Wir stellen fest: $\varnothing \in G$ da $Bild(\varnothing) = \varnothing \subseteq Z$ und $Def(\varnothing) = \varnothing$ ist ein echtes Anfangssegment von $\mathcal{W}$. Wir sagen eine Funktion $H : W \to Z$ erfüllt ($\heartsuit$) falls

$$\forall w \in W \;:\; H(w) = F(H|_{<[w]})$$

<u>**Behauptung**</u> es existiert eine eindeutige Funktion H s.d. ($\heartsuit$)
<u>**Beweis**</u>
Da $\mathcal{W}$ eine Wohlordnung ist besitzt $\mathcal{W}$ ein kleinstes Element, dieses bezeichnen wir mit 0.

<u>Eindeutigkeit</u> Seinen G, H zwei Funktionen die ($\heartsuit$) erfüllen
Wir definieren uns eine Menge $Z = \{w \in W \mid G(w) = H(w)\}$

<u>IA</u> Es gilt

$$G(0) = F(G|_{<[0]}) = F(\varnothing) = F(H|_{<[0]}) = H(0)$$

$\Rightarrow 0 \in Z$

<u>IS</u> Sei $w \in W$ s.d. $\underbrace{<[w] \subseteq Z}_{(\text{🦇})}$

Nun gilt

$$G(w) = F(G|_{<[w]}) \overset{(\text{🦇})}{=} F(H|_{<[w]}) = H(w)$$

$\Rightarrow w \in Z$

$\xRightarrow{\text{Z Ordnungsinduktiv}} Z = W$

$\Rightarrow G = H$

<u>Existenz</u> Wir nennen eine Funktion h einen <u>Schleim</u> falls $Def(h) \subseteq W$ und für alle $w \in Def(h)$ gilt ($\heartsuit$)

<u>Behauptung 1</u> g, h Schleime und $w \in Def(g) \cap Def(h) \Rightarrow g(w) = h(w)$

<u>Beweis</u> Analog zur Eindeutigkeit

<u>Behauptung 2</u> Für alle $w \in W$ existiert h Schleim mit $w \in Def(h)$

<u>Beweis</u> Wir definieren $Z = \{w \in W \mid \exists h \;\; Schleim \wedge w \in Def(h)\}$

<u>IA</u> $h_0 := (0, F(\varnothing))$ ist offensichtlich ein Schleim

<u>IS</u> Sei $w \in W$ s.d. $\underbrace{<[w] \subseteq Z}_{(\text{🦇})}$

Also existiert ein Schleim h mit $<[w] \subseteq Def(h)$
Wir definieren dementsprechend

$$h' = h \cup \{(w, F(h|_{<[w]}))\}$$

h' ist offensichtlich auch ein Schleim
$\Rightarrow w \in Z$
$\Rightarrow Z = W$

Sei nun $H = \{(w, z) \in W \times Z \mid \Phi(w, z)\}$ wobei $\Phi(w, z)$ folgende Formel ist

$$\Phi(w, z) \equiv \exists h(h \;\; Schleim \wedge w \in Def(h) \wedge g(w) = z)$$

Nach Behauptung 1, Behauptung 2 ist H die eindeutige Funktion welche ($\heartsuit$) erfüllt

$\square$

Aufgabe 43.

Behauptung: Ist $(W, <)$ eine Wohlordnung und A die Menge der Anfangsstücke von W, so gilt $(W, <) \cong (A, \subset_A)$.
Beweis: Wir definieren $f : W \to A; w \mapsto <[a]$ und zeigen, dass f bijektiv ist.
Injektivität: Sei $f(w) = f(w')$. Dann ist $<[w] =< [w']$. Angenommen, es ist $w < w'$. Dann ist $w \in< [w']$ aber nicht $w \in< [w]$. Das ist ein Widerspruch zur Gleichheit. Analog widerlegen wir $w > w'$ und erhalten $w = w'$.
Surjektivität: Sei $a \in A$. Da $(W, <)$ eine Wohlordnung ist ist auch $(W \setminus a, < \cap (W \setminus a \times W \setminus a))$ eine Wohlordnung und hat somit ein kleinstes Element w'. Für alle $w'' \in a$ gilt nun $w'' < w'$ und somit ist $f(w') = a$.
Wir zeigen nun, dass f strukturerhaltend ist. Seien $w, w' \in W$ mit $w < w'$. Dann gilt für alle $z \in< [w] = f(w)$ auch $z < w'$ und somit $z \in< [w'] = f(w')$. Es folgt $f(w) \subset_A f(w')$. $\square$

Die Behauptung gilt nicht für beliebige Ordnungen i.S.v. $<$. Betrachte $a := \{\frac{1}{n} : n \in \omega \setminus 1\} \cup \{-\frac{1}{n} : n \in \omega \setminus 1\}$ und $< := <_{\mathbb{Q}} \cap (a \times a)$. Sei $f : A \to a$ eine Bijektion und sei $u := f(\{-\frac{1}{n} : n \in \omega \setminus 1\})$. Dann gibt es ein $n \in \omega$ sodass entweder $u = \frac{1}{n}$ oder $u = -\frac{1}{n}$. Wir machen eine Fallunterscheidung:

Fall 1: $u = \frac{1}{n}$. Dann gibt es nur endlich viele $v \in a$ mit $u < v$. Es gibt aber unendlich viele Anfangssegmente in A, die $\{-\frac{1}{n} : n \in \omega \setminus 1\}$ enthalten. Also ist f kein Ordnungsisomorphismus.

Fall 2: $u = -\frac{1}{n}$. Dann gibt es nur endlich viele $v \in a$ mit $v < u$. Es gibt aber unendlich viele Anfangssegmente in A, die in $\{-\frac{1}{n} : n \in \omega \setminus 1\}$ enthalten sind. Also ist f kein Ordnungsisomorphismus.

Also kann es keinen Ordnungsisomorphismus von $(a, <)$ nach $(A, \subseteq_A)$ geben.